

Derzeitige Stellung der Knotentheorie als Teilgebiet der Mathematik

**DIPLOMARBEIT
im Lehramtsstudium Mathematik - Französisch
zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra der Naturwissenschaften**

**eingereicht bei
Herrn Univ. Prof. Dr. Tim Netzer
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik der
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck**

Jasmina Massoudy

8. Juni 2020 Innsbruck

Eidesstaatliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/ Master-/ Diplomarbeit/ Dissertation eingereicht.

Datum, Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herrn Professor Netzer bedanken - für seine unglaubliche Geduld und für seine Mithilfe bei der Themensuche. Er hat mich nicht nur dazu ermutigt über ein Thema zu schreiben, welches mir vorher noch unbekannt war, sondern er stellte sich auch während des Erstellens der Arbeit immer wieder zur Verfügung, sollten Unklarheiten oder Fragen auftauchen. Vielen Dank!

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Familie. Bei meinen Eltern, die es mir ermöglicht haben, mein Studium zu absolvieren, mich immer wieder motiviert haben und mir immer wieder enorme Unterstützung geboten haben. Auch meine Geschwister waren während meines ganzen Studiums immer für mich da und gaben mir stets Halt.

Weiteres möchte ich mich bei meinem Verlobten bedanken, der mir immer wieder die nötige Motivation gegeben hat und mir stets geholfen hat das Positive in gewissen schwierigen Situationen meines Studiums zu sehen. Kein Mensch auf dieser Welt hat so viel Geduld wie du!

Nicht zuletzt möchte ich all meinen Freunden danken, die mich immer wieder beim Lernen unterstützt haben. Sei es darum gegangen etwas zu wiederholen oder etwas Neues zu lernen. Meine Freunde waren stets an meiner Seite, und ich wusste ich kann mich immer auf sie verlassen!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitende Worte	7
2	Geschichte der Knotentheorie	9
3	Grundlagen der Knotentheorie	13
3.1	Definition eines Knotens	13
3.2	Äquivalenz und Deformation von Knoten	16
3.3	Darstellung von Knoten in der Ebene	20
3.4	Orientierung eines Knotens	21
3.5	Zusammengesetzte Knoten	25
4	Kombinatorische Techniken	27
4.1	Reidemeister-Bewegungen	27
4.2	Dreifarbigekeit von Knoten	32
5	Knoteninvarianten	37
5.1	Die Entknotungszahl	37
5.2	Die Kreuzungszahl	41
5.3	Die Brückenzahl	42
6	Anwendungsgebiete der Knotentheorie	44
7	Derzeitiger Lehrplanaufbau	46
7.1	Einordnung der Knotentheorie in den österreichischen Lehrplan	51
8	Anwendungsbeispiele für die Schule	54
8.1	Vorüberlegung	54
8.2	Unterrichtskonzept	55
9	Literatur	68
10	Anhang	69

Abbildungsverzeichnis

1	Schwierigkeit bei Auflistung von Knoten nach Tait (Livingston 1995, S.2)	10
2	Beispiel für zwei verschiedene Knotentypen (Livingston 1995, S.2)	11
3	Wilder Knoten (Livingston 1995, S.12)	14
4	Kleeblattknoten als Polygonzug	15
5	Unknoten	15
6	Achterknoten in drei Projektionen (angelehnt an Adams 1995, S.15)	16
7	Legitime Deformation	18
8	Nicht zugelassene Deformation	18
9	Orientierung von Knoten	22
10	Kreis	22
11	Beispiel für Unknoten	23
12	Beispiel für Deformation bis Unknoten	23
13	Zusammensetzung von zwei Knoten (angelehnt an Adams 1995, S.20)	25
14	Zusammensetzung von einem Knoten mit dem Unknoten (angelehnt an Adams 1995, S.21)	26
15	Primknoten oder zusammengesetzter Knoten? (angelehnt an Adams 1995, S.21)	26
16	Reidemeister-Bewegung vom Typ 1	27
17	Reidemeister-Bewegung vom Typ 2	28
18	Reidemeister-Bewegung vom Typ 3	28
19	Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 1	29
20	Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 2	29
21	Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 3	29
22	Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 3	29
23	Beispiel für Entknotung mit Reidemeister-Bewegung	31
24	Kleeblattknoten dreifarbig	33
25	Typ 1 verändert die Dreifarbigkeit nicht	33
26	Typ 2 verändert die Dreifarbigkeit nicht	34
27	Typ 3 verändert die Dreifarbigkeit nicht	35
28	Kleeblattknoten rechts- und linkshändig	38
29	Blickwinkel aus drei Perspektiven(angelehnt an Adams 1995, S.71)	39
30	Maxima und Minima im Knoten (angelehnt an Livingston 1995, S.123)	42
31	Maxima und Minima im Achterknoten (angelehnt an Adams 1995, S.76)	43
32	Darstellung von Unknoten	61
33	Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)	69
34	Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)	70
35	Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)	71
36	Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)	72

„Darum sage ich dir, daß es bei der Formung des Menschen nicht vor allem darauf ankommt, ihn zu belehren, denn es ist sinnlos, wenn er nur noch ein Buch auf zwei Beinen ist, sondern ihn zu erheben und ihn auf die Stufen hinaufzuführen, in denen es nicht mehr Dinge gibt, sondern Gesichter, die aus dem göttlichen Knoten hervorgingen, welcher die Dinge verknüpft.“
(Antoine de Saint-Exupery, Die Stadt in der Wueste, Citadelle)

1 Einleitende Worte

„Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.“

(Galileo Galilei)

Die Wissenschaft der Mathematik begeistert und begleitet die Menschheit bereits seit Anbeginn der Zeit. Wie bereits Galileo Galilei gesagt hat, ist die Mathematik das Alphabet unseres Universums und wird als Wissenschaft bezeichnet, die logische Abläufe sowie auch Muster und abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften untersucht. Viele bekannte Persönlichkeiten widmeten der Mathematik und Wissenschaft etliche Jahre und bewiesen und erforschten damit undenkbar viele logische Abläufe und Strukturen. Pierre de Fermat entdeckte und erforschte im 17. Jahrhundert Quadratzahlen während Newton und Leibnitz sich Ende des 17. Jahrhunderts Methoden aneigneten, um mit dem unendlich Kleinen umzugehen. (Springer)

Die Faszination der Unendlichkeit geht zurück bis in die Antike, die Theorie dazu lieferte Georg Cantor im 19. Jahrhundert. Carl Friedrich Gauß, Blaise Pascal, Leonhard Euler, bis hin zu Euklid und Archimedes und noch unzählige Mathematiker mehr trugen einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung und Erforschung der Wissenschaft bei. Doch nicht nur historisch gesehen zieht sich die Wissenschaft der Mathematik bereits durch die gesamte Geschichte der Menschheit, sondern findet sie auch heute im Alltag überall seine Anwendung. Man denke nur an die vier Grundrechnungsarten Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Auch ist es von Vorteil die Prozentrechnung sowie das Bruchrechnen zu beherrschen. Dies sind nur einige kleine Beispiele dafür, warum die Mathematik im schulischen Lehrplan eine sehr große Rolle einnimmt. Von der Grundschule über die Mittelschule bis hin zur Matura, sowie Polytechnische Schulen und Berufsschulen - in jedem Schultyp hat Mathematik als Schulfach den Einzug gewonnen.

1 Einleitende Worte

Die Herausforderung im Mathematikunterricht besteht darin die Theorie mit der Praxis zu verbinden und im Unterricht folgende Handlungsbereiche laut dem österreichischen Bundesinstitut für Bildungsforschung abzudecken:

- Darstellen, Modellbilden
- Rechnen, Operieren
- Interpretieren
- Argumentieren, Begründen

Inhaltlich werden vom österreichischen Bundesinstitut für Bildungsforschung unter Bedachtnahme des Lehrplans jeder Schulstufe mathematische Themen festgelegt und zu folgenden Inhaltsbereichen zusammengefasst:

- Zahlen und Maße
- Variable, funktionale Abhängigkeit
- Geometrische Figuren und Körper
- Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Im Laufe der gesamten Schulzeit lernen Schüler und Schülerinnen viele relevante mathematische Inhalte, Theorien, Abläufe und Eigenschaften kennen und lernen, damit zu rechnen bzw. zu operieren, diese zu interpretieren, diese darzustellen und diese zu begründen. Nun stellt sich hier die Frage inwieweit sich die Knotentheorie als Teilgebiet der Mathematik in den österreichischen Lehrplan eingliedern lässt und wie man die Knotentheorie in der Schule unterrichten könnte. Im Laufe dieser Arbeit werde ich diese Fragestellung überprüfen, indem ich die Grundlagen der Knotentheorie genauer erläutern werde und Beispiele dafür geben werde, wie die Knotentheorie im Unterricht eingebaut werden könnte.

2 Geschichte der Knotentheorie

Der Begriff des Knotens geht in der Geschichte der Menschheit weit zurück. Bereits aus der Steinzeit konnten archäologische Funde gemacht werden, in denen man verdrehte Schnüre entdecken konnte. Später als der Mensch sesshaft wurde entwickelte er Knüpf- und Webtechniken, die vor allem für Textilien und Seile genutzt wurden. Auch in der Seefahrt war der Knoten ein wichtiges Element. Des Weiteren fand der Knoten in der Medizin etwas später seinen Einzug. Dort wurden Wunden mit speziellen Verschlingungstechniken verbunden. Selbst Künstler entdeckten den Knoten für sich und bauten vor allem symmetrische Knotenmuster oftmals in Ornamente ein. (Epple und Moritz 1998, S. 35-37)

Bei der Knotentheorie als Teilgebiet der Mathematik handelt es sich um ein recht modernes Teilgebiet der Mathematik. Die Geschichte der Knotentheorie führt uns zurück ins 18. Jahrhundert, wo die Knotentheorie das erste Mal konkret in einem Aufsatz erwähnt wurde. Der Aufsatz wurde vom Mathematiker Alexandre-Théophile Vandermonde im Jahre 1771 verfasst. Alexandre-Théophile Vandermonde befasste sich mit dem Bewegungsspielraum der Figur des Springers auf dem Schachbrett und mit Überschneidungen von Kurven, die durch die Bewegungen der Spielfigur entstehen. Nachdem Vandermonde den Begriff des Knotens in seinem Aufsatz erwähnte, entwickelte Carl Friedrich Gauß im Jahre 1833 bereits Ansätze zu einer Theorie der Knoten mit der noch heute bekannten *Verschlingungszahl*. Die *Verschlingungszahl* wird für die Anzahl der Windungen von Kurven umeinander benötigt. Gauß definierte jedoch nicht nur die *Verschlingungszahl*, sondern erforschte auch die Unterscheidung von Knoten. Damit war es Carl Friedrich Gauß, der der Knotentheorie ihren Namen verlieh. Als eigentlicher Begründer und Vater der Knotentheorie gilt jedoch Sir William Thomson. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 56)

Bei Sir William Thomson, der zum Baron Kelvin von Largs ernannt wurde, handelte es sich um einen anerkannten Wissenschaftler und Physiker. Thomson veröffentlichte nicht nur 667 wissenschaftliche Dokumente, sondern definierte auch die Temperaturskala Kelvin und arbeitete im Bereich der Thermodynamik. (Klassen et al., S. 1) Der Physiker bezeichnete in seinen Arbeiten Atome als stabile, verknotete Ätherwirbel und stellte die weitere Hypothese auf, dass chemische Elemente auf unterschiedliche Formen von Knoten beruhen. Dabei baute

er auf die *Arbeit über Wirbelbewegung* (1858) von Helmholtz auf. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 56) Mit seiner Atomtheorie deutete er an, dass man durch das Verständnis von Knoten Einsicht in die Wissenschaft der Chemie gewinne, da es laut Thomson Zusammenhänge zwischen den chemischen Eigenschaften der Elemente und den Verknötungen zwischen Atomen gäbe. (Livingston 1995, S.1) Nun regte sich auch das Interesse an der Knotentheorie beim schottischen Physiker Peter Guthrie Tait. Dieser stellte systematische Untersuchungen von Knoten an und klassifizierte die Knoten anhand der Anzahl ihrer Kreuzungen. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 57) Tait etablierte eine Liste aller Knoten, die mit einer kleinen Anzahl an Kreuzungen gezeichnet werden können. Gemeinsam mit dem Mathematiker C.N. Little schaffte er es um 1900 fast die Aufzählung von Knoten mit bis zu zehn Kreuzungen zu vollenden. Damit in seiner Liste keine gleichen Knoten doppelt vorkamen, bezeichnete er zwei Knoten als äquivalent, sofern es möglich war den einen Knoten so zu verformen, sodass dieser die gleiche Gestalt annahm wie der andere bzw. gleich aussah wie der andere. Somit lässt sich erkennen, dass Tait versuchte eine Liste zu erstellen, die jeden Typ von Knoten nur einmal enthielt. (Die Liste der Knoten nach Tait findet man im Anhang dieser Arbeit.) Dies stellt sich jedoch als herausfordernde Aufgabe heraus. An folgendem Beispiel wird die Schwierigkeit der Erstellung der Liste von Tait veranschaulicht.

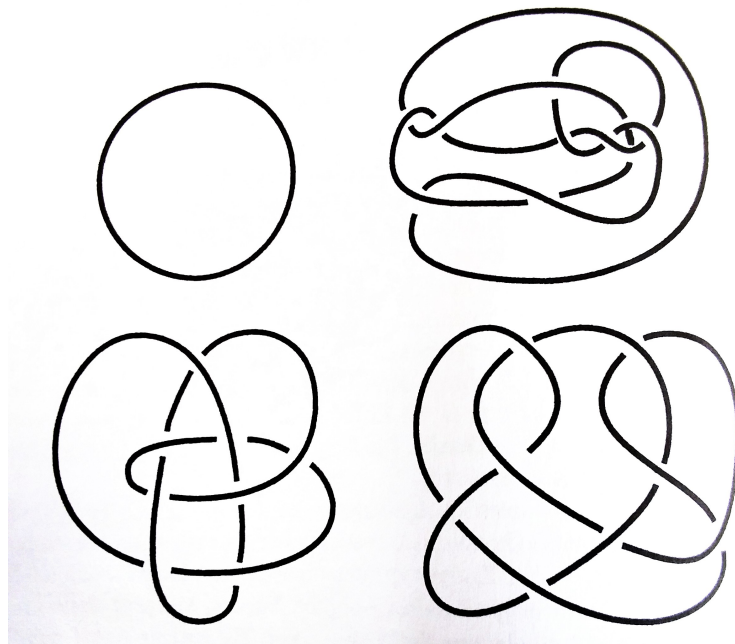


Abbildung 1: Schwierigkeit bei Auflistung von Knoten nach Tait (Livingston 1995, S.2)

2 Geschichte der Knotentheorie

In der oben angeführten Abbildung 1 ist veranschaulicht, dass sich der Knoten im Bild rechts oben in den Knoten links oben überführen lässt. Das heißt, der Knoten rechts oben kann so umgeformt werden, dass eine einfache Schleife entsteht. Jedoch lassen sich die Knoten rechts und links unten, auch nicht mit einem noch so großen Aufwand, in den Knoten links oben, also in eine einfache Schleife, überführen. Dies verdeutlicht anschaulich die Schwierigkeiten mit denen Tait bei der Erstellung der Liste zu tun hatte. Die Entwirrung bzw. das Überführen eines Knotens in einen anderen erfordert Hilfsmittel des mathematischen Formalismus, die zu Zeiten von Tait noch nicht gegeben waren. Also waren die Nachweise, dass die Liste der Knoten vollständig war empirischer Art. (Livingston 1995, S.1) Somit wurden um 1900 mathematische Methoden entwickelt, die es ermöglichten, Elemente der Knotentheorie zu definieren und dazugehörige Sätze zu beweisen. Dazu war die Verknüpfung der Algebra mit der Knotentheorie ein ausschlaggebender Schritt in der Entwicklung der Knotentheorie. Im Jahre 1914 schaffte es M. Dehn zu beweisen, dass die zwei Knoten in Abbildung 2 zwei verschiedene Knoten sind. Das heißt beide Knoten stellen zwei Vertreter verschiedener Knotentypen dar und es lässt sich der eine Knoten nicht in den anderen überführen bzw. kann einer der Knoten nicht so umgeformt werden, sodass der andere entsteht.

