UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Diplomarbeit

Eine neue Variante der Oberschelp'schen Klassenlogik

Milon Renatus Brunner

März 2019
überarbeitete 2. Version

Betreuende Hochschullehrer:

Prof. Dr. Tim Netzer
Prof. Dr. Manfred Droste

Man begnügt sich ja meistens damit, dass jeder Schritt im Beweise als richtig einleuchte, und das darf man auch, wenn man nur von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes überzeugen will. Wenn es sich aber darum handelt, eine Einsicht in die Natur dieses Einleuchtens zu vermitteln, genügt dies Verfahren nicht, sondern man muss alle Zwischenstufen hinschreiben, um das volle Licht des Bewusstseins auf sie fallen zu lassen. Den Mathematikern kommt es ja gewöhnlich nur auf den Inhalt des Satzes an, und dass er bewiesen werde. Hier ist das Neue nicht der Inhalt des Satzes, sondern wie der Beweis geführt wird, auf welche Grundlagen er sich stützt.

Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*

Vorwort

In dieser Arbeit haben sich die drei folgenden Schwerpunkte herauskristallisiert:

1. Der Hauptgegenstand dieser Arbeit ist eine neue Variante der von Jürgen-Michael Glubrecht, Arnold Oberschelp und Günter Todt in den 70er Jahren entwickelten Klassenlogik. Sie soll vorgestellt, analysiert und mit der ursprünglichen Form verglichen werden.

2. Um die Untersuchungen auf einer sicheren Grundlage zu führen, schien es mir nötig, einen exakten Kalkül-Begriff einzuführen und dem Hauptteil der Arbeit ein paar allgemeine Überlegungen zu logischen Systemen und Kalkülen vorauszuschicken. Dies hat auch zu einem Programmentwurf für einen Proof-Checker geführt, der im Anschluss an diese Arbeit implementiert werden soll.

3. Im Verlaufe der Auseinandersetzung wurde ich dahin gedrängt, einige eigene Notationen und Begrifflichkeiten einzuführen. Von Vereinheitlichungsbedürfnissen getrieben, konnte ich mich, darauf aufbauend, dann nicht mehr zurückhalten, auch einige Standardsymbole (wie etwa die Funktionsanwendungsklammern) abzuändern.

Wenngleich diese drei Bestandteile nicht unabhängig voneinander dargestellt sind, bitte ich den Leser darum, sie getrennt voneinander zu beurteilen. Insbesondere möge eine Kritik an meinen Notations-Entscheidungen nicht auf die Klassenlogik übertragen werden.

An dieser Stelle möchte ich nun noch ein paar Worte des Dankes anschließen.

Zuallererst sei natürlich Glubrecht, Oberschelp und Todt für das Herausarbeiten der Klassenlogik in ihrer modernen Form gedankt. Ihr 1983 erschienenes Hauptwerk *Klassenlogik* [GOT83] ist die wichtigste Quelle dieser Arbeit.

Weiter danke ich meinen Betreuern Prof. Dr. Tim Netzer und Prof. Dr. Manfred Droste, die mir einerseits vollkommen freie Hand ließen und andererseits bei Fragen und Problemen, welcher Art auch immer, jederzeit zur Verfügung standen.

Ein besonderer Dank gilt meinem Studienkollegen Laurens Wittchow, der mir die erste Begegnung mit der Klassenlogik verschafft hat. Mit ihm konnte ich in vielen Stunden und Spaziergängen über die großen Bögen und die kleinen Details diskutieren.

Abschließend möchte ich Gottlob Frege, einem Schöpfer und Vordenker der modernen Logik, meine Verehrung aussprechen. Seine anregenden Worte und Werke sind noch heute in ihrer Schärfe und Feinfühligkeit, insbesondere im Hinblick auf eine Einordnung ins Große und Ganze, ein wichtiger Ausgangspunkt.

Milon Brunner, Leipzig, Januar 2019 Mail: milon@pelea.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung folgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen Fachwerkes von Begriffen in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts anderes als die Theorie des Wissensgebietes. … Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, daß der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen.*
>
> David Hilbert, *Axiomatisches Denken*

Das vergangene Jahrhundert hat gezeigt, dass ein rigoros axiomatischer Aufbau der gesamten Mathematik prinzipiell möglich ist. Ausgehend von den Systemen von Frege, Russel, Zermelo und anderen sind dabei im Wesentlichen drei Fundierungsansätze entstanden:

a) Mengenlehre b) Typentheorie c) Kategorientheorie[1]

Es wird sich wohl keiner dieser Ansätze als die vollkommen überlegene Herangehensweise durchsetzen. Vielmehr wird man unter verschiedenen Gesichtspunkten verschiedene Herangehensweisen bevorzugen. Wir wollen nicht weiter auf die Ansätze b) und c) eingehen, sondern nur andeuten, wie sich a), die axiomatische Mengenlehre, unter den beiden folgenden Gesichtspunkten verhält:

i) Einfachheit in den Grundlagen / im Ausgangspunkt

ii) Natürlichkeit in der Anwendung / im Aufbau

Unter axiomatischer Mengenlehre wird für gewöhnlich die auf den Zermelo-Fraenkel-Axiomen (kurz ZFC) aufbauende prädikatenlogische Theorie 1. Stufe verstanden. Ohne Frage ist insbesondere die Semantik (um die es ja letztendlich geht) dieses Systems von sehr einfacher Gestalt: die Modelle von ZFC sind gegeben durch eine Gesamtheit U von Gegenständen (die „Mengen“) und eine zweistellige Relation $\in$ auf U (die „Elementbeziehung“), die den in den Axiomen formulierten Bedingungen genügen muss. Gerade durch die semantische Einfachheit ist ZFC ein dankbarer Gegenstand für die metatheoretischen Untersuchungen der Modelltheorie. Weiter glaube ich, dass es eine hervorhebungswürdige Eigenschaft der Mengenlehre ist, dass die für eine exakte Definition und elementare Meta-Untersuchungen notwendige Metatheorie mengentheoretisch

[1] Hier sei beispielsweise die von Lawvere in [Law64] formulierte Elementary Theory of the Category of Sets (ETCS) erwähnt.

verhältnismäßig leicht und natürlich zu fassen ist;[2] wir haben es mit einer Objekt- und einer Hintergrundmengenlehre zu tun. Da ein absolutes, voraussetzungsloses Fundament der Mathematik niemals zu finden ist, scheint es mir im Hinblick auf die Erkenntnissicherheit ein erstrebenswertes Ideal zu sein, dass sich in der Formulierung des unbegründeten Ausgangspunktes die Objekt- und die Meta-Ebene so weit wie möglich und natürlich nahekommen.[3]

Wie sieht es nun aber mit dem zweiten Gesichtspunkt aus? Ist eine Zurückführung der gesamten Mathematik auf die prädikatenlogische ZFC-Mengenlehre natürlich?

Hier finden sich sehr schnell einige Einwände:

1. In ZFC sind alle Gegenstände Mengen. Insbesondere werden wir also auch die reellen Zahlen als Mengen auffassen müssen. Es ist somit sinnvoll nach den Elementen von π zu fragen. Dies passt jedoch nicht zu der intuitiven Vorstellung, die wir von den reellen Zahlen haben; reelle Zahlen haben keine Elemente. Aufgrund des Extensionalitätsaxioms gibt es jedoch in ZFC nur einen elementlosen Gegenstand: die leere Menge.

   Ein gangbarer Ausweg aus diesem „Problem" ist eine ZFC-Variante mit Urelementen, d.h. mit Nicht-Mengen, die natürlich auch keine Elemente haben.