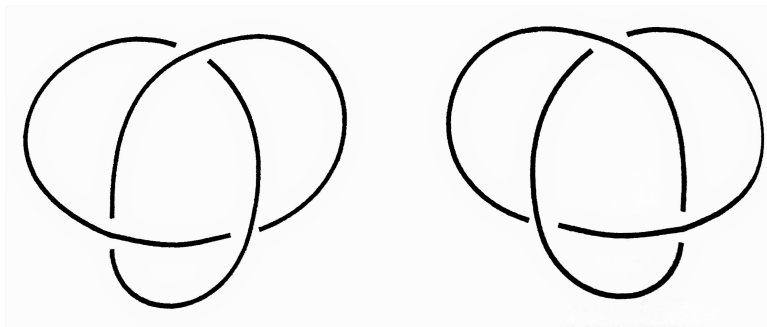


Abbildung 2: Beispiel für zwei verschiedene Knotentypen (Livingston 1995, S.2)

Durch diesen Beweis ließ sich nun erstmals die Algebra mit der Knotentheorie verknüpfen und es gab somit algebraische Hilfsmittel, mit denen man überprüfen konnte, ob es sich bei zwei Knoten unterschiedlicher Form um denselben Knotentyp handelte. Doch es stellte sich immer noch die Frage, ob es sich bei der Liste von Tait um eine vollständige Auflistung aller Knoten handle und ob keine Knoten doppelt vorkamen. Also etablierte James W. Alexander im Jahre 1928 ein weiteres Werkzeug, indem er jedem Knoten ein Polynom zuordnete. Es handelt sich dabei um die heute unter dem Namen bekannten *Alexander – Polynome*. Zwei Knoten vom selben Knotentyp werden auf dasselbe Polynom abgebildet, somit kann klar unterschieden werden, welche Knoten zum selben Knotentyp gehören

und welche nicht. In den Arbeiten von James W. Alexander bemerkt man, dass seine Berechnungen und Beweise auf Untersuchungen des Diagramms eines Knotens beruhen, jedoch ohne Hinzunahme der Algebra.

Der nächste wichtige Schritt in der Etablierung der Knotentheorie war das Werk *Knotentheorie*, das Kurt Reidemeister, ein deutscher Mathematiker und Professor an der Universität Wien, um ca. 1932 veröffentlichte. Dieses Buch beinhaltet sehr viele interessante theoretische Werkzeuge, mit denen es möglich war, fast jedes Paar von Knoten zu unterscheiden, jedoch handelt es sich um sehr schwierige und vor allem langwierige Berechnungen, die sich als unpraktisch herausstellten. (S.3)

Das Interesse an der Knotentheorie verbreitete sich immer weiter und viele Knotentheoretiker, Wissenschaftler und Mathematiker erforschten das Gebiet weiter und erkannten immer mehr ausschlaggebende Zusammenhänge. Sowie auch H. Schubert, der 1947 geometrische Methoden verwendete, um Beweise über die Zerlegung von Knoten zu erstellen. Nun war somit auch der Zusammenhang zwischen der Geometrie und der Knotentheorie geschaffen, jedoch fehlten immer noch praktische Methoden zur Untersuchung von Knoten. (S.5)

Erst ab dem Jahr 1970 erlebte die Knotentheorie einen regelrechten Aufschwung, da sie sich ab diesem Zeitpunkt mit enormer Geschwindigkeit weiterentwickelte. Nun wurden weitgehend interessante algebraische, sowie auch geometrische Methoden eingeführt, und schließlich lösten die zwei Mathematiker Cameron McAllen Gordon und John Edwin Luecke im Jahre 1988 ein grundlegendes Problem des Gebietes. Die zwei Mathematiker schafften es zu beweisen, dass Knoten mit äquivalenten Komplementen selbst äquivalent sind.

Es lässt sich also erkennen, dass obwohl der Begriff des Knotens weit in der Geschichte zurück liegt, die Knotentheorie erst in den letzten Jahren als Teilgebiet der Mathematik entdeckt und weiterentwickelt wurde. Da es sich immer noch um ein Gebiet handelt, das noch nicht komplett erforscht ist und sich somit stets weiterentwickelt, bleiben noch immer einige Fragen ungeklärt und offen, jedoch sind die Resultate der bisherigen Forschungen vielversprechend und liefern eine sehr gute Einsicht in das Gebiet. (S.7)

3 Grundlagen der Knotentheorie

Für das Verständnis der Knotentheorie werden vorweg einige Grundbegriffe benötigt. Im folgenden Kapitel werden wir zuerst einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften mathematischer Knoten kennenlernen. Wir werden uns außerdem mit *Deformationen* von Knoten befassen und definieren, wann zwei Knoten als *äquivalent* oder gleich gelten. Als nächstes werden wir Knoten in der Ebene betrachten und der Begriff der *Orientierung* eines Knotens wird definiert, da wir all diese Begrifflichkeiten für das Verständnis der Knotentheorie benötigen.

3.1 Definition eines Knotens

Vorerst stellt sich die Frage was man in der Mathematik als Knoten versteht. Da der Begriff des Knotens umgangssprachlich häufig verwendet wird, ist es wichtig darauf zu achten, dass die Definition eines Knotens im mathematischen Sinne richtig verstanden wird. Um einen mathematischen Knoten vereinfacht zu erklären, nehme man sich eine Schnur und verschlinge diese nach Belieben. Anschließend füge man die beiden Endpunkte der Schnur so zusammen, dass nicht mehr zu erkennen ist, dass die Schnur an dieser Stelle vorher unterbrochen war. Stelle man sich nun die Schnur unendlich dünn vor, so haben wir nun einen Knoten im mathematischen Sinne erklärt. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 59)

Wenn man nach Definitionen von Knoten sucht, stößt man auf viele Definitionen, wobei nicht alle Definitionen für das Rechnen mit Knoten geeignet sind. Es gilt also einen Knoten so zu definieren, dass mathematisch korrekt damit umgegangen werden kann, und dass Berechnungen korrekt ausgeführt werden können. Wenn man sich einen Knoten vorstellt, würde man annehmen, dass es von Vorteil wäre einen Knoten als Kurve im dreidimensionalen Raum zu betrachten. Hier tritt allerdings das Problem auf, dass eine unendlich oft verknotete Schlinge auch in Betracht gezogen werden müsste. Betrachten wir dazu als Beispiel den *Wilden Knoten*. Einen *wilden Knoten* erhält man durch unendliche Knotenprozesse, wie in Abbildung 3 genauer ersichtlich ist. Solch ein Knoten wäre zugelassen. Allerdings muss ausgeschlossen werden, dass man Knoten als Kurven im \mathbb{R}^3 definiert, da sie weit von der Intuition eines Knotens und von physikalischen Verknotungen entfernt liegen.

Daher wählen wir für den weiteren Verlauf eine Definition von Knoten, die Knoten als Polygonzüge definiert und somit Knoten, wie zum Beispiel den *wilden Knoten* ausschließen. (Livingston 1995, S.11-12)

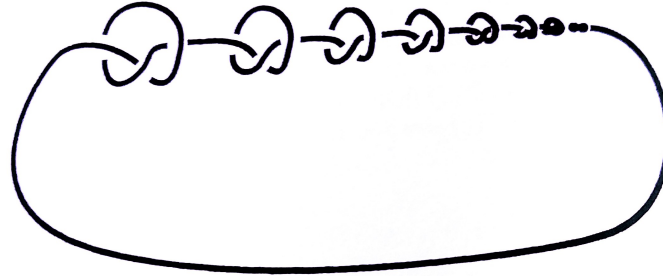


Abbildung 3: Wilder Knoten (Livingston 1995, S.12)

Livingston (1995, S.14) definiert Knoten als eine geschlossene Kurve, die man durch „Verbinden“ von Punkten erhält. Seine Definition entspricht also einer Definition von Knoten als Polygonzügen und schließt somit unendlich verknottete Schlingen aus.

Definition 3.1.1

Zu je zwei Punkten p und q im dreidimensionalen Raum sei $[p, q]$ die Strecke, die die beiden Punkte verbindet. Es sei weiters (p_1, \dots, p_n) eine geordnete Menge voneinander verschiedener Punkte. Dann nennt man die Vereinigung aller Strecken $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ einen geschlossenen Polygonzug. Wenn jede der Strecken genau zwei andere Strecken schneidet, und zwar jede an einem Endpunkt, dann nennt man die Kurve *einfach*. (S.14)

Definition 3.1.2

Ein *Knoten* ist ein *einfacher geschlossener Polygonzug* im dreidimensionalen Raum.

In folgender Abbildung sieht man den Kleeblattknoten zur Verdeutlichung der Definition eines Knotens als Polygonzug.

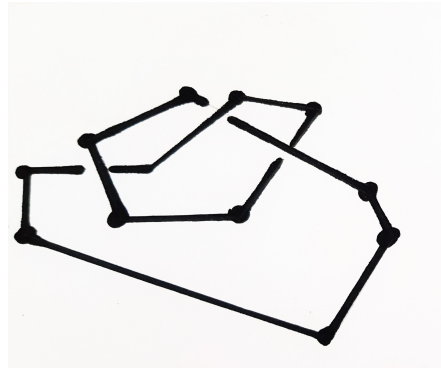


Abbildung 4: Kleeblattknoten als Polygonzug

Definition 3.1.3

Ein durch drei nicht kollineare Punkte festgelegter Knoten wird als *Unknoten* oder *trivialer Knoten* bezeichnet.



Abbildung 5: Unknoten

In weiterer Folge werden die Knoten nicht immer als Polygonzüge dargestellt, sondern oftmals als Kurven, wobei intuitiv klar ist, dass eine Kurve durch Polygonzüge mit einer sehr hohen Anzahl an Strecken, sehr gut approximiert werden kann.

3.2 Äquivalenz und Deformation von Knoten

Wie bereits im ersten Kapitel erklärt, gab es immer wieder das Problem zu erkennen beziehungsweise zu berechnen, wann zwei Knoten als äquivalent galten, beziehungsweise stellte man sich die Frage, ob man einen Knoten so deformieren kann, sodass ein anderer entsteht. Vom selben Knoten gibt es viele verschiedene Bilder. Als Beispiel führen wir hier den Achterknoten in drei verschiedenen Projektionen an.

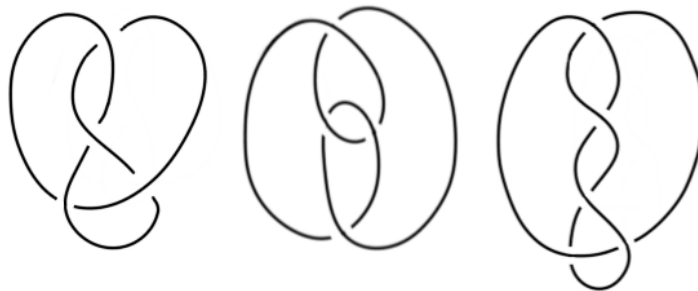


Abbildung 6: Achterknoten in drei Projektionen (angelehnt an Adams 1995, S.15)

Der Achterknoten ist ein Knoten mit vier Kreuzungen, da es von ihm eine Projektion mit vier Kreuzungen gibt und keine mit weniger als vier Kreuzungen. Sieht man sich die Bilder der Knoten an, so würde man meinen, es wären unterschiedliche Knoten, obwohl jede dieser Projektionen denselben Knoten darstellt - nämlich den Achterknoten. (Adams 1995, S.15)

Nun geht es darum zu verstehen, wann zwei Knoten im mathematischen Sinne als äquivalent gelten. Stelle man sich vor, man habe zwei auf den ersten Blick unterschiedliche Knoten vor sich liegen. Wenn wir nun die Schnurstücke eines Knotens in ihrer Lage so verändern können, dass die Erscheinung des Knotens in die des anderen übergeht, ohne dabei eine Schere zu verwenden, dann sind diese beiden Knoten zueinander äquivalent. Zusammengefasst gesagt, sind zwei Knoten äquivalent, genau dann, wenn sich ein Knoten durch Deformieren in den anderen umformen lässt. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 59)

Definition 3.2.1

Ein Knoten J wird als *elementare Deformation* des Knotens K bezeichnet, falls einer der beiden Knoten durch eine Folge von Punkten (p_1, \dots, p_n) , der andere durch die Folge (p_0, p_1, \dots, p_n) bestimmt ist, wobei

- der Punkt p_0 nicht kollinear mit p_1 und p_n ist, und
- das von (p_0, p_1, p_n) aufgespannte Dreieck den durch (p_1, \dots, p_n) bestimmten Knoten nur in der Strecke $[p_1, p_n]$ schneidet.

Definition 3.2.2

Zwei Knoten K und J nennt man äquivalent, wenn es eine Folge von Knoten $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$ gibt, so dass K_i für jedes $i > 0$ eine elementare Deformation von K_{i-1} ist. (Livingston 1995, S.16-17)

Der Äquivalenzbegriff, der in Definition 3.2.2 verwendet wird, besitzt die definierende Eigenschaft einer Äquivalenzrelation, also die der Symmetrie, Transitivität und Reflexivität, die hier alle erfüllt sind. Somit meinen wir, wenn wir davon sprechen, dass zwei Knoten verschieden sind, dass sie in zwei unterschiedlichen Äquivalenzklassen liegen. Möchte man zeigen, dass ein Knoten nicht trivial ist, reicht es zu zeigen, dass er nicht in derselben Äquivalenzklasse liegt, wie ein trivialer Knoten. (Livingston 1995, S.18)

Beweis 3.2.1

- **Reflexivität:** Jeder Knoten J ist immer zu sich selbst äquivalent. Man kann immer durch eine Modifikation eine elementare Deformation K_1 von K finden. Dann ist auch K eine elementare Deformation von K_1 und für die Folge $K = K_0, K_1, K_2 = K$ gilt, dass K_i für $i = 1, 2$ eine elementare Deformation von K_{i-1} ist.
- **Symmetrie:** Wenn ein Knoten K zu einem Knoten J äquivalent ist, was so viel bedeutet, wie es gibt eine Folge von Knoten $K = K_0, K_1, K_2, \dots, K_n = J$, so dass K_i für $1 \leq i \leq n$ eine elementare Deformation von K_{i-1} ist, so ist J zu K äquivalent. Es gilt, dass wenn K_i eine elementare Deformation von K_{i-1} ist, dann ist auch K_{i-1} eine elementare Deformation von K_i . Für die Folge $J = J_0, J_1, \dots, J_n = K$ von Knoten mit $J_k := K_{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, gilt also, dass $J_i = K_{n-i}$ für alle $1 \leq i \leq n$ eine elementare Deformation von $J_{i-1} = K_{n-i+1}$ ist.

- **Transitivität:** Wenn ein Knoten K zu einem Knoten J äquivalent ist, das heißt gibt es eine Folge von Knoten $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$, so dass K_i für jedes $1 \leq i \leq n$ eine elementare Deformation von K_{i-1} ist, und ist weiteres J zu einem Knoten L äquivalent, was bedeutet es gibt eine Folge von Knoten $J = J_0, J_1, \dots, J_n = L$, so dass J_i für jedes $1 \leq i \leq n$ eine elementare Deformation von J_{i-1} ist, so ist auch K zu L äquivalent, da die Folge $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J = J_0, J_1, \dots, J_n = L$ die Bedingung erfüllt, dass jeder in ihr vorkommende Knoten eine elementare Deformation des vorangegangenen ist. (Veyhelmann 2011, S.10-11)

Abschließend noch ein Beispiel für eine legitime und eine nicht zugelassene Deformation eines Knotens.

Beispiel 3.2.1

Die Abbildung 7 zeigt eine legitime Deformation wobei man hingegen in Abbildung 8 ein Bild sieht, das eine nicht zugelassene Deformation darstellt.

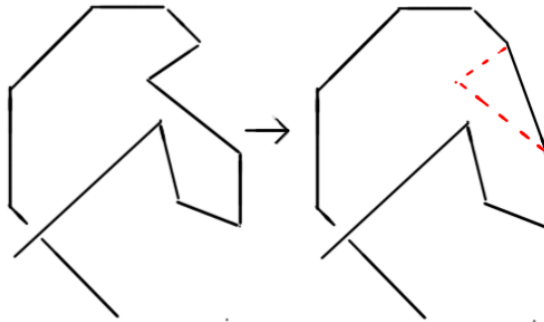


Abbildung 7: Legitime Deformation

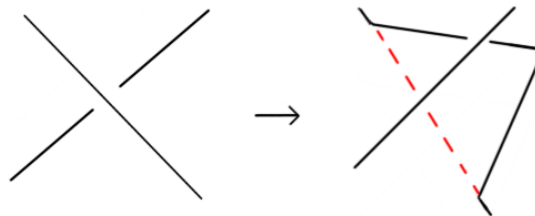


Abbildung 8: Nicht zugelassene Deformation

Bemerkung 3.2.1

Es ist zusammenfassend also wichtig, dass man zwischen einem mathematischen Knoten und einem umgangssprachlich verwendeten Knoten genau unterscheidet. Anhand der Definitionen 3.1.1 und 3.1.2 können wir nun erkennen, dass ein mathematischer Knoten also immer geschlossen ist. Das heißt, der Knoten besitzt kein Ende und keinen Anfang. Durch die Definition 3.1.3 lässt sich nun erkennen, dass ein mathematischer Knoten beliebig dehn- und zusammenziehbar ist, was wiederum eine Eigenschaft eines mathematischen Knotens ist. Als dritter und letzter Punkt gilt für einen mathematischen Knoten, dass er keine Dicke besitzt, das heißt, dass der Knoten unendlich dünn ist.

3.3 Darstellung von Knoten in der Ebene

Im mathematischen Sinne haben wir den Knoten als dreidimensional, das heißt als Teilmenge des Raumes definiert. Trotzdem arbeitet man mit Knoten meist in der Ebene, dies ist möglich, indem man mit Projektionen arbeitet. Dazu werden wir nun die Begriffe *Knotendiagramm* und *Projektionen von Knoten* genauer definieren und betrachten. Vereinfacht gesagt wird einem Tripel (x, y, z) im Raum ein Paar in der Ebene (x, y) zugeordnet, dies nennt man *Projektionsabbildung*. Das Bild eines Knotens wird dann als *Projektion* dieses Knotens bezeichnet. Da Projektionen nicht mehr umkehrbar sind, das heißt, dass sich aus einer Projektion das genaue Urbild nicht mehr bestimmen lässt, muss bei der Erstellung einer Projektion folgendes beachtet werden: Sobald die Kurve auf der Ebene projiziert ist, lässt man Lücken in den Zeichnungen der Projektion, um anzumerken, welche Teile des Knotens durch einen anderen Teil hindurchlaufen. Eine solche Zeichnung wird als *Knotendiagramm* bezeichnet.

Definition 3.3.1

Eine Knotenprojektion heißt *reguläre Projektion*, sofern nie drei Punkte des Knotens auf denselben Punkt projiziert werden und kein Eckpunkt auf denselben Punkt projiziert wird, wie irgendein anderer Punkt des Knotens.

Wenn man mit Knotendiagrammen arbeitet, so werden die Punkte im Diagramm, die den doppelten Punkten in der Projektion entsprechen, als *Kreuzungen* oder *Kreuzungspunkte* bezeichnet. Die Zweige des Knotens, die über einem Kreuzungspunkt liegen nennt man *Überführung* oder *Überkreuzung*. Die Zweige des Knotens, die unterhalb eines Kreuzungspunktes liegen nennt man *Unterführung* oder *Unterkreuzung*.

Nun noch ein Satz, der Knotendiagramme und Knoten miteinander in Beziehung setzt und somit die Wichtigkeit der Knotendiagramme zeigt.

Satz 3.3.1

Besitzen zwei Knoten K und J reguläre Projektionen und identische Diagramme, so sind sie *äquivalent*. (Livingston 1995, S.19-22)

3.4 Orientierung eines Knotens

Wie der Name des Kapitels bereits verrät, können Knoten orientiert werden. Dabei wird an einer Stelle eine Durchlaufrichtung gewählt, in der dann der gesamte Knoten durchlaufen wird. Für die Definition der Orientierung des Knotens benötigen wir vorab die Definition der Eckpunkte von Knoten.

Definition 3.4.1

Wenn die geordnete Menge (p_1, \dots, p_n) einen Knoten definiert und es aber keine echte geordnete Teilmenge gibt, die denselben Knoten definiert, so heißen die Elemente der Menge $\{p_i\}$ Eckpunkte des Knotens. (Livingston 1995, S.15)

Definition 3.4.2

Ein *orientierter Knoten* besteht aus einem Knoten und einer Anordnung seiner Eckpunkte. Die Anordnung muss dabei so gewählt werden, dass sie den ursprünglichen Knoten definiert. Man bezeichnet dann zwei Anordnungen als *äquivalent*, wenn sie sich nur um eine zyklische Permutation unterscheiden. (S.23)

Die Orientierung von Knoten wird meist anhand von Pfeilen in ihrem Diagramm angegeben. Man unterscheidet dann in *rechtshändigen* Kreuzungen und *linkshändigen* Kreuzungen.

In der Abbildung 9 sieht man eine rechtshändige Kreuzung (blau) und eine linkshändige Kreuzung (grün).

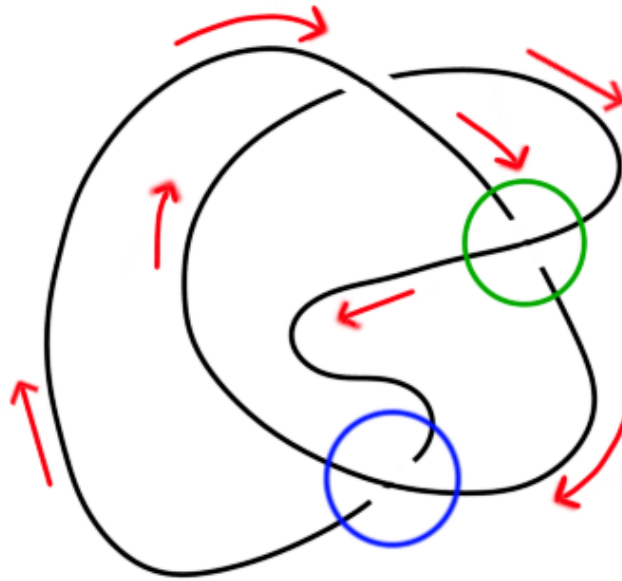


Abbildung 9: Orientierung von Knoten

Durch die Definition der Äquivalenz von Knoten und der der Orientierung von Knoten, können nun auch *orientiert äquivalente* Knoten definiert werden.

Definition 3.4.3

Zwei orientierte Knoten heißen *orientiert äquivalent*, wenn es eine Folge von elementaren Deformationen gibt, die den einen orientierten Knoten in den anderen überführen. (Livingston 1995, S.24)

Beispiel 3.4.1 (Unknoten)

Betrachten wir als Beispiel für den Unknoten die Kreislinie $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Jeder zur Kreislinie $c(t)$ äquivalent orientierter Knoten heißt *Unknoten*.

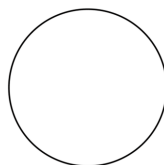


Abbildung 10: Kreis

Folgender Knoten ist auch ein Unknoten:

Denn es gilt:



Abbildung 11: Beispiel für Unknoten

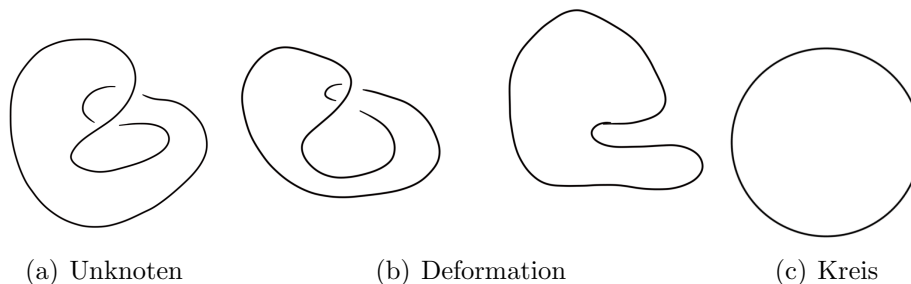


Abbildung 12: Beispiel für Deformation bis Unknoten

Bei der Unterscheidung zwischen Äquivalenz und der orientierten Äquivalenz von Knoten handelt es sich um eines der schwierigsten Probleme in der Knotentheorie, da aus äquivalent nicht immer orientiert äquivalent folgt. Das bedeutet zwei orientierte Knoten, die äquivalent sind, müssen nicht immer orientiert äquivalent sein. Dies zeigte H. Trotter bereits im Jahre 1963 für das Beispiel des Brezelknotens. (Livingston 1995, S.24)

Bemerkung 3.4.1

Trotz diesen sehr aufschlussreichen Definitionen für Knoten gibt es immer noch die Schwierigkeit zu entscheiden, ob zwei Knoten zueinander äquivalent sind oder nicht. Stelle man sich vor, man nehme eine Schnur ohne Ende und Anfang und spiele mit dieser Schnur einige Zeit herum, bis man es schafft die Schnur zu entwirren. Somit hat man die Gewissheit, dass es sich um einen Unknoten handelt. Was wäre aber, wenn man es probiert den Knoten zu entwirren und es nach drei Wochen immer noch nicht geschafft hat? Es könnte dann immer noch sein, dass es sich bei diesem Knoten um einen Unknoten handelt, hätte man sich vielleicht 10 Minuten länger damit beschäftigt, so hätte man es vielleicht geschafft den Knoten zu entwirren. Dies verdeutlicht, dass dieses Experiment also kein Ende zu nehmen scheint.

Doch veröffentlichte Wolfgang Haken bereits im Jahre 1961 ein Verfahren, das darüber entscheidet, ob es sich bei einem Knoten um einen Unknoten handelt. Jedoch handelt es sich dabei nicht um ein einfaches Verfahren, sondern man

würde dafür einen Computer benötigen, wo es möglich wäre die Knotenprojektion einzugeben. Anschließend würde der Computer den Algorithmus ausführen und am Ende mitteilen, ob es sich bei dem eingegebenen Knoten um einen Unknoten handelt. Trotzdem, dass der Algorithmus von Wolfgang Haken bereits seit 1961 bekannt ist, ist es noch immer nicht gelungen ein Computerprogramm zu entwickeln, mit dem man den Algorithmus ausführen könnte, da dieser zu kompliziert ist. Es handelt sich bei der Knotentheorie also um ein Gebiet, wo noch viele spannende Fragen offen sind. (Adams 1995, S.16)

3.5 Zusammengesetzte Knoten

Hat man zwei Projektionen von Knoten gegeben, so ist es möglich aus den beiden Projektionen einen neuen Knoten zu bilden. Dabei schneidet man einen kleinen Bogen aus beiden Projektionen heraus und verbindet die vier gerade entstandenen Eckpunkte mit zwei neuen Bögen - daraus entsteht ein neuer Knoten. Dies wird *Zusammensetzung* beider Knoten oder *zusammenhängende Summe* genannt.

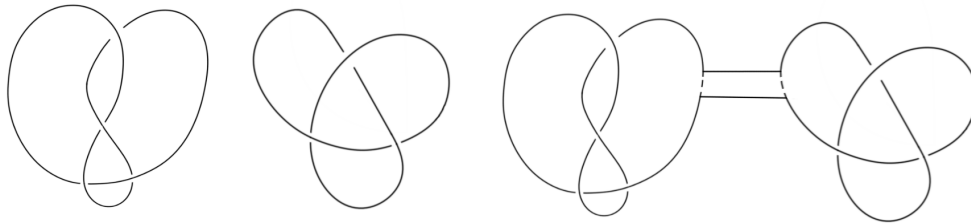


Abbildung 13: Zusammensetzung von zwei Knoten (angelehnt an Adams 1995, S.20)

Beim Verbinden der beiden Projektionen der Knoten gilt Folgendes zu beachten: Man nehme an, die beiden Projektionen überlappen sich nicht. Um Überkreuzungen zu vermeiden, werden die beiden Bögen, die rausgeschnitten werden so gewählt, dass sie an den Außenseiten der jeweiligen Projektion liegen. Anschließend werden die beiden neuen Bögen so konstruiert, dass sie einander nicht kreuzen und, dass sie auch die ursprüngliche Knotenprojektion nicht kreuzen. So wie auch in Abbildung 13 oben dargestellt.

Sofern also zwei nicht äquivalente Knoten als zusammenhängende Summe dargestellt werden können, nennt man den neu entstandenen Knoten *zusammengesetzt*. Die beiden Knoten, aus denen der zusammengesetzte Knoten entstanden ist, werden als *Faktorknoten* bezeichnet. Zu beachten gilt jedoch, dass die Zusammensetzung eines Knotens mit dem Unknoten wieder denselben Knoten ergibt. Das bedeutet zum Beispiel, dass die Zusammensetzung eines Kleeblattknotens mit dem Unknoten wieder den Kleeblattknoten ergibt. Dies kann man vergleichen mit der Addition einer ganzen Zahl und Null. Addiert man zu einer ganzen Zahl die Zahl Null, so erhält man wieder dieselbe ganze Zahl.

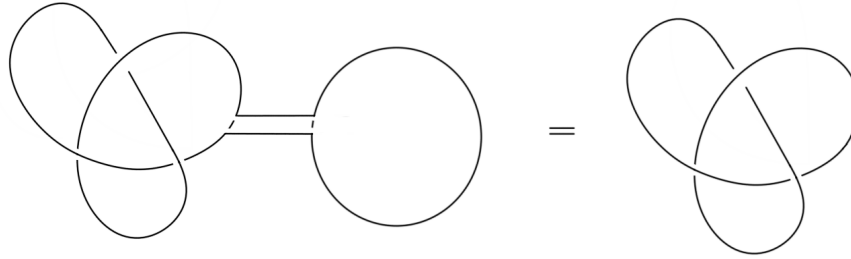


Abbildung 14: Zusammensetzung von einem Knoten mit dem Unknoten (angelehnt an Adams 1995, S.21)

Wenn man einen Knoten gegeben hat, der nicht die Zusammensetzung zweier Knoten ist die nicht äquivalent sind, so spricht man von einem *Primknoten*. Ein geeignetes Beispiel dafür ist wieder der bereits bekannte Kleeblattknoten. Auch dies ist wieder ein komplexer Bestandteil der Knotentheorie, da es nicht immer ersichtlich ist, ob es sich bei einem Knoten um einen *Primknoten* handelt oder nicht. Wenn man den Kleeblattknoten oder beispielsweise auch den Achterknoten betrachtet, so ist ziemlich schnell ersichtlich, dass es sich dabei um *Primknoten* handelt. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Betrachtet man den Knoten in Abbildung 15 so ist es sehr schwierig mit bloßem Auge zu erkennen, ob es sich dabei um einen *Primknoten* oder um einen *zusammengesetzten Knoten* handelt.

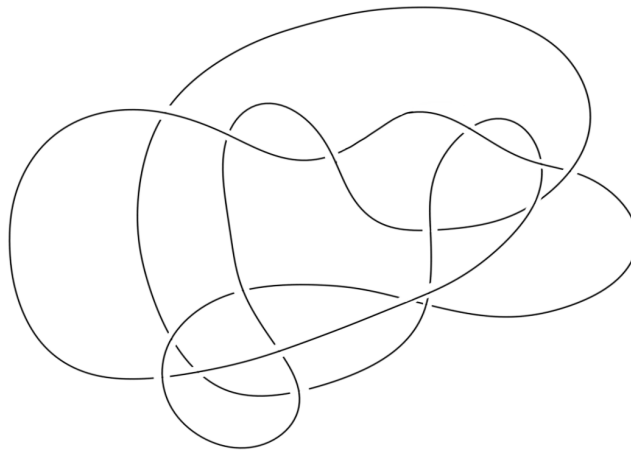


Abbildung 15: Primknoten oder zusammengesetzter Knoten? (angelehnt an Adams 1995, S.21)

Somit haben wir es auch hier mit einer Fragestellung der Knotentheorie zu tun, die sehr schwierig und nur mit komplexen Vorgängen lösbar ist. (Adams 1995, S.20-21)

4 Kombinatorische Techniken

4.1 Reidemeister-Bewegungen

Die *Reidemeister – Bewegungen* gehen, wie der Name bereits sagt, auf den deutschen Mathematiker Kurt Reidemeister zurück. Im Jahre 1932 veröffentlichte er sein Buch *Knotentheorie*, indem er einige interessante und wichtige Ergebnisse seiner Forschung über Knoten verschriftlichte. Sein Buch besteht aus vier Kapiteln, in denen er die Beziehung zwischen Knoten und Matrizen, zwischen Knoten und Gruppen und zwischen Knoten und ihren Projektionen beschreibt.

Unter anderem definiert er in seinem Buch auch die *Reidemeister – Bewegungen*, bei denen es um die Deformation eines Knotens geht, bzw. beschreibt er mit welchen Schritten man einen Knoten in einen anderen überführen kann. Reidemeister überlegte sich vorab wie viele verschiedene Deformierungsschritte überhaupt möglich waren. Dabei fand er heraus, dass sich die Knotendiagramme von zwei äquivalenten Knoten mit nur drei Arten von Schritten ineinander überführen lassen. Diese drei Arten von Schritten nannte er *Reidemeister – Bewegungen*, die wir im Folgenden genauer betrachten werden. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 59)

Reidemeister-Bewegungen

1. Ent-/Verdrillung (Typ 1)

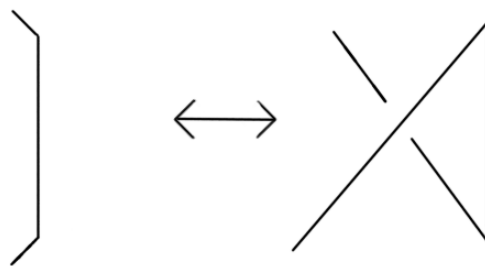


Abbildung 16: Reidemeister-Bewegung vom Typ 1

Bei der Reidemeister-Bewegung vom Typ 1 wird dem Knoten eine Schleife hinzugefügt oder eine aus ihm herausgenommen. Es wird vorausgesetzt, dass das Knotendiagramm bzw. die Projektion bis auf die im Bild dargestellte Änderung unverändert bleibt.