2. In der prädikatenlogischen Sprache der ZFC-Mengenlehre sind die Variablen die einzigen Terme. Im Gegensatz dazu verwenden wir im intuitiven Mathematisieren eine sehr termreiche Sprache, auch wenn wir mengentheoretisch gefärbte Objekte vor Augen haben. So sind etwa Terme der Form

   $$A \cup B, \quad f(x), \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \prod_{i \in I} A_i, \quad \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \geq 5\}$$

   omnipräsent in allen Bereichen der Mathematik. Die ersten drei von ihnen lassen sich leicht per prädikatenlogischer Definitionserweiterung in die ZFC-Syntax aufnehmen.[4] Sowohl der Produktbildungsoperator $\prod_{v \in I} A(v)$, als auch der Mengenbildungsoperator $\{v \in I\,;\ \varphi(v)\}$ bereiten mehr Probleme.[5] Durch die Abhängigkeit von einer Bindungsvariablen v lassen sie sich nicht als Signatur-erweiternde Funktionssymbole realisieren. Natürlich könnte man jede konkrete Instanz (wie etwa $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i$ oder $\{n \in \mathbb{N}\,;\ n \geq 5\}$) dieser Operatoren als Konstantensymbole auffassen; dies verschiebt jedoch den Zusammenhang der durch diese Operatoren entstehenden Terme auf die Meta-Ebene und ist in konkreten Situationen sicherlich nicht sehr praktisch. Üblicherweise fasst man derartige Operatoren daher als „informal notions" auf, die noch eliminiert werden müssen, um einen exakten prädikatenlogischen Ausdruck zu erhalten.

   Um eine termreichere Sprache zu verwenden, ließe sich auch eine Prädikatenlogik mit Kennzeichnungsoperator ι verwenden. Der Kennzeichnungsoperator entspricht dem bestimmten Artikel und bezeichnet den durch eine eindeutige (d.h. auf genau einen Gegenstand zutreffende) Eigenschaft $\varphi(v)$ bestimmten Gegenstand durch $\iota v \varphi(v)$. Hierbei stoßen wir jedoch auf das Problem, wie wir mit uneigentlichen Kennzeichnungen, d.h. wenn $\varphi(v)$ keine eindeutige Eigenschaft ist, umgehen sollen.

[2] Dies wird hoffentlich auch in dieser Arbeit erlebbar. Alle metatheoretischen Definitionen und Überlegungen zur Klassenlogik sind so geführt, dass es unmittelbar nachvollziehbar sein sollte, wie sie *in* der exakten klassenlogischen Sprache zu formulieren wären.

[3] Mir schwebt das Bild eines sich in seiner Bewegung selbsterhaltenden Doppelstern-Systems vor Augen.

[4] Die Vereinigung und Funktionsanwendung als zweistellige Funktionssymbole, die Potenzmenge der natürlichen Zahlen als Konstantensymbol oder als auf ein Konstantensymbol ($\mathbb{N}$) angewendetes Funktionssymbol ($\mathcal{P}$).

[5] Hierbei stehe v für eine Variable, I und $A(v)$ für Terme und $\varphi(v)$ für einen Ausdruck. In den interessanteren Fällen kommt die Variable v in $A(v)$ bzw. $\varphi(v)$ frei vor.

3. Manchmal wollen wir über Gesamtheiten sprechen, die zu groß sind, um sie als Mengen aufzufassen. Sie werden üblicherweise als echte Klassen bezeichnet. So sind zum Beispiel die Gesamtheit aller Gruppen, aller Ordinalzahlen oder aller Mengen echte Klassen. Wenngleich man in ZFC nicht direkt über echte Klassen sprechen kann, führt man dennoch häufig entsprechende Redeweisen ein, die man dann als „informal notions“ auffasst, die in einer exakten Formalisierung zu eliminieren sind.

   Mit NBG (Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre) und MK (Morse-Kelley-Mengenlehre) gibt es Erweiterungen von ZFC, die von Anfang an mit Klassen umgehen können.