2. Ent-/Verhäkelung (Typ 2)

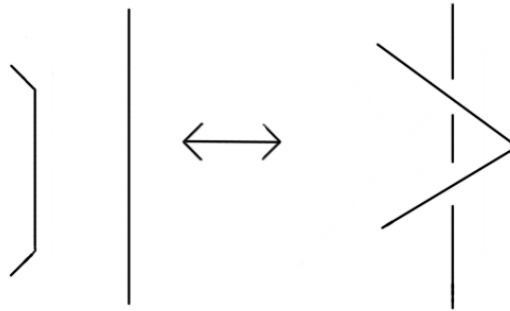


Abbildung 17: Reidemeister-Bewegung vom Typ 2

Bei der Reidemeister-Bewegung vom Typ 2 ist es erlaubt zwei Kreuzungen hinzuzufügen oder zu entfernen.

3. Verschiebung von Schnurstücken (Typ 3)

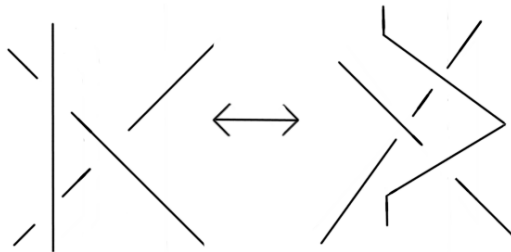


Abbildung 18: Reidemeister-Bewegung vom Typ 3

Bei der Reidemeister-Bewegung vom Typ 3 ist es erlaubt einen Strang des Knotens von einer Seite der Kreuzung auf die andere zu verlegen. (Adams 1995, S.25)

Nach der Definition der *Reidemeister – Bewegungen* erhalten wir weitere Bewegungen, die den *Reidemeister – Bewegungen* sehr ähnlich sind und deshalb auch meist dazugerechnet werden. Hier einige Beispiele für die genannten Bewegungen:

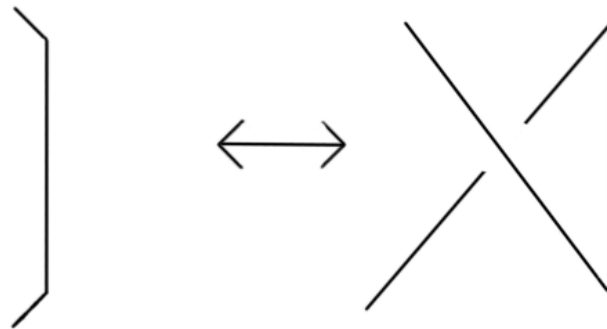


Abbildung 19: Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 1

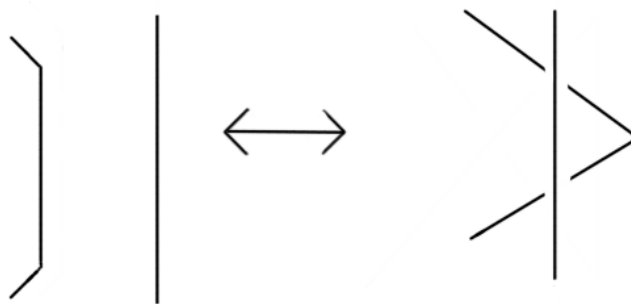


Abbildung 20: Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 2

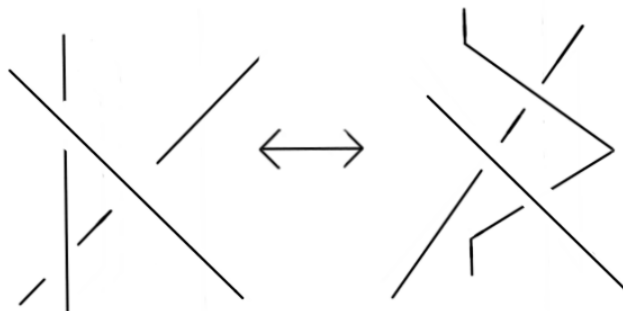


Abbildung 21: Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 3

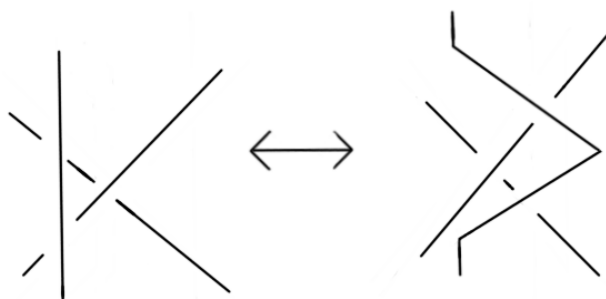


Abbildung 22: Beispiel für weitere Reidemeister-Bewegung vom Typ 3

Zu beachten ist, dass sich durch Reidemeister-Bewegungen niemals der Knoten verändert, sondern nur die Projektion des Knotens, der Knoten bleibt derselbe. Vor ca. 94 Jahren führte der Mathematiker den dafür ausschlaggebenden Beweis durch. Wenn man zwei unterschiedliche Projektionen von Knoten gegeben hat, so ist es möglich durch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen die eine Projektion in die andere überzuführen. Dies formulierte er in folgendem Satz: (Adams 1995, S.25)

Satz 4.1.1

Sind zwei Knoten äquivalent, so lassen sich ihre Diagramme durch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen.

Beweisidee

Es seien K und J zwei äquivalente Knoten und besitzen beide reguläre Projektionen, dann kann der Knoten K in den Knoten J durch eine Folge von elementarer Deformationen übergehen, da die Knoten über eine Folge von Deformationen zusammenhängen. Eine zusätzliche kleine Drehung sichert, dass die Projektionen aller Knoten der Folge regulär sind. Der Beweis wird deshalb auf den Fall zurückgeführt, dass zwei Knoten über eine elementare Deformation zusammenhängen. Anhand einer weiteren Drehung lässt sich feststellen, dass das Dreieck, entlang dem die Deformation durchgeführt wurde, auf ein Dreieck in der Ebene projiziert wird. Sollten sich viele Kreuzungen innerhalb des Dreiecks befinden, was durchaus sein kann, so lässt sich das Dreieck in viele kleine Dreiecke unterteilen, wobei jedes dieser Dreiecke dann höchstens eine Kreuzung enthalten soll. Somit lässt sich anhand dieser Unterteilung die elementare Deformation durch eine Folge vieler kleiner Deformationen beschreiben. Zuletzt wird überprüft, dass bei kleinen Deformationen nur Reidemeister-Bewegungen auftreten, dann ist der Beweis abgeschlossen. (Livingston 1995, S.28-29)

Beispiel 4.1.1

Entknotung mit Reidemeister-Bewegungen:

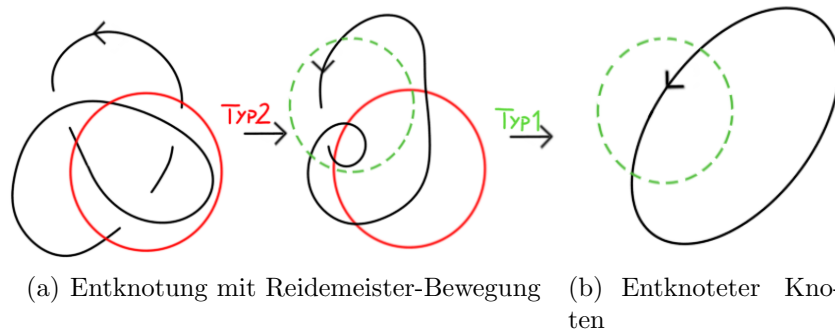


Abbildung 23: Beispiel für Entknotung mit Reidemeister-Bewegung

Durch den Satz 4.1.1. von Kurt Reidemeister erhält man einen elementaren Zugang zur Knotentheorie. Sein Satz besagt, dass zwei Knoten genau dann äquivalent sind, wenn sie sich durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen lassen. Das heißt mit anderen Worten, dass es einen endlichen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob zwei Knotendiagramme zueinander äquivalent sind. Vor Reidemeister war ein solcher Entknotungsalgorithmus nicht bekannt, und gerade deshalb stellen die Reidemeister-Bewegungen in der Knotentheorie einen sehr wichtigen Bestandteil dar.

Doch wie bereits im vorherigen Kapitel der Geschichte der Knotentheorie geschrieben, handelt es sich oft um sehr schwere und äußerst komplizierte Vorgänge, wenn man die Reidemeister-Bewegungen anwendet, deshalb stellen sie zwar einen elementaren Zugang zur Knotentheorie dar, jedoch handelt es sich noch um ein unpraktisches Werkzeug. Als Beispiel möchten wir hier den Kleeblattknoten erwähnen. Vom Kleeblattknoten ist bekannt, dass er nicht seinem Spiegelbild gleicht, jedoch ist kein Beweis dieser Tatsache bekannt, indem die Reidemeister-Bewegungen angewandt werden. Dies hat den Grund, dass selbst wenn man beweisen könnte, dass es mit 1.000.000.008 Reidemeister-Bewegungen nicht gelingt, könnte es immer noch mit der 1.000.000.009 Bewegung gelingen.

4.2 Dreifarbigkeit von Knoten

In dieser Arbeit wurde bisher eine sehr wichtige Tatsache der Knotentheorie zwar bereits erwähnt, jedoch noch nicht genauer betrachtet und bewiesen. Es handelt sich dabei um die Tatsache, dass es tatsächlich außer dem Unknoten noch weitere Knoten gibt. Wir haben bereits Möglichkeiten kennengelernt einen Knoten auf einen Unknoten überzuführen und vor allem über Tait's Knotentafel gesprochen, in der er versucht hat, alle nicht äquivalenten Knoten, die es gibt, aufzuzählen, wobei dabei keiner doppelt vorkommen sollte und auch keiner vergessen werden sollte. Weiteres wurde des Öfteren erwähnt, dass es sich dabei um eine sehr komplexe und herausfordernde Aufgabe handelt, da Tait nur sehr wenige Werkzeuge zur Verfügung hatte. Jedoch haben wir uns noch nicht die Frage gestellt, ob es tatsächlich noch weitere Knoten außer dem Unknoten gibt. Wenn dies nicht so wäre, so würde man jeden Knoten in den Unknoten überführen können. Intuitiv ist klar, dass dies nicht der Fall sein kann, trotzdem muss eine Möglichkeit gefunden werden, dies auch zu zeigen. Dazu werden wir im Folgenden den Begriff der *Dreifarbbarkeit* definieren und anschließend zeigen, dass neben dem Unknoten noch mindestens ein weiterer Knoten existiert.

Definition 4.2.1

Eine *Verschlingung* ist eine Menge von verknoteten Schleifen, die wiederum alle untereinander verschlungen sein können. Zwei *Verschlingungen* werden als gleich angesehen, sofern sich eine von den beiden in die andere so deformieren lässt, dass sich zu keinem Zeitpunkt beim Deformieren eine der Schleifen der einen Verschlingung mit sich selbst oder mit irgendeiner der anderen schneidet.

Definition 4.2.2

Ein Abschnitt, der eine Kreuzung mit einer anderen verbindet und dabei andere Abschnitte des Knotens nur oberhalb kreuzt wird *Strang* in der Projektion einer Verschlingung genannt.

Definition 4.2.3

Man nennt die Projektion eines Knotens *dreifarbbar*, wenn jeder ihrer Stränge mit einer von den drei Farben so eingefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung, die sich dort treffenden Stränge entweder genau drei verschiedene oder alle dieselbe Farbe aufweisen. Insbesondere wird für die Dreifarbigkeit gefordert, dass mindestens zwei der drei Farben Verwendung finden.

Nun weiter mit unserer Frage, ob es neben dem Unknoten noch weitere Knoten gibt. Dazu betrachten wir den Kleeblattknoten. Die Abbildung 24 zeigt das Knotendiagramm eines Kleeblattknotens. Dort erkennt man, dass die Projektion des Kleeblattknotens dreifarbig ist, da an jeder Kreuzung drei verschiedene Farben zusammentreffen und bei keiner Kreuzung genau zwei Farben aufeinandertreffen.



Abbildung 24: Kleeblattknoten dreifarbig

Beweis 4.2.1

Es ist nun noch sehr wichtig anzumerken, dass Reidemeister-Bewegungen jedes Typs keinen Einfluss auf die Dreifarbigkeit eines Knotens haben. Nur so gelingt es uns mit der Dreifarbigkeit einen Knoten zu finden, der vom Unknoten verschieden ist. Dafür werden wir nun jeden der drei Typen der Reidemeister-Bewegungen genauer betrachten:

- **Ent-/Verdrillung (Typ 1):** Wird eine Reidemeister-Bewegung vom Typ 1 auf einen Knoten angewandt, das heißt, es wird entweder eine neue Kreuzung gebildet oder beseitigt, so bleibt die Dreifarbigkeit erhalten, da wir die Farben aller Stränge so belassen können, wie sie sind.

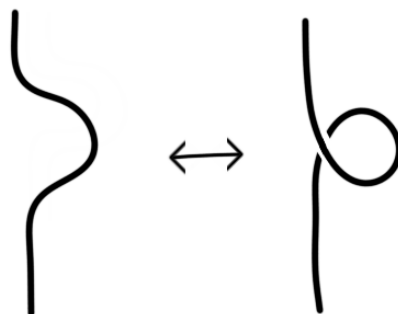


Abbildung 25: Typ 1 verändert die Dreifarbigkeit nicht

- **Ent-/Verhäkelung (Typ 2):** Bei der Reidemeister-Bewegung vom Typ 2 ist es erlaubt, zwei Kreuzungen hinzuzufügen oder zu entfernen. Betrachten wir zuerst den Fall, dass zwei Kreuzungen hinzugefügt werden. Sind die beiden ursprünglichen Stränge unterschiedlich gefärbt, so haben wir die Möglichkeit, den Bogen, der die neuen Kreuzungen verbindet, als neuen Strang einzuführen und diesen mit der dritten Farbe einzufärben. Somit ist die durch Typ 2 entstandene Knotenprojektion dreifarbig. Wenn die beiden ursprünglichen Stränge bereits die gleiche Farbe haben, so müssen wir die Farbe des neuen Stranges nicht ändern, können diese also belassen und an den neu entstandenen Kreuzungen erhalten wir die eine Farbe. Betrachten wir nun den Fall, dass zwei Kreuzungen entfernt werden. In diesem Fall haben alle Stränge entweder die gleiche Farbe, oder es kommen drei verschiedene Farben, so wie in Abbildung 26 (b), vor. Somit erhält auch die Reidemeister-Bewegung vom Typ 2 die Dreifarbigkeit. (Adams 1995, S.35-37)

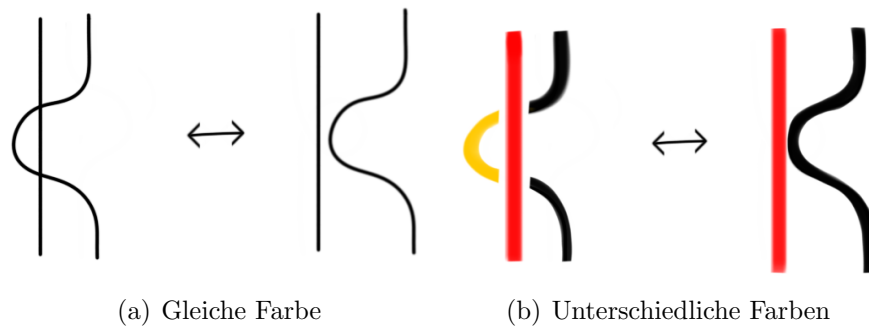


Abbildung 26: Typ 2 verändert die Dreifarbigkeit nicht

- **Verschiebung von Schnurstücken (Typ 3):** Bei der Reidemeister-Bewegung vom Typ 3 ist es erlaubt, einen Strang des Knotens von einer Seite der Kreuzung auf die andere zu verlegen. Auch der Typ 3 der Reidemeister-Bewegungen beeinflusst die Dreifarbigkeit nicht. Dies muss in drei unterschiedlichen Fällen gezeigt werden.

Im ersten Fall nehmen wir an, dass die betrachteten Stränge im Knotendiagramm zwei mehrfarbige und eine einfarbige Kreuzung bilden. Wendet man auf diese Ausgangssituation nun die Reidemeister-Bewegung vom Typ 3 oder dessen Umkehrung an, so bleiben oder werden immer mindestens zwei Kreuzungen mehrfarbig.

Im zweiten Fall gehen wir davon aus, dass die betrachteten Stränge im

Knotendiagramm drei mehrfarbige Kreuzungen bilden. Auch in diesem Fall bleiben oder werden immer mindestens zwei Kreuzungen mehrfarbig, wenn man die Reidemeister-Bewegung vom Typ 3 oder dessen Umkehrung darauf anwendet.