4. Theoreme (samt ihren zugehörigen Beweisen) bzgl. anderen prädikatenlogischen Axiomensystemen (wie beispielsweise der in der Peano-Arithmetik beweisbare Satz von den unendlich vielen Primzahlen) lassen sich nicht unmittelbar in ZFC benutzen. Vielmehr müssen die Beweise noch einmal innerhalb von ZFC geführt werden. Hierbei hilft natürlich der schon geführte Beweis.

Um Unzulänglichkeiten dieser Art zu beheben und eine natürlichere formale Mengenlehre zu ermöglichen, haben Jürgen-Michael Glubrecht, Arnold Oberschelp und Günter Todt in den 70er Jahren die Klassenlogik entwickelt.[6] Sie ist eine konservative Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe und somit prinzipiell für die Beschreibung vieler mathematischer Strukturen geeignet. Konzipiert ist sie jedoch ohne Frage als logischer Rahmen für einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik. Der wesentliche Unterschied zur Prädikatenlogik besteht darin, dass eine Elementrelation $\in$ und ein Klassenbildungsoperator $\{\cdot;\cdot\}$ zu den Grundoperatoren $\neg$, $\wedge$, $\forall$, $=$ hinzugefügt wurden und somit Ausdrücke der Gestalt

$$a \in b$$

und Klassenterme

$$\{v;\varphi\} \qquad \text{(zu lesen als „die Klasse aller } v \text{ mit } \varphi\text{“)},$$

ein *allgemeiner* Bestandteil der klassenlogischen Syntax sind. In der Klassenlogik lässt sich also nicht nur über Individuen (die wir Gegenstände 1. Stufe nennen wollen), sondern auch über Klassen von Individuen sprechen. Man könnte daher vermuten, dass es sich um eine zweitstufige Logik handelt und deshalb kein vollständiger Beweiskalkül existiert. Glubrecht, Oberschelp und Todt haben jedoch gezeigt, dass sich bei geschickter Definition der Semantik ein vollständiger Beweiskalkül angeben lässt. Allerdings erkauft man sich die Vollständigkeit des Beweiskalküls mit den aus der Prädikatenlogik erster Stufe bekannten Nichtstandardmodellen. Wir werden später sehen, dass wir die Klassenlogik sowohl als echte zweitstufige Logik, als auch als erststufige Logik (mit einem vollständigen Beweiskalkül) verwenden können.

Ein grundsätzlicher Unterschied zur Prädikatenlogik 2. Stufe ist jedoch, dass in der Klassenlogik manche Klassen auch Gegenstände 1. Stufe sein können. Derartige Klassen nennen wir dann Mengen. Es lassen sich somit unter Umständen Klassen von Klassen bilden. Da die Klassenlogik als logischer Rahmen keine Existenzaxiome beinhalten soll, wird aber für keine Klasse allgemein gefordert, dass sie eine Menge ist. Es sind daher auch sehr triviale klassenlogische Strukturen mit keinem Gegenstand 1. Stufe möglich.[7] (Siehe Unterabschnitt 2.2.1.) Andererseits lässt sich durch Zusatzaxiome, in denen von manchen Klassen gefordert wird, dass sie Gegenstände 1. Stufe, d.h. Mengen sind,[8] ein großer Reichtum an Gegenständen 1. Stufe erreichen. Insbesondere lassen sich die ZFC-Axiome fordern, wodurch klar ist, dass eine klassenlogische Fundierung der Mathematik

[6] Das erste klassenlogische System wurde von Oberschelp in [Obe74] aufgestellt. Daher werde ich im Folgenden auch von der Oberschelp'schen Klassenlogik sprechen.

[7] Zumindest in der in dieser Arbeit entwickelten Variante der Klassenlogik. Vgl. dazu Abschnitt 2.4.