Im dritten Fall gehen wir davon aus, dass die betrachteten Stränge im Knotendiagramm gleichfarbig sind und somit eine einfarbige Kreuzung bilden. Bei dieser Ausgangssituation wird durch die Reidemeister-Bewegung vom Typ 3 und dessen Umkehrung keine weitere Farbe hinzugefügt, und somit bleibt die Dreifarbigkeit des Knotens erhalten.

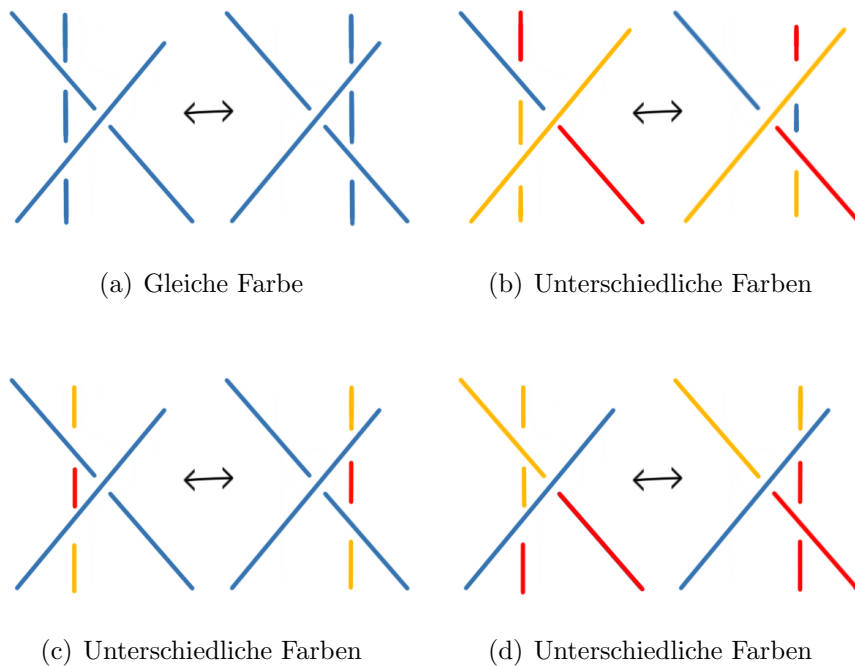


Abbildung 27: Typ 3 verändert die Dreifarbigkeit nicht

Wir haben nun also gesehen, dass keine der Reidemeister-Bewegungen Einfluss auf die Dreifarbigkeit eines Knotens nimmt, das heißt, Reidemeister-Bewegungen erhalten die Dreifarbigkeit. Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis, da uns diese darauf schließen lässt, dass entweder jede Projektion eines Knotens oder keine einzige dreifarbig ist. Das heißt die Dreifarbigkeit hängt nur vom Knoten und nicht von dessen Projektion ab.

Zurück also zu unserem Beispiel des Kleeblattknotens. Dies bedeutet nun also, dass nicht nur das oben abgebildete Knotendiagramm des Kleeblattknotens

(Abbildung 24) dreifarbig ist, sondern jede Projektion des Kleeblattknotens ist dreifarbig. Betrachtet man jedoch den Unknoten, so können wir diesen mit Gewissheit nur in eine Farbe färben, da dieser nur aus einem Strang besteht. Somit ist gezeigt, dass es sich bei dem Kleeblattknoten und dem Unknoten definitiv um zwei verschiedene Knoten handelt. Also gibt es vom Unknoten mindestens einen nicht äquivalenten Knoten.

5 Knoteninvarianten

In diesem Abschnitt dieser Arbeit werden wir den Begriff der *Invarianten* einführen. Bei dem Begriff der Invariante handelt es sich um eine Eigenschaft eines Knotendiagrammes. Dabei wird einem Knotendiagramm eine Eigenschaft zugeordnet. Bei dieser Eigenschaft kann es sich zum Beispiel um eine Zahl, eine Matrix, ein Polynom usw. handeln. Wichtig ist, dass man von dieser Eigenschaft bewiesen hat, dass die Reidemeister-Bewegungen auf sie keinen Einfluss nehmen, also dass ein Knotendiagramm mit einer solchen Eigenschaft, nach der Anwendung der Reidemeister-Bewegungen immer noch diese Eigenschaft besitzt. Eine solche Eigenschaft wird als *Knoteninvariante* bezeichnet. Die Knoteninvariante teilt die Menge aller Knoten somit in zwei Klassen ein, nämlich in die Klasse der Knoten, die die Eigenschaft besitzen und in die Klasse der Knoten, die die Eigenschaft nicht besitzen. Damit lässt sich zeigen, dass zwei Knoten, die bezüglich der Knoteninvariante in zwei verschiedenen Klassen liegen, verschiedene Knoten sind. Liegen sie in derselben Klasse, so ist noch nichts entschieden. (Haftendorn, S.7)

5.1 Die Entknotungszahl

Betrachtet man Knotendiagramme, so fällt schnell auf, dass jedes dieser Knotendiagramme eine gewisse Anzahl an Kreuzungen hat. Nun stelle man sich vor, man nehme ein Knotendiagramm und ändert alle Kreuzungen in diesem Diagramm so ab, dass eine rechtshändige Kreuzung zu einer linkshändigen wird und umgekehrt. Dies schafft man auf folgende Art und Weise:

Gegeben sei also bereits ein Knotendiagramm. Man erstellt nun ein zweites neues Knotendiagramm, bei dem man beginnend bei einem Punkt q an der Knotenprojektion entlangläuft. Dabei wird jeder Knotenpunkt zwei Mal passiert, jedoch soll beim zweiten Passieren der Strang unterhalb des ersten verlaufen. Dazu das Beispiel am Kleeblattknoten in der Abbildung 28 unterhalb. (Livingston 1995, S.117-118)

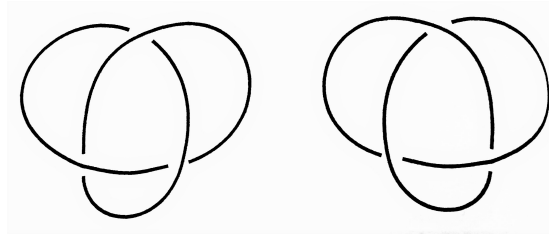


Abbildung 28: Kleeblattknoten rechts- und linkshändig

Definition 5.1.1

Ein Knoten K hat die *Entknotungszahl* n , genau dann, wenn es eine Projektion des Knotens gibt, in der die Änderung von n Kreuzungen zu einer Projektion des Unknotens führt und wenn es keine anderen Projektionen gibt, bei der weniger als n derartige Änderungen diese Wirkung erzielen. Die *Entknotungszahl* n bezeichnet immer die minimale Anzahl von Kreuzungsänderungen. (Adams 1995, S.69)

Satz 5.1.1

Die Entknotungszahl jedes Knotens ist endlich.

Dies folgt daraus, dass man anhand der Änderung einer Teilmenge der Menge aller Kreuzungen dieser Projektion jede Knotenprojektion in die Projektion des Unknotens überführen kann.

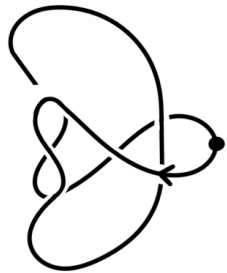
Beweis 5.1.1

Gegeben sei eine Knotenprojektion, auf der wir einen Anfangspunkt p wählen. Dabei treffen wir die Annahme, dass der Punkt p kein Kreuzungspunkt ist. Außerdem wählen wir am Anfangspunkt eine Richtung, in der wir dem Knotenverlauf folgen. Wir beginnen nun im Punkt p und gehen in die vorgegebene Richtung entlang des Knotendiagrammes. Sobald wir auf die erste Kreuzung treffen, ändern wir, falls nötig, die Überkreuzungsart so ab, dass der Strang, auf dem wir uns gerade bewegen, oben liegt. Sollte der Strang bereits oben liegen, so ist keine Änderung nötig. Wir machen damit solange weiter, bis wir wieder am Anfangspunkt p ankommen. Sollten wir auf dem Weg zum Punkt p eine Kreuzung passieren, an der wir bereits waren, so ändern wir die Überkreuzungsart nicht ab, sondern passieren die Kreuzung nun auf dem Strang, der unterhalb liegt. Wieder am Punkt p angelangt, haben wir nun eine Knotenprojektion vor uns liegen, die aus der ursprünglichen Knotenprojektion, durch Änderungen der Kreuzungen, entstanden ist. Wir werden nun im Weiteren beweisen, dass es sich dabei um eine

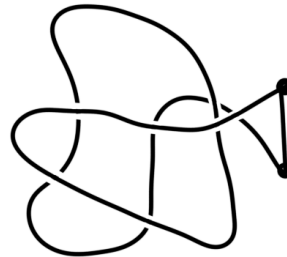
5 Knoteninvarianten

Projektion des Unknotens handelt.

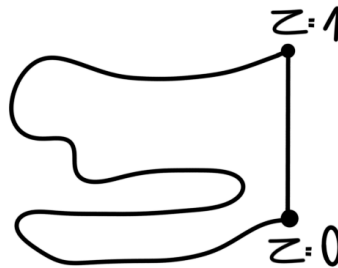
Um sich dies besser vorstellen zu können, betrachten wir nun den Knoten im dreidimensionalen Raum. Dabei soll die z -Achse senkrecht aus der Projektionsebene in Richtung auf den Betrachter herausragen. Anschließend starten wir wieder mit unserem Anfangspunkt p , den wir in der Höhe der Ebene mit der z -Koordinate 1 anordnen. Währendem wir nun dem Knotenverlauf vom Punkt p aus wieder folgen, verkleinern wir die z -Koordinaten der Punkte des Knotens gleichmäßig. Dies machen wir so lange, bis wir fast wieder im Anfangspunkt p angekommen sind. Nun soll dieser letzte Punkt die z -Koordinate 0 haben. Anfangs haben wir jedoch dem Anfangspunkt p die z -Koordinate 1 gegeben. Somit liegen nun Anfangs- und Endpunkt in den z -Koordinaten 1 und 0, die wir durch eine senkrechte Linie verbinden, um die Knotenlinie zu schließen. Betrachten wir nun die Knotenprojektion in Richtung der z -Achse nach unten, so sehen wir die Knotenprojektion, die wir durch die Änderungen der Kreuzungen erzeugt haben. Wenn wir uns die Knotenprojektion jedoch von der Seite ansehen, so sehen wir eine Projektion, die keine einzige Kreuzung besitzt. Somit handelt es sich dabei um den Unknoten. Zur Verdeutlichung dieses Beweises führen wir dafür eine Abbildung an. (Adams 1995, S.70-71)



(a) Abgeänderte Projektion



(b) Schräg von der Seite



(c) Seitliche Perspektive

Abbildung 29: Blickwinkel aus drei Perspektiven(angelehnt an Adams 1995, S.71)

Bemerkung 5.1.1.

Wie sich vielleicht bereits erahnen lässt, ist es im Allgemeinen sehr schwierig, die *Entknotungszahl* zu bestimmen. Betrachtet man beispielsweise eine einzige Projektion eines Knotens und schließt aus dieser eine gewisse Entknotungszahl, so ist es nicht sicher, dass diese Entknotungszahl auch die richtige ist. Es könnte durchaus sein, dass die Entknotungszahl geringer oder größer ist, als aus dieser einen Projektion ersichtlich. Um die Entknotungszahl genau zu bestimmen muss ein relativ großer Aufwand betrieben werden. Beispielsweise dauerte es 100 Jahre bis es ein Mathematiker schaffte zu zeigen, dass Primknoten die Entknotungszahl 1 besitzen. (Adams 1995, S.72)

5.2 Die Kreuzungszahl

Wie der Name des Kapitels bereits verrät werden wir im nächsten Abschnitt die Kreuzungszahl definieren.

Definition 5.2.1.

Die kleinstmögliche Zahl von Doppelpunkten, die in einer Projektion eines Knotens vorkommen, wird *Kreuzungszahl* genannt.

Wie wir bereits in mehreren Abbildungen von Knoten gesehen haben, besitzt jede reguläre Projektion eines Knotens eine endliche Anzahl von Doppelpunkten. Die Anzahl dieser Doppelpunkte kann je nach Projektion variieren, da die Reidemeister-Bewegungen vom Typ 1 und 2 diese verändern. Als Beispiel lässt sich jedoch leicht erkennen, dass der Unknoten die Kreuzungszahl 0 besitzt und der Kleeblattknoten die Kreuzungszahl 3. Trotzdem, dass es zu jeder Kreuzungszahl nur endlich viele Knoten gibt, ist es schwierig all diese Knoten aufzulisten. (Livingston 1995, S.116-117)

5.3 Die Brückenzahl

Bei der Brückenzahl handelt es sich um eine weitere Knoteninvariante. Wie bereits bekannt ist, lässt sich ein Knoten in mehreren Projektionen darstellen. Zusätzlich ist es möglich jede Projektion so zu verformen, dass es nur endlich viele relative Maxima und Minima gibt. In Abbildung 30 sieht man einen Knoten, bei dem die Maxima und Minima markiert sind. (Livingston 1995, S. 123)

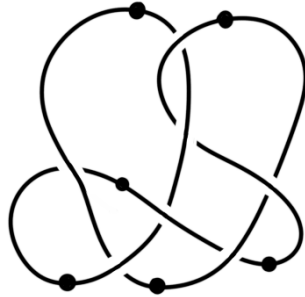


Abbildung 30: Maxima und Minima im Knoten (angelehnt an Livingston 1995, S.123)

In der Abbildung 31 sehen wir die Projektion eines Achterknotens. Bei diesem Knotendiagramm stelle man sich den Knoten nun als Gebilde vor, das die Ebene durchdringt, und nicht als Gebilde, das in der Ebene liegt. Nun stelle man sich noch weiter vor, dass die dicker gezeichneten Teile des Knotens oberhalb und die dünner gezeichneten Linien unterhalb der Ebene liegen. Der Knoten schneidet die Ebene dann genau in vier Punkten. Man erkennt dann, dass zwei unverknotete Bögen oberhalb der Ebene liegen. Dabei handelt es sich um die kleinste Anzahl solcher unverknoteter Bögen, die in irgendwelchen ihrer Projektionen auftreten können. Deshalb sagen wir in diesem Fall, dass die Brückenzahl hier die Zahl 2 beträgt.

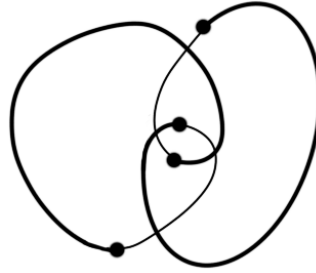


Abbildung 31: Maxima und Minima im Achterknoten (angelehnt an Adams 1995, S.76)

Für den allgemeinen Fall sei die Projektion eines Knotens K in der Ebene gegeben. Nun definieren wir den Begriff *Überführung* als einen Teilbogen des Knotens, der oberhalb von mindestens einer Kreuzung und niemals unterhalb einer solchen Kreuzung verläuft. Eine *Überführung*, die in dieser Weise nicht mehr verlängert werden kann, nennt man *maximale Überführung* (Maximum). Die zwei Endpunkte einer *maximalen Überführung* befinden sich genau vor, beziehungsweise hinter einer solchen unterliegenden Kreuzung. Als *Brückenzahl* der Projektion bezeichnet man die Anzahl der darin vorhandenen *maximalen Überführungen* (Maxima). Zu beachten gilt, dass es für jede Kreuzung eine maximale Überführung gibt, die sie oberhalb kreuzt. Man kann auch zeigen, dass die Anzahl der Minima gleich der Anzahl der Maxima ist. (Adams 1995, S.76)

Somit können wir nun die Definition der Brückenzahl angeben.

Definition 5.3.1.

Die kleinste Anzahl aller Maxima und Minima wird als *Brückenzahl* des Knotens K bezeichnet.

Auch hier ist es möglich, dass unterschiedliche Projektionen eines Knotens unterschiedlich viele Maxima und Minima besitzen, deshalb ist es wichtig zu beachten, dass die Brückenzahl immer die kleinste Anzahl aller Maxima und Minima angibt. (Livingston 1995, S. 123)

6 Anwendungsgebiete der Knotentheorie

Wir haben bisher einen aufschlussreichen Einblick in die Knotentheorie erhalten und sehr viele Grundlagen der Knotentheorie kennengelernt. Auch haben sich sehr viele Wissenschaftler, Mathematiker und Forscher mit diesem Teilgebiet der Mathematik beschäftigt. Trotzdem bleibt immer noch eine wichtige Frage offen. Wofür brauchen wir die Knotentheorie eigentlich und in welchen Bereichen findet sie ihre Anwendung? Dieser sehr wichtigen Frage ist nun folgendes Kapitel gewidmet.