[8] Die Forderung, dass *alle* Klassen Gegenstände 1. Stufe sind, ist nach der Russel'schen Antinomie inkonsistent.

grundsätzlich möglich ist. In seinem Buch *Allgemeine Mengenlehre* [Obe94, S. 263] äußert Oberschelp die Überzeugung, dass eine klassenlogische Sprache für eine systematische Entwicklung der Mengenlehre nicht nur praktisch und natürlich, sondern sogar unausweichlich ist:

> „Es zeigt sich allerdings, daß die prädikatenlogische Sprache niemals weiter als über die Formulierung der Axiome hinaus wirklich durchgehalten wird. Die Behauptung es handele sich bei der prädikatenlogischen Sprache mit der zweistelligen Relationskonstanten $\in$ um ‚die Sprache der Mengenlehre', ist ganz einfach Fiktion. Die prädikatenlogische Sprache ist vielmehr nicht geeignet, die Entwicklung der Mengenlehre wirklich zu tragen. Dafür ist die klassenlogische Sprache (und zwar auch im Fall der fundierten und reinen Mengenlehre) einfach unausweichlich. Die klassenlogischen Sprechweisen machen darüber hinaus deutlich, daß es den intuitiven Vorstellungen entspricht, Klassen auch als Objekte zu behandeln. ...
>
> Als Basislogik für die Mengenlehre wird jedoch gewöhnlich die Prädikatenlogik genommen. Strenggenommen muß man dann nachweisen, daß die erweiterten klassenlogischen Ausdrucksmittel (die man ja benutzt) sich in Formeln zugunsten rein prädikatenlogischer Ausdrucksmittel eliminieren lassen. Daß lässt sich, wenn keine Klassenlogik vorausgesetzt wird, nicht einfach durch ... [einen knappen Hinweis] erledigen. Vielmehr ist es (selbst wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß alle Objekte Klassen sind) durchaus aufwendig ... und unterbleibt deshalb oft.
>
> Bisweilen findet man eine ‚halbklassenlogische' Sprache ..., in der Klassenterme $\{x|\varphi(x)\}$ zwar nicht als eigenständige Terme erlaubt sind, aber immerhin als Bestandteile von Formeln vorkommen können. Man hat dann mindestens Formeln der Art $y \in \{x|\varphi(x)\}$ mit dem Abstraktionsschema $y \in \{x|\varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(y)$ als logisches Axiom. Klassenterme links von $\in$ und in Gleichungen können als weitere Formeln (mit entsprechenden Axiomen) erlaubt sein oder auch als Abkürzungen auftreten. Ein gewisser Mangel dieser Auffassung ist es, daß Klassenterme nicht als eigenständige Ausdrücke zugelassen sind, was dem intuitiven Verständnis entsprechen würde. Der Hauptmangel ist jedoch, daß es eine ‚Basislogik', auf die man sich dann stützen könnte, eigentlich nirgendwo gibt. ...
>
> Dagegen scheint mir, daß die Klassenlogik ... eine geeignete Basislogik für die Mengenlehre ist. Die Klassenlogik ist eine konservative Erweiterung der Prädikatenlogik und benutzt wie diese einen allgemeinen Individuenbegriff, ohne voraussetzen zu müssen, alle Objekte seien Klassen. Sie gehört ebenso zur Logik der ersten Stufe und hat eine ebenso präzise Semantik, wie es bei der Prädikatenlogik der Fall ist. Darüber hinaus kommt sie der Intuition entgegen, da sie alle Klassenterme mit Denotaten versieht."

Mir scheinen die klassenlogische und die prädikatenlogische Mengenlehre gar nicht direkt miteinander konkurrieren zu müssen; vielmehr ergänzen sie sich. Für allgemeine modell- und beweistheoretische Untersuchungen haben sich die prädikatenlogischen Formulierungen der Mengenlehre als sehr fruchtbar erwiesen. Ob auch die Klassenlogik hier einen Beitrag leisten kann, muss sich erst noch zeigen. Die große Stärke der Klassenlogik sehe ich, wie Oberschelp, in der ausdrucksstarken Sprache, die einen natürlichen und zugleich präzisen Aufbau der Mathematik ermöglicht. Die Spanne der Anwendbarkeit erstreckt sich dabei von einer unscheinbaren Hintergrundlogik, die vor allem für einheitliche und präzise Definitionen genutzt wird, bis zu einer vollständig axiomatisierten Bibliothek mathematischer Beweise (wie etwa in Bourbakis Hauptwerk „Éléments de mathématique“ oder auch im computerverifizierbaren Mizar-System).[9] In jedem Falle stellt die klassenlogische Mengenlehre ein viel zu wenig beachtetes Mitglied in der Familie der mengentheoretischen Fundierungsansätze der Mathematik dar.