Die Knotentheorie entstand aus nicht mathematischen, hauptsächlich chemischen, Überlegungen. Jedoch benötigten diese Überlegungen rasch mathematische Hilfsmittel, da viele der Überlegungen auf mathematische Grundlagen führten. So entwickelte sich die Knotentheorie zu einem eigenen Teilgebiet der Mathematik, wie bereits im Kapitel 1 beschrieben. Lange Zeit war es so, dass sich ausschließlich eine kleine Gruppe von Spezialisten mit der Knotentheorie beschäftigte. Heute sind viele Anwendungen der Knotentheorie bekannt, so ist es auch für einen größeren Kreis von Menschen interessanter geworden damit zu arbeiten. Nicht nur in der Mathematik stellt die Knotentheorie einen wichtigen Bestandteil dar, sondern auch in spezifischen Bereichen der Chemie, Physik und der Biologie. Immer dann, wenn es um bestimmte topologische Eigenschaften geht, wird die Knotentheorie zu einem interessanten Thema. Betrachten wir dazu die DNS:

Bei der DNS, genauer gesagt bei der Desoxyribonucleinsäure, handelt es sich um ein Molekül, das aus einem Paar von Molekülketten besteht. Diese sind durch Leitersprossen miteinander verbunden und winden sich spiralartig umeinander. Bei diesem Vorgang bilden sie eine Doppelhelix. Die DNS bildet eine wesentliche Voraussetzung für unser Leben. Sie muss für viele lebenswichtigen Funktionen zur Verfügung stehen und weiters muss es für Biochemiker möglich sein, die DNS darzustellen, da diese wissen müssen wie gewisse Enzyme auf die DNS wirken. Dabei ist es interessant anzumerken, dass geschlossene DNS-Moleküle tatsächlich in der Natur vorkommen. (Adams 1995, S.187)

Es wurden verschiedene Arten von Knoten in der DNS und auch in Proteinen gefunden. Dabei ist ein Beispiel von natürlichen Makromolekülen das Lactoferrinprotein, das Knoten enthält und die Fähigkeit besitzt Eisen (III)-Ionen zu

transportieren.

Allerdings sind die topologischen Eigenschaften von natürlichen Makromolekülen nicht durch die synthetische Biologie und die damit verknüpften Versuche der künstlichen Gensynthese bedeutsam geworden, sondern hängt die Entdeckung der DNS-Struktur mit Beobachtungen über die räumliche Anordnung ihrer Komponenten zusammen. Biologische Makromoleküle bzw. lebende Organismen können nur unter bestimmten Bedingungen entstehen, wozu deren räumliche Struktur und Anordnung gehören. Somit hat es auch nicht lange gedauert, bis genau diese räumliche Struktur der DNS genauer betrachtet wurde. Dabei konnte man verkettete Ringe sowie auch Kleeblattknoten in der DNS entdecken. Wie heute bekannt ist, müssen Körperzellen ständig erneuert werden und somit muss auch unsere DNS ständig erneuert werden bzw. muss unsere DNS ständig für Replikationen, Transkriptionen und Rekombinationen zur Verfügung stehen. Mit diesen Begriffen meinen wir die Prozesse, die dafür zuständig sind, ein DNS-Molekül zu kopieren, einen Abschnitt der Molekülkette zu kopieren und das DNS-Molekül zu modifizieren. Bei der Rekombination der DNS spielen Enzyme als Katalysatoren eine sehr wichtige Rolle. Da ihre Wirkung auf die DNS allerdings nicht direkt beobachtet werden kann, liegt es nahe, die durch sie bewirkten topologischen Veränderungen der Kernsäure zu studieren, um ein besseres Verständnis der Enzymmechanismen zu erhalten. Mit diesem Verständnis der Veränderung lässt sich mathematisch ein Knoten-Gleichungssystem erstellen, um die Struktur des DNS-Moleküls und auch um die Änderungen, die durch den Enzymmechanismus bewirkt werden, herauszufinden. Von Ernst und Sunners wurde gezeigt und bewiesen, dass es eine eindeutige Lösung für ein solches Knoten-Gleichungssystem gibt, somit wurde durch knotentheoretische Analyse die Wirkung des Enzyms bewiesen. (Gratzer und Neumaier 2014, S. 66-72)

7 Derzeitiger Lehrplanaufbau

In diesem Abschnitt werden wir diskutieren, ob und inwiefern das Thema Knotentheorie an Allgemeinbildenden Höheren Schulen eingeführt bzw. bearbeitet werden kann beziehungsweise soll. Dafür werden wir als Ausgangspunkt auf die aktuelle Fassung des AHS-Lehrplans des Bundes zurückgreifen. Der AHS-Lehrplan des Bundes besagt folgendes:

Laut dem österreichischen Lehrplan soll der Mathematikunterricht dazu beitragen, dass Schüler und Schülerinnen dazu geführt werden, konzentriert, sorgfältig, planmäßig und überlegt zu arbeiten. Schüler und Schülerinnen sollen mit rationalen Denkweisen Situationen untersuchen und Probleme bearbeiten und dabei aber auch Grenzen gewisser Denkweisen in der Anwendung erkennen. Somit also auch kritisches Denken entwickeln und offen gegenüber verschiedenen Standpunkten und Sichtweisen sein. Außerdem sollen Schüler und Schülerinnen im Mathematikunterricht lernen sowohl selbstständig, als auch kooperativ zu arbeiten und dabei Freude an kreativem Verhalten und intellektuellen Leistungen gewinnen.

Der Unterricht der Mathematik soll besonders als Vorbereitung auf die Arbeits- und Berufswelt dienen, aber auch zur Politischen Bildung, Umwelterziehung und Wirtschaftserziehung, sowie zur Konsumentenerziehung beitragen.

Im Teilgebiet der Arithmetik sollen Schüler und Schülerinnen mit rationalen Zahlen operieren, Rechenergebnisse abschätzen können, elektronische Taschenrechner benützen können und Gesetzmäßigkeiten des Rechnens kennen und anwenden können.

Im Bereich der elementaren Algebra sollen Schüler und Schülerinnen Variablen als Werkzeug zum Beschreiben von Sachverhalten, insbesondere von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen Beziehungen verwenden können. Des Weiteren sollen Variablen zum Lösen von Problemen angewandt werden können und Schüler und Schülerinnen sollen algebraische Ausdrücke und Formeln bzw. Gleichungen umformen können.

In der Geometrie sollen Schüler und Schülerinnen lernen mit grundlegenden geometrischen Begriffen und mit Beziehungen zwischen diesen Begriffen umzugehen, sorgfältige zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden sollen angefertigt werden können, das räumliche Vorstellungsvermögen soll entwickelt werden und elementare Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen sollen durchgeführt werden können. Außerdem soll es für Schüler und Schülerinnen möglich sein, Sachverhalte geometrisch darzustellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten zu können.

Alle Teilgebiete der Mathematik sollen nicht isoliert betrachtet werden, sondern mit vielfältigen Vorstellungen verbunden werden, damit die Mathematik als beziehungsreicher Tätigkeitsbereich erscheint. Dies vor allem deshalb, damit Schüler und Schülerinnen ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen anwenden können. Im Unterricht soll die Mathematik nicht immer alle Probleme lösen können, denn auch ihre Grenzen der Anwendbarkeit und Probleme in der Anwendung sollen verdeutlicht werden.

Natürlich soll die Mathematik in Bezug zur Arbeits- und Lebenswelt stehen, damit Schüler und Schülerinnen ihr mathematisches Wissen und Handeln stets reflektieren und somit auch in Beziehung setzen können.

Auch der Umgang mit der Mathematik soll Schülern und Schülerinnen im Unterricht vermittelt werden. Es soll ihnen bewusst werden, dass die Mathematik verantwortungsvoll und nicht missbräuchlich verwendet werden soll.

Hier noch ein Ausschnitt von mathematischen Grundtätigkeiten, die Schüler und Schülerinnen im Zusammenhang mit dem Erwerb mathematischer Kenntnisse, von Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einsichten, mit der Erarbeitung mathematischer Methoden und Denkweisen, mit deren Anwendung in außermathematischen Bereichen und mit der Reflexion über das Arbeiten in der Mathematik durchführen und entsprechende Lernziele anstreben sollten:

- Analysieren von Problemen
- Begründungen
- Darstellungen mathematischer Objekte
- Argumentieren und exaktes Arbeiten
- Präzises Beschreiben von Sachverhalten

7 Derzeitiger Lehrplanaufbau

- Begründen und Beweisen
- Rechtfertigen von Entscheidungen
- Kritisches Denken
- Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle
- Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen
- Überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen
- Darstellen und Interpretieren
- Verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten
- Geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten
- Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen
- Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte

Bei den Stoffgebieten der Mathematik startet der Lehrplan in der Unterstufe mit mathematischen Grundlagen, wie den natürlichen Zahlen, Bruchzahlen, einfachen Gleichungen, geometrischen Grundlagen usw. und führt uns in der Oberstufe bis hin zur anwendungsorientierten und komplexen Mathematik. (Österreichischer Lehrplan)

Der neue Lehrplan hat die mathematischen Kompetenzen nochmals komplett überarbeitet und an das Kompetenzmodell vom *Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens* angepasst. Dieses unterscheidet nun in Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsbereiche, wie bereits in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt. Auf diese werden wir nun nochmals etwas genauer eingehen. Für folgenden Bereich basieren wir uns auf die vom *Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens* definierten Bildungsstandards.

Zuerst zu den für den Mathematikunterricht definierten Handlungsdimensionen.

- Handlungsbereich: Darstellen, Modellbilden (H1)
„*Darstellen* meint die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform.
Modellbilden erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä.“
- Handlungsbereich: Rechnen, Operieren (H2)
„*Rechnen* im engeren Sinn meint die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen, Rechnen in einem weiteren Sinn meint die regelhafte Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte.
Operieren meint allgemeiner und umfassender die Planung, sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z.B. geometrisches Konstruieren oder auch das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Grafiken mit ein. Rechnen/Operieren schließt immer auch die verständige und zweckmäßige Auslagerung operativer Tätigkeiten an die verfügbare Technologie mit ein.“
- Handlungsbereich: Interpretieren (H3)
„*Interpretieren* meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.“
- Handlungsbereich: Argumentieren, Begründen (H4)
„*Argumentieren* meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.
Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt.“

Die Inhaltsdimensionen werden vom *Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens* für die jeweiligen Schulstufen definiert und in folgende Themengebiete kategorisiert:

7 Derzeitiger Lehrplanaufbau

- Zahlen und Maße (I1)
- Variable, funktionale Abhängigkeit (I2)
- Geometrische Figuren und Körper (I3)
- Statistische Darstellungen und Kenngrößen (I4)

Bei dem Komplexitätsbereichen geht es darum, verschiedene Aufgaben nach ihrer Schwierigkeit bzw. Komplexität zu unterscheiden. Dabei werden verschiedene mathematische Aufgaben, je nach Komplexität, in einen der drei unten angeführten Bereiche eingeordnet:

- Komplexitätsbereich: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten (K1)
- Komplexitätsbereich: Herstellen von Verbindungen (K2)
- Komplexitätsbereich: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren (K3)

7.1 Einordnung der Knotentheorie in den österreichischen Lehrplan

Nach genauer Betrachtung des österreichischen Lehrplanes und der neu definierten Bildungsstandards stellt sich die Frage, wo man die Knotentheorie mit Beachtung des Lehrplans und der Bildungsstandards im Unterricht einordnen kann. Beginnen wir dazu die Knotentheorie inhaltlich einzuordnen. Sieht man sich dazu nochmals oben aufgelistete Inhaltsbereiche an, so ist der Knoten als Teilmenge des dreidimensionalen Raumes und als räumliches Objekt in die Inhaltsdimension „Geometrische Figuren und Körper“ einzuordnen. Greift man nochmals auf den Lehrplan zurück, so findet man dort unter diesem Inhaltsbereich Folgendes erklärt:

„Beim Erwerb grundlegender geometrischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten sollen in allen Schulstufen die folgenden Aspekte beachtet werden: Geometrie ist ein Mittel zur Umwelterschließung; geometrische Begriffe und deren Eigenschaften sowie Maßbeziehungen an geometrischen Objekten sollen möglichst oft mit Objekten unserer Umwelt in Beziehung gebracht werden; die Schüler sollen besonders mit zeichnerischen Darstellungen von solchen Objekten vertraut werden; ihr räumliches Vorstellungsvermögen soll geschult werden. Geometrie ist ein Bereich, in dem beim Konstruieren zur Sorgfalt und Genauigkeit erzogen werden kann. Die Schüler sollen aber auch skizzenhaftes Zeichnen üben.“

Zu den Lernzielen in der Geometrie gehören außerdem zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden. Das räumliche Vorstellungsvermögen soll entwickelt werden. Außerdem soll es für Schüler und Schülerinnen möglich sein, Sachverhalte geometrisch darzustellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten zu können. Wenn man dies nun genauer betrachtet, so lässt sich die Knotentheorie hier wunderbar einbinden. Darunter fällt das Beschreiben von geometrischen Figuren in unserer Umwelt und das Darstellen von geometrischen Figuren in der Ebene und im dreidimensionalen Raum. Wie wir bereits gesehen haben, kommen Knoten als solche sehr häufig in unserer Umwelt und Natur vor. Des Weiteren haben wir gesehen, wie sich diese in Form von Projektionen in der Ebene darstellen lassen. Dies wäre ein möglicher Punkt im Lehrplan, um an die Knotentheorie anzuknüpfen.

Betrachtet man die Handlungsbereiche, so lässt sich für die Knotentheorie auch hier eine Anknüpfung finden.

„In der Geometrie sind vielfältige Problemstellungen möglich, die produktives Denken fördern können. Ebenso kann das Argumentieren geübt werden.“

Gerade bei Knotendiagrammen lassen sich geometrische Eigenschaften von Knoten beschreiben. Begründungen und Argumentationen für gewisse Eigenschaften, wie Kongruenz, Symmetrie, Ähnlichkeit und Lagebeziehungen lassen sich auch durchführen. Somit lässt sich auch hier an den Lehrplan und an die Bildungsstandards anknüpfen.

Schüler und Schülerinnen sollen im Laufe ihrer schulischen Karriere lernen Probleme zu lösen. Auch hier haben wir gesehen, dass die Knotentheorie einige Beispiele dafür liefert. Denke man beispielsweise daran, einen Knoten mit Reidemeister-Bewegungen zu entknoten, so handelt es sich dabei um eine Problemstellung, die mathematisch gelöst werden soll.

Wichtig ist hier auch zu erwähnen, dass Schüler und Schülerinnen an die Grenzen der Mathematik stoßen sollen und lernen sollen, dass auch die Mathematik nicht jedes Problem lösen kann und lernen sollen, Sachverhalte kritisch zu hinterfragen. Auch hier finden sich in der Knotentheorie einige interessante offene Fragen, die noch nicht gelöst wurden. Denke man hier zum Beispiel an das Feststellen der *Entknotungszahl* eines Knotens. Wir wissen, dass Knoten in unterschiedlichen Projektionen dargestellt werden können und somit steigt auch die Schwierigkeit, die *Entknotungszahl* festzustellen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich in Anbetracht des österreichischen Lehrplans und der österreichischen Bildungsstandards viele Möglichkeiten ergeben, die Knotentheorie in den Unterricht einzubauen. Besonders im Teilgebiet der Geometrie lässt sich die Knotentheorie sehr gut einordnen. Doch nicht nur im regulären Unterricht, sondern auch außerhalb des Pflichtgegenstandes der Mathematik, lässt sich die Knotentheorie einbauen. An vielen Schulen werden Förderunterrichte oder auch vertiefende Wahlpflichtgegenstände (ab der 10.Schulstufe) angeboten. Unter anderem wird hier häufig vertiefender Mathematikunterricht von den Schulen angeboten. Gerade in solchen Wahlpflichtfächern ließe sich die Knotentheorie sehr gut unterrichten. Dabei könnte man unabhängig vom regulären Unterricht auf die Knotentheorie eingehen und dieses als Teilgebiet der Mathe-

matik behandeln.

Sofern bereits alle verpflichteten Teilgebiete des Lehrplans unterrichtet wurden, lässt sich die Knotentheorie auch zusätzlich in Schulstunden vor den Ferien einbauen. Denke man an die letzten Mathematikstunden vor Weihnachten, Ostern oder vor dem Sommer, so eignen sich Knobelaufgaben und Basteleien der Knotentheorie sehr gut für diese Schulstunden.

Für Schüler und Schülerinnen, die gerne mehr mathematische Inhalte über den regulären Unterricht hinaus lernen möchten, könnte man auch Aufgaben der Knotentheorie bereitstellen. Besonders könnte man für Maturanten und Maturantinnen das Teilgebiet der Knotentheorie als Thema für ihre Facharbeit bereitstellen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Knotentheorie als Teilgebiet der Mathematik sehr gut in den schulischen Unterricht eingebaut werden kann. Sei es als Teil des regulären Unterrichts oder auch außerhalb des verpflichtenden Unterrichts.