Was ist nun aber das konkrete Ziel dieser Arbeit?

Im Wesentlichen soll hier eine neue Variante der Oberschelp'schen Klassenlogik vorgestellt werden, die, meiner Meinung nach, in Bezug auf die beiden oben angesprochenen Gesichtspunkte (Einfachheit in den Grundlagen und Natürlichkeit in der Anwendung) eine weitere Verbesserung darstellt. Der Ausgangspunkt hierzu war die Beobachtung, dass es sich auch in der von Oberschelp formulierten klassenlogischen Variante von ZFC beim Aussonderungsaxiom (wie auch beim Ersetzungsaxiom) um ein Schema handelt. Der intuitive Gedanke hinter dem Aussonderungsaxiom ist der folgende: „Alle Teilklassen von Mengen sind Mengen.“ Das Problem dabei ist, dass über Klassen quantifiziert wird. Da auch in der Oberschelp'schen Klassenlogik nur über Gegenstände 1. Stufe quantifiziert werden kann und nicht über Gegenstände 1. und 2. Stufe (zu denen auch alle Klassen von Gegenständen 1. Stufe gehören), muss man auch dort ein Axiomen-Schema verwenden: Für jede durch eine Formel $\varphi(x)$ beschriebene Klasse hat man das (hier informell angegebene) Axiom

$$\text{„Für alle Mengen } A \text{ ist auch } \{x\,;\; x \in A \wedge \varphi(x)\} \text{ eine Menge.“}$$

Mein Ausgangsfrage war daher:

Lässt sich eine Variante der Klassenlogik formulieren, in der der Allquantor über Gegenstände 1. *und* 2. Stufe quantifiziert, die jedoch noch immer einen adäquaten (d.h. korrekten und vollständigen) Beweiskalkül besitzt?

Mit dieser Arbeit kann diese Frage bejaht werden. Es ist eine unmittelbare Folge des mächtigeren Allquantors, dass sich in dieser Klassenlogik die ZFC-Mengenlehre endlich axiomatisieren lässt. Genau genommen handelt es sich durch den zur Verfügung stehenden Begriff der Klasse nicht um ein klassenlogisches Analogon von ZFC, sondern um ein Analogon der Morse-Kelley-Mengenlehre (MK)[10], einer echten Erweiterung von ZFC, die aber in der Prädikatenlogik 1. Stufe auch nicht endlich axiomatisierbar ist. In gleicher Weise lassen sich auch die Peano-Axiome anders als in der Prädikatenlogik 1. Stufe durch endlich viele Axiome ausdrücken.

Da im Verlaufe meiner Auseinandersetzung mit der Klassenlogik noch weitere Anpassungen hinzugekommen sind, habe ich mich dazu entschlossen, in dieser Arbeit zunächst die von mir angepasste Version der Klassenlogik unabhängig von der ursprünglichen Version Oberschelps darzustellen. Im Anschluss daran wird dann in Abschnitt 2.4 auf alle konkreten Änderungen gegenüber der Oberschelp'schen Version einzeln eingegangen.[11]

[9] In Kapitel 4 dieser Arbeit wird angedeutet, wie eine solche klassenlogische Bibliothek begonnen werden könnte. (Man beachte auch den auf Seite 31 exakt definierten Begriff der Bibliothek.) Zudem ist mit dem den Ausdrucks- und den Beweiskalkül der Klassenlogik umfassenden „großen vereinheitlichten Kalkül“ in Kapitel 5 eine Grundlage für eine maschinenverifizierbare klassenlogische Bibliothek gelegt.

[10] Wir werden MK in Abschnitt 4.4 kurz vorstellen.

[11] Dem mit der Oberschelp'schen Klassenlogik vertrauten Leser ist deshalb zu empfehlen, zunächst einen Blick auf diese Änderungen zu werfen.

Ich möchte nun noch ein paar Worte zur Gliederung dieser Arbeit verlieren:

- In Kapitel 1 werden in erster Linie Notationen eingeführt und ein exakter Kalkül-Begriff vorgestellt. Da ich das Experiment gewagt habe, auch einige Standard-Notationen abzuändern, bitte ich den Leser darum, dem Notationsabschnitt mehr Aufmerksamkeit als üblich zu schenken. Der Abschnitt 1.5 mit einer etwas technischen Darstellung der Prädikatenlogik wird erst im Anhang C benötigt.

- Kapitel 2 ist der Kern der Arbeit. In ihm wird die Klassenlogik vorgestellt und die Adäquatheit des Beweiskalküls bewiesen.

- Kapitel 3 präsentiert ein allgemeines Prinzip klassenlogischer Syntaxerweiterungen. Erst durch sie ist eine echte praktische Nutzbarkeit der Klassenlogik geschaffen. Auch die durch Syntaxerweiterung entstehenden klassenlogischen Systeme besitzen einen adäquaten Beweiskalkül. Der Nachweis dieses Resultats ist vielleicht das einzig wirklich Neue an dieser Arbeit. Der wesentliche Teil des Beweises hierfür wurde in den Anhang verschoben.

- In Kapitel 4 wird schließlich angedeutet, wie mit der Klassenlogik gearbeitet werden kann.

- Kapitel 5 stellt einen Ausdrucks- und Beweiskalkül der Klassenlogik vereinigenden Kalkül vor. Er ist in gewisser Weise die letzte Konsequenz der axiomatischen Methode: auch die für den Beweiskalkül notwendigen syntaktischen Nebenbedingungen (wie z.B. das Nicht-frei-Vorkommen von Variablen) werden axiomatisch beschrieben.

- Kapitel 6 beschreibt eine Turing-vollständige Gesamtheit von Kalkülen: die sogenannten Post-Kalküle. Die angegebenen Beispiele (Turing-Maschinen und eine Substitutions- und Logik-freie Version der Primitiven Rekursiven Arithmetik) könnten für sich genommen von Interesse sein. Weiter wird mit dem PostInspector (PI) ein Post-Kalkül-Checker angekündigt. Da es sich beim „großen vereinheitlichten Kalkül“ aus Kapitel 5 um einen Post-Kalkül handelt, wäre damit auch ein Proof-Checker für die Klassenlogik gegeben.

- Der Anhang enthält, wie bereits erwähnt, die wesentlichen Beweise zu Kapitel 3.[12] Zudem wird im Anhang gezeigt, dass die Klassenlogik eine konservative Erweiterung der Prädikatenlogik ist. Allerdings müssen wir uns hierbei auf abzählbare prädikatenlogische Symbolmengen beschränken. Um die Einbettung prädikatenlogischer Systeme mit überabzählbaren Symbolmengen zu ermöglichen, müsste die Klassenlogik noch etwas angepasst werden.[13]

Um einen ersten Eindruck von der Klassenlogik zu bekommen, empfehle ich dem Leser zunächst die Einleitung von Kapitel 2 zu lesen und sich dann durch das Überfliegen von Kapitel 4 einen Überblick über die Ausdrucksstärke der Klassenlogik zu verschaffen. Im Anschlusse daran kann ein gründlicheres Studium mit Kapitel 1 begonnen werden.

[12] Es handelt sich hierbei im Übrigen um den Teil der Arbeit, der mir mathematisch gesehen die größten Schwierigkeiten bereitet hat. Von der Richtigkeit der beiden Hauptsätze (Satz 3.1 und die Korrektheit des Beweiskalküls für die Klassenlogik mit Syntaxerweiterungen) war ich von Anfang an überzeugt, konnte jedoch längere Zeit keinen zielführenden Beweisansatz finden.