8 Anwendungsbeispiele für die Schule

In diesem letzten Kapitel widmen wir uns der Frage wie die Knotentheorie in der Schule unterrichtet werden kann. Allgemein lässt sich diese Frage nicht beantworten, da es im Unterricht nicht nur auf das Themengebiet ankommt, sondern auch auf die Rahmenbedingungen und der Klasse selbst. Eine Schulklasse besteht aus vielen verschiedenen Schülern und Schülerinnen, deshalb sollte gerade beim „wie“ darauf geachtet werden, das Unterrichtskonzept auf die jeweiligen Schüler und Schülerinnen anzupassen. Wir werden nun eine Unterrichtssequenz als Anhaltspunkt für Knotentheorie in der Schule sehen.

8.1 Vorüberlegung

In diesem Kapitel werde ich nun ein von mir erstelltes Unterrichtskonzept für eine Doppelstunde über Knotentheorie in der Schule vorstellen. Dazu werde ich das *ARIVA-Modell* nach René Müller-Spoerri verwenden. Dieses werde ich hier kurz vorstellen. Das *ARIVA-Modell* geht zielorientiert und methodisch vor und teilt eine Unterrichtsstunde in folgende fünf Phasen ein.

- A - Ausrichten
- R - Reaktivieren
- I - Informieren
- V - Verarbeiten
- A - Auswerten

In der ersten Phase *Ausrichten* geht es darum die Tageslernziele bekannt zu geben bzw. diese mit den Schülern und Schülerinnen zu vereinbaren. Außerdem wird in diesem Abschnitt der Unterrichtsstunde die Art der Zusammenarbeit vereinbart und darüber informiert, welche Abläufe die Unterrichtsstunde beinhalten wird. Dieser Teil sollte etwa 5 Prozent der zur Verfügung stehenden Zeit ausmachen.

In der zweiten Phase *Reaktivieren* geht es darum an bereits vorhandenes Wissen anzuknüpfen und dieses wiederzubeleben. Wichtig dabei ist, dass es hierbei nicht

darum geht, bereits Gelerntes zu wiederholen, sondern dieses bewusst anzusprechen und anschließend einzusetzen. Auch dieser Teil sollte in etwa 5 Prozent der zur Verfügung stehenden Zeit ausmachen.

In der dritten Phase *Informieren* werden neue Inhalte vermittelt. Dies heißt nicht, dass dies immer durch Frontalunterricht geschehen muss, sondern mit Einsatz aller zur Verfügung stehenden Mittel und Medien. Dazu zählen die Tafel, ein Projektor, Flipchart, Beamer usw. Beim Informieren können verschiedenste Methoden angewandt werden, um den entsprechenden Inhalt zu vermitteln. Dieser Teil sollte ca. 40 Prozent der zur Verfügung stehenden Zeit in Anspruch nehmen.

Nun weiter zur Phase des *Verarbeitens*. Hier geht es darum, die eben neu gelernten Inhalte aus der Phase *Informieren* zu verarbeiten. Dabei werden die neuen Inhalte mit bereits Bekanntem vernetzt. Es geht besonders auch darum, die neu gelernten Inhalte mit der Praxis zu verknüpfen und dort Anwendungen zu finden. Wie auch die Phase *Informieren*, sollte dieser Teil ca. 40 Prozent der zur Verfügung stehenden Zeit einnehmen.

Nun noch zur Phase *Auswerten*. In diesem Abschnitt wird überprüft, inwieweit die vorab definierten Lernziele erreicht wurden und neu gelernte Inhalte werden nochmals zusammengefasst. Dieser Abschnitt sollte etwa 10 Prozent der zur Verfügung stehenden Zeit in Anspruch nehmen. (Brändli 2014)

8.2 Unterrichtskonzept

Dieses Modell habe ich bereits am Anfang meines Studiums kennengelernt und seither oft angewandt. In all meinen geplanten Unterrichtsstunden hat sich das Modell bereits bewährt, deshalb werde ich es auch für diese Doppelstunde verwenden. Natürlich gibt das Modell keine Garantie dafür, dass der Unterricht gelingt, trotzdem soll es als Stütze dienen, um Schulstunden zu planen.

Konzept

- **Thema:** Einführung der Knotentheorie und Reidemeister-Bewegungen
- **Fach:** Mathematik

- **Schultyp:** Allgemeinbildende Höhere Schule

- **Schulstufe:** ab der 1. Klasse Oberstufe, 9. Schulstufe

- **Zur Verfügung stehende Unterrichtsstunden:** 2 Doppelstunden zu je 50 Minuten

- **Lernziele:**
 - Schüler und Schülerinnen kennen die Definition eines mathematischen Knotens
 - Schüler und Schülerinnen kennen die Definition des Unknotens
 - Schüler und Schülerinnen kennen die Reidemeister-Bewegungen
 - Schüler und Schülerinnen können anhand der Reidemeister-Bewegungen einfache Knoten entknoten

- **Vorwissen:**
 - Schüler und Schülerinnen kennen den Begriff der Projektion und können Graphen in der Ebene darstellen.
 - Schüler und Schülerinnen kennen den Begriff des Polygonzuges und wissen, dass sich Kurven durch Polygonzüge annähern lassen.

Unterrichtsplanung

Phase	Zeit	Inhalt	Sozialform	Material
1) Ausrichten	5 min	Begrüßung und Organisa- torisches Erklärung des Ablaufes der Schul- stunden	Frontal- unterricht	Tafel / Flip- chart Beamer
2) Reaktivieren	5 min	Anknüpfen an Vorwissen der Schüler und Schülerinnen über Knoten	Schüler- Lehrer- Gespräch	-
3) Informieren	10 min	Finden von Eigenschaften eines Gummi- bandes	Schüler- Lehrer- Gespräch Mind-Map Partnerarbeit	Gummiband Schulheft Tafel / Flip- chart
4) Informieren	5 min	Definieren ei- nes mathema- tischen Kno- tens	Frontal- unterricht	Tafel / Flip- chart Schulheft
5) Informieren	5 min	Definieren des Unknotens	Frontal- unterricht	Tafel / Flip- chart Schulheft
6) Verarbeiten	10 min	Erkennen, ob es sich um einen mathemati- schen Knoten handelt oder nicht	Partnerarbeit Schüler- Lehrer- Gespräch	Arbeitsblatt 1

8 Anwendungsbeispiele für die Schule

Phase	Zeit	Inhalt	Sozialform	Material
7) Verarbeiten	10 min	Erkennen ob sich Knoten in Unknoten umformen lassen oder nicht. Dazu werden vorgegebene Knoten mit einer Schnur von den Schülern und Schülerinnen nachgestellt und es wird überprüft, ob es sich um Unknoten handelt oder nicht	Schüler- Lehrer- Gespräch	Arbeitsblatt 2 Schnur
Pause				
8) Verarbeiten	20 min	Umformen von Knoten in Unknoten und schrittweise festhalten, wie umgeformt wird und anschließend Zusammenfassung der Schritte an der Tafel / Flipchart. Erarbeitung der Reidemeister-Bewegungen durch Beispiele.	Schüler- Lehrer- Gespräch Partnerarbeit	Arbeitsblatt 3 Schnur Tafel / Flipchart

Phase	Zeit	Inhalt	Sozialform	Material
9) Informieren	10 min	Definition der Reidemeister-Bewegungen	Frontal- unterricht	Schulheft Tafel / Flip- chart
10) Verarbeiten	10 min	Beispiele zu Reidemeister-Bewegungen	Partnerarbeit	Arbeitsblatt 4
11) Auswerten	10 min	Zusammenfassung der Ergebnisse und wiederholen der neu erlernten Definitionen	Schüler- Lehrer- Gespräch	-

In der ersten Phase **1) Ausrichten** begrüßt die Lehrperson die Schüler und Schülerinnen und organisatorische Pflichten, wie das Überprüfen der Anwesenheit werden erledigt. Anschließend listet die Lehrperson den Ablauf der Doppelstunde in Form einer Gliederung an der Tafel auf oder projiziert die Gliederung mit dem Beamer.

In der zweiten Phase **2) Reaktivieren** geht es darum, an das Vorwissen der Schüler und Schülerinnen anzuknüpfen und das Interesse der Schüler und Schülerinnen zu wecken. Dabei fragt die Lehrperson einen beliebigen Schüler oder eine beliebige Schülerin was ein Knoten ist. Diese Frage wird anschließend von mehreren Schülern und Schülerinnen beantwortet und die Antworten werden anschließend verglichen. Bei der Einführung der Knotentheorie gibt es einige Hindernisse für Schüler und Schülerinnen, auf die unbedingt aufmerksam gemacht werden muss. Wenn man in der Schule erstmals von einem Knoten spricht, so denken Schüler und Schülerinnen meist an einen alltäglichen Knoten, den sie bereits kennen. Mit dem Begriff Knoten wird meist jeder mögliche Knoten in Verbindung gesetzt, sei es ein verknoteter Schnürsenkel oder ein Seemannsknoten. Nun unterscheidet sich der mathematische Knoten von diesem alltäglichen Knoten jedoch sehr und deshalb ist es wichtig dies vorab richtig zu definieren und den Schülern und Schülerinnen zu erklären. Deshalb wird in dieser Phase festgestellt welche Definition von Knoten die Schüler und Schülerinnen bereits kennen, um an diese dann anzuknüpfen zu können, um den mathematischen Knoten anschließend zu

definieren. Damit wird der Unterschied zwischen einem mathematischen Knoten und einem alltäglichen Knoten besser herausgehoben.

Man geht hier davon aus, dass die Schüler und Schülerinnen bei der Frage was ein Knoten eigentlich ist, einen alltäglichen Knoten definieren werden. Natürlich kann man ein Gespräch im Vorhinein nicht planen und es könnte auch sein, dass ein Schüler oder eine Schülerin einen mathematischen Knoten definiert. Dies wäre jedoch auch in Ordnung, da man als Zusammenfassung dieser Phase alle Antworten vergleichen wird und Unterschiede in den einzelnen Definitionen herausheben und besprechen wird. Als Überleitung zur dritten Phase erklärt die Lehrperson nun, dass im weiteren Verlauf der mathematische Knoten genauer definiert und betrachtet wird.

In der dritten Phase **3) Informieren** geht es nun darum, den mathematischen Knoten zu definieren. Dafür erhält jeder Schüler und jede Schülerin vorab ein Gummiband. Nun werden vorerst in Partnerarbeit (jeweils zu zweit) Eigenschaften des Gummibandes in Form eines Mind-Maps von den Schülern und Schülerinnen gesammelt und im Schulheft notiert. Diese gesammelten Eigenschaften werden nun zusammengefasst und an der Tafel / Flipchart von der Lehrperson festgehalten. Dies soll dazu dienen sich an den Begriff des Knotens in der Mathematik anzunähern. Anschließend wird in den nächsten fünf Minuten die genaue Definition eines mathematischen Knotens von der Lehrperson angegeben. Dafür erklärt die Lehrperson Folgendes (**4) Informieren**):

„Stelle man sich vor man nehme sich eine Schnur und verschlinge diese nach Belieben. Anschließend füge man die beiden Endpunkte der Schnur so zusammen, dass nicht mehr zu erkennen ist, dass die Schnur an dieser Stelle vorher unterbrochen war. Stelle man sich nun die Schnur unendlich dünn und unendlich dehn- und zusammenziehbar vor, so haben wir nun einen Knoten im mathematischen Sinne erklärt.“ (Gratzer und Neumaier 2014, S. 59)

Dies soll dazu dienen, dass sich die Schüler und Schülerinnen ein genaues Bild von einem mathematischen Knoten machen können. Anschließend wird der Knoten als einfacher geschlossener Polygonzug im dreidimensionalen Raum definiert, um Wilde Knoten gleich auszuschließen. Dies wird von der Lehrperson an die Tafel / Flipchart geschrieben und die Schüler und Schülerinnen sollen dies in das Schulheft übernehmen. Außerdem schreibt die Lehrperson folgende drei Bedingungen, die ein mathematischer Knoten erfüllen muss an die Tafel und wieder werden diese von den Schülern und Schülerinnen in das Schulheft übernommen:

- Kein Anfangs- und Endpunkt
- Keine Dicke / unendlich dünn
- Unendlich dehn- und zusammenziehbar

Die Lehrperson verweist darauf, dass mathematische Knoten oftmals als Projektionen von Kurven und nicht als Polygonzüge dargestellt werden, da intuitiv klar ist, dass jede Kurve von einem Polygonzug angenähert werden kann.

Nachdem der mathematische Knoten definiert ist, wird nun der Begriff des Unknotens eingeführt und definiert (**5 Informieren**). Dieser Begriff wird auch auf die Tafel / Flipchart geschrieben und dazu werden folgende Abbildungen an die Tafel / Flipchart gemalt. Dies wird wiederum von den Schülern und Schülerinnen in das Schulheft übernommen.

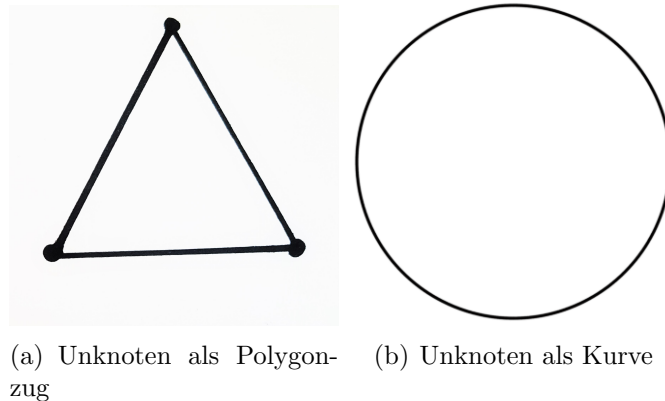


Abbildung 32: Darstellung von Unknoten

In der nächsten Phase **6) Verarbeiten** werden nun Beispiele zu den gerade gelernten Definitionen durchgeführt. Diese Beispiele werden wieder in Partnerarbeit (zu zweit) bearbeitet, sodass sich die Schüler und Schülerinnen über ihre Denkweisen und Schlussfolgerungen austauschen können. Auf dem Arbeitsblatt (Arbeitsblatt 1) sind Projektionen von alltäglichen Knoten und Projektionen von mathematischen Knoten zu sehen. Die Schüler und Schülerinnen sollen nun entscheiden, ob es sich um mathematische Knoten handelt oder nicht. Weiteres sollen sie ihre Entscheidungen begründen können. Anschließend werden die Beispiele in Form eines Schüler-Lehrer-Gespräches verglichen und falls nötig korrigiert.

Anschließend (**7 Verarbeiten**) erhält jeder Schüler und jede Schülerin eine Schnur ohne Anfangs- und Endpunkt. Nun sollen die Schüler und Schülerinnen

verschiedene Knoten, die von der Lehrperson vorgegeben werden, mit der Schnur nachlegen. Falls es möglich ist diese Knoten mit der Schnur nachzulegen ist klar, dass es sich dabei um einen Unknoten handelt, ist dies nicht der Fall, so handelt es sich nicht um einen Unknoten. Auch dies wird in Form eines Schüler-Lehrer-Gesprächs durchgeführt. Jeder Knoten wird einzeln von der Lehrperson vorne an die Leinwand projiziert oder an der Tafel / Flipchart dargestellt. Die Schüler und Schülerinnen probieren diese nachzustellen und entscheiden dann gemeinsam, ob es sich um einen Unknoten handelt oder nicht. Zusätzlich erhalten die Schüler und Schülerinnen das Arbeitsblatt 2, wo alle von der Lehrperson gezeigten Unknoten abgebildet sind, um auch dort entscheiden zu können, ob es sich um Unknoten handelt oder nicht.

Nach der Pause (**8 Verarbeiten**) werden nun wieder dieselben Knoten betrachtet, wie im Abschnitt vorhin. Alle Knoten, die vorher als Unknoten bezeichnet wurden werden nun nochmals aufgegriffen. Erneut werden die Knoten mit der Schnur nachgelegt, doch nun sollen die nachgelegten Knoten schrittweise wieder entknotet werden. Jeder Schritt, der ausgeführt wird, soll von den Schülern und Schülerinnen genau festgehalten werden. Am Arbeitsblatt 3 sind diese Knoten abgebildet. Bei jedem der Knoten soll nun graphisch genau festgehalten werden, welche Schritte benötigt werden, um die Knoten in Unknoten umzuformen. Anschließend werden die Schritte der Schüler und Schülerinnen an der Tafel / Flipchart zusammengefasst und nochmals aufgegriffen. Dabei soll für die Schüler und Schülerinnen ersichtlich werden, dass es sich stets um dieselben drei Bewegungen handelt. Dies soll als Einleitung, beziehungsweise Einführung der Reidemeister-Bewegungen dienen, die im nächsten Abschnitt genau definiert werden.