[13] Siehe dazu Abschnitt 2.4.

1. Vorbereitungen

1.1. Hintergrundmengenlehre

„Das Spätere ist das Frühere“

Wir wollen unsere Untersuchungen auf einer sicheren Grundlage führen. Es seien deshalb ein paar Worte zur Hintergrundmengenlehre vorausgeschickt.

1) Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht der *Aufbau* der Klassenlogik. Hierbei wollen wir deutlich machen, dass auch ein logisches System, wie die Klassenlogik, auf Konstruktionen in der reinen Mengenlehre zurückgeführt werden kann. Dies hat, meiner Meinung nach, die folgenden Vorteile:

    a) Bei der Charakterisierung eines logischen Systems, welches später selbst eine tragende Funktion für mathematische Argumentationen innehaben wird, ist es erstrebenswert die unbegründeten Hintergrundvoraussetzungen so gering wie nur möglich zu halten und explizit zu erwähnen. Da neben einer unumgänglichen Hintergrundlogik in der Mathematik zumeist auch auf mengentheoretische Prinzipien und Konstruktionen nicht verzichtet werden kann, bietet es sich daher an, auch die exakte Beschreibung eines logischen Systems auf mengentheoretischer Basis zu führen. Es lässt sich dann verhältnismäßig leicht feststellen, welche Axiome der Mengenlehre zur Beschreibung des logischen Systems wirklich notwendig sind. Wir werden in dieser Arbeit jedoch nicht genauer darauf eingehen.[1]

    b) Wir wollen natürlich auch einige Aussagen *über* die Klassenlogik beweisen. Auch hierbei kommen wir um mengentheoretische Argumentationen nicht herum. Sind nun von Anfang an alle Bestandteile der Logik (Ausdrucksmenge, Folgerungsbeziehung, Beweiskalkül etc.) als mengentheoretische Objekte in einer Hintergrundmengenlehre angelegt, so erspart man sich ein nachträgliches Einbetten.

    c) Letztendlich soll es möglich sein, auch in der Klassenlogik über die Klassenlogik zu sprechen. Da sich in der Klassenlogik eine natürliche Mengenlehre formulieren lässt, ist mit einer mengentheoretischen Definition der Klassenlogik die wesentliche Arbeit dafür bereits geleistet.

[1] Erwähnt sei nur, dass das Auswahlaxiom selbst im Beweis des Vollständigkeitssatzes nicht benötigt wird. Dies liegt daran, dass wir in der in dieser Arbeit beschriebenen Version der Klassenlogik auf nicht-logische Symbole verzichtet haben. Im Hinblick auf die notwendigen Hintergrundvoraussetzungen steht die Klassenlogik dieser Arbeit auf der selben Stufe wie die auf abzählbare Symbolmengen beschränkte Prädikatenlogik.

2) Da wir zeigen wollen, dass die Klassenlogik eine Erweiterung der Prädikatenlogik ist, ist es notwendig die beiden logischen Systeme auf einer gemeinsamen Grundlage vergleichen zu können.

3) Wir werden für die Definition und systematische Entwicklung der Klassenlogik als mathematischem Objekt neben dem Mengenbegriff an ein paar wenigen Stellen auch den Klassenbegriff verwenden.[2]

Um diesen Punkten gerecht zu werden, läge es nahe, die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG) als Hintergrundmengenlehre vorauszusetzen.[3] Da wir an keiner Stelle über alle Klassen quantifizieren, könnte man jedoch auch in ZFC arbeiten und Klassen als „informal notions" auffassen.[4] Wir könnten sogar eine klassenlogische Mengenlehre verwenden, die ja, wie in der Einleitung angesprochen, für die Verwendung als Hintergrundmengenlehre konzipiert ist, um in ihr eine exakte Definition der *Objekt*-Klassenlogik (samt einer