Nun werden die Reidemeister-Bewegungen genau von der Lehrperson definiert und an der Tafel / Flipchart abgebildet (**9 Informieren**). Die drei Arten der Reidemeister-Bewegungen werden aufgelistet und durch Grafiken oder Zeichnungen unterstützt und von den Schülern und Schülerinnen in das Schulheft übernommen. Die Definition der Reidemeister-Bewegungen sind in **Kapitel 4.1** dieser Arbeit definiert und können hierfür verwendet werden.

Im nächsten Abschnitt (**10 Verarbeiten**) erhalten die Schüler und Schülerinnen nun noch ein Arbeitsblatt (Arbeitsblatt 4), wo verschiedene Typen von Reidemeister-Bewegungen dargestellt sind. Die Schüler und Schülerinnen sollen nun feststellen, um welchen Typ der Reidemeister-Bewegungen es sich handelt und dies am Arbeitsblatt angeben. Dies dient vor allem dazu, die drei Typen der









Reidemeister-Bewegungen zu verinnerlichen und anzuwenden.

Im letzten Abschnitt (**11 Auswerten**) der Doppelstunde werden nun nochmals alle neu gelernten Inhalte in Form eines Schüler-Lehrer-Gesprächs gemeinsam wiederholt. Es werden die Ergebnisse der Arbeitsblätter und Erkenntnisse nochmals aufgegriffen und verinnerlicht.

Arbeitsblatt 1

Einführung in die Knotentheorie









Handelt es sich bei den folgenden Projektionen von Knoten um einen wie von uns definierten mathematischen Knoten oder nicht? Kreise ein und begründe!

			
JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN
Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____
			
JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN
Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____	Begründung: _____ _____ _____

Arbeitsblatt 2

Einführung in die Knotentheorie





Probiere die vorgegebenen Knoten mit deiner Schnur nachzulegen und entscheide dann, ob es sich um einen Unknoten handelt oder nicht.

			
JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN
			
JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN	JA / NEIN

Arbeitsblatt 3

Umformen von Knoten in Unknoten

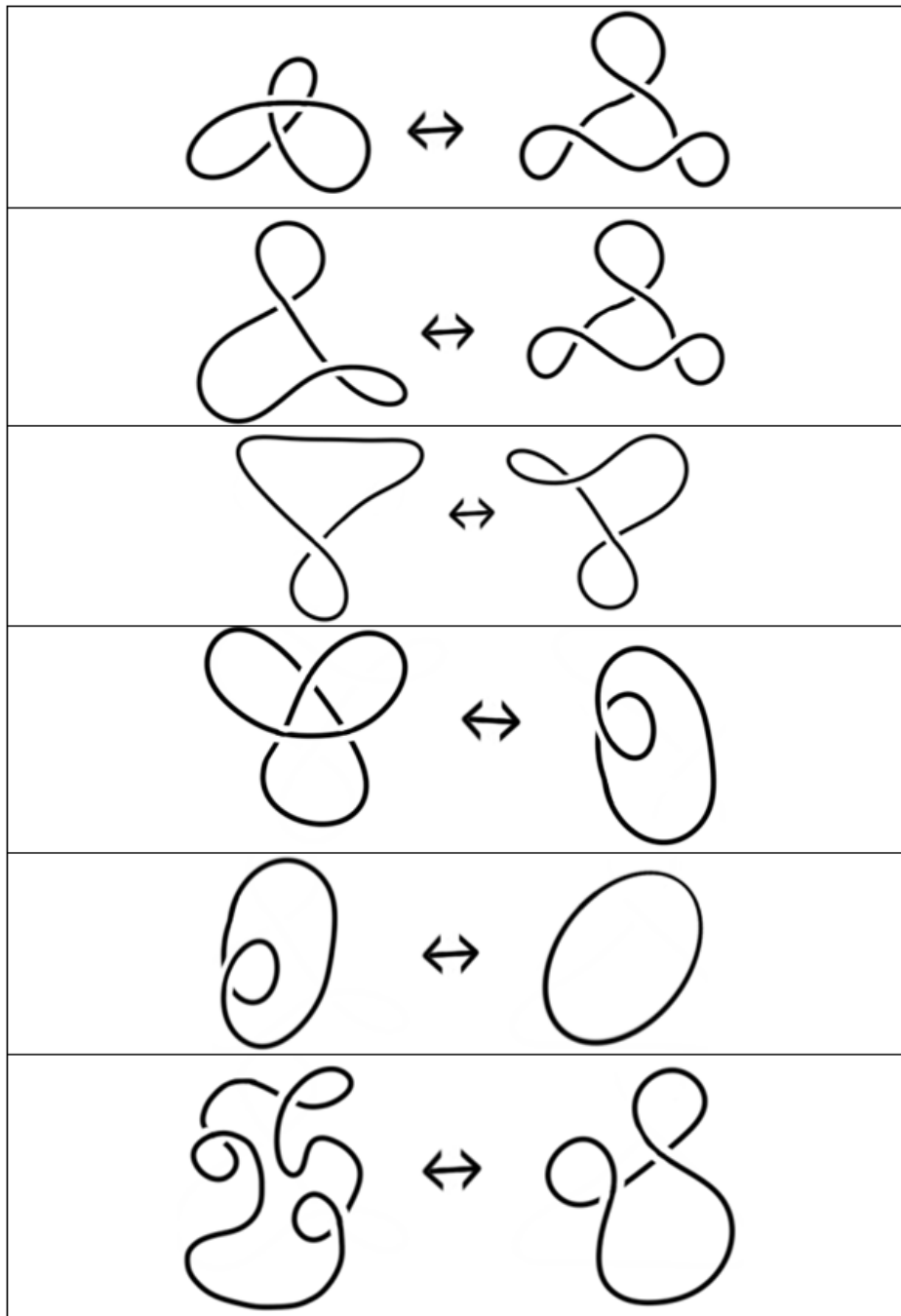
Lege die Knoten vorerst mit deiner Schnur nach. Anschließend wird die Schnur wieder entknotet und schrittweise zurück in den Unknoten umgeformt. Halte dabei jeden deiner Umformungsschritte zeichnerisch fest.

	
<p>Schrittweise Entknotung:</p>	<p>Schrittweise Entknotung:</p>
	
<p>Schrittweise Entknotung:</p>	<p>Schrittweise Entknotung:</p>

Arbeitsblatt 4

Reidemeister-Bewegungen

Entscheide, um welchen der drei Typen von Reidemeister-Bewegungen es sich handelt. Beschrifte dazu jeden Pfeil entweder mit Typ 1, Typ 2 oder Typ 3.



9 Literatur

1. Adams, Colin: *Das Knotenbuch. Einführung in die mathematische Theorie der Knoten*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, 1995.
2. Brændli, Rudolf 2014: <http://www.prokom.ch/schulung/wins/ariva.html>. zuletzt zugegriffen, am 15.04.2020.
3. Epple, Moritz: *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*. Mainz: o.V., 1998.
4. Haftendorn, Dörte: *Diskret verknotet Knotentheorie und diskrete Mathematik*. 2014.
5. Livingston, Charles 1995: *Knotentheorie für Einsteiger*. Aufl. 1, Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.
6. Rechtsinformationssystem des Bundes. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe&Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>. zuletzt zugegriffen, am 14.04.2020.
7. Stephen Klassen, Sarah Dietrich und Cathrine Froese Klassen: *Biographie von Sir William Thomson, Baron Kelvin of Largs*: 2013, Seite 1-3.
8. Springer, Axel: Zehn wichtige Durchbrüche. <https://www.welt.de/wissenschaft/gallery1529920/Zehn-wichtige-Durchbrueeche.html>. zuletzt zugegriffen, am 23.04.2020.
9. Veyhelmann, J. 2011. Das Alexander-Polynom: Eine Knoteninvariante. Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
10. Wolfgang Gratzler/Otto Neumaier (Hg.): *Der Gordische Knoten. Lösungsszenarien in Wissenschaft und Kunst*. Wien–Münster: Lit, 2014, Seite 55–72.

10 Anhang

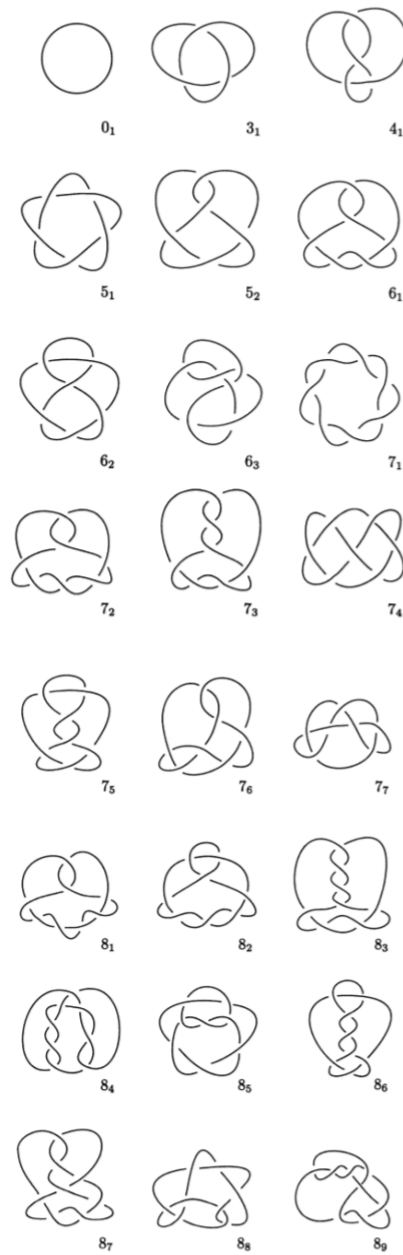


Abbildung 33: Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)

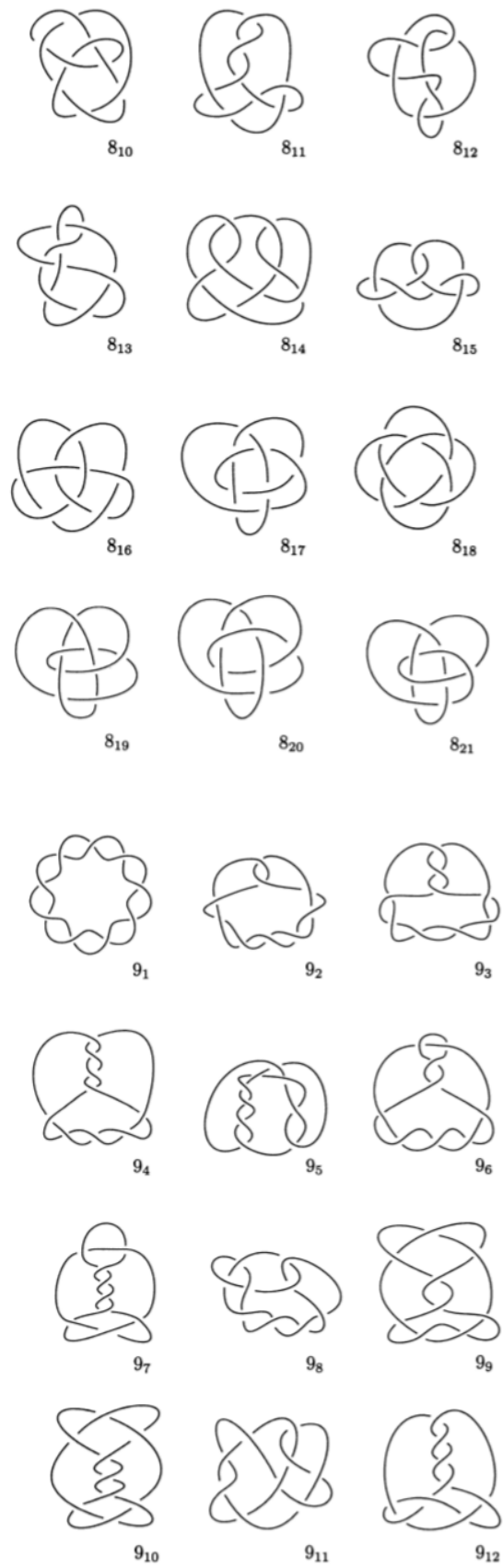


Abbildung 34: Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)

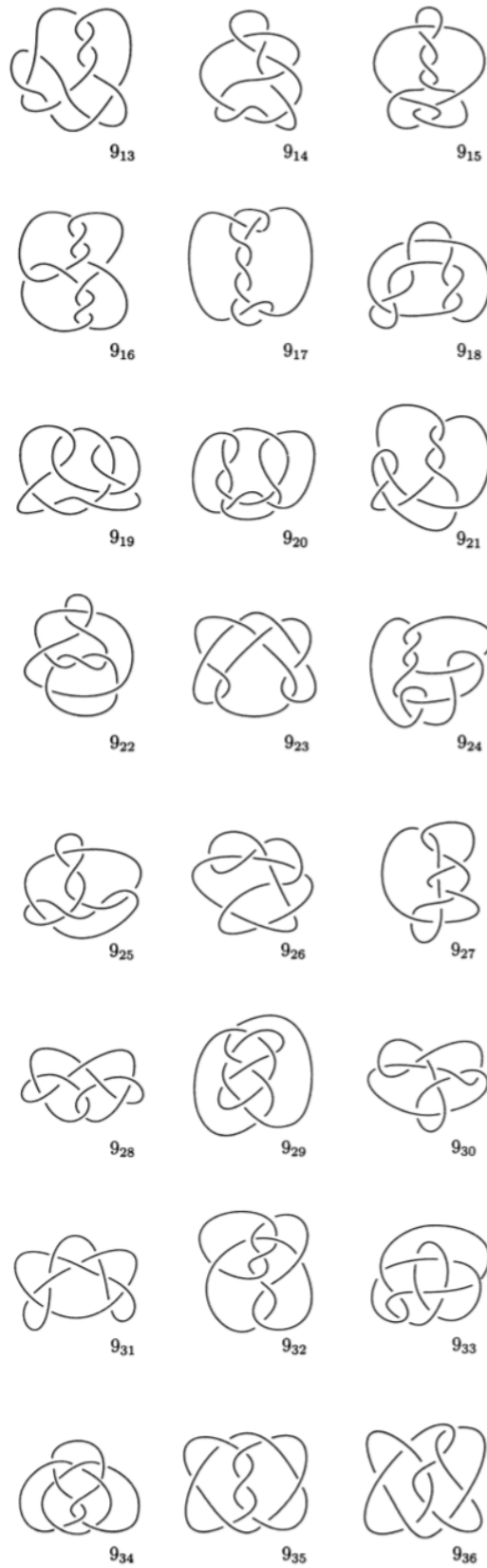


Abbildung 35: Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)

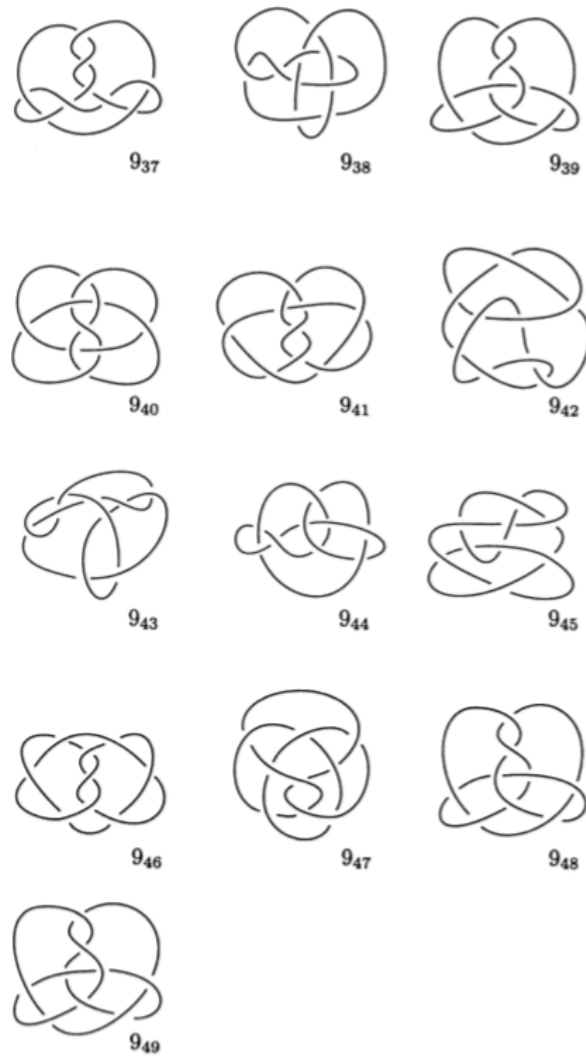


Abbildung 36: Knotentafel nach Tait (aus Livingston 1995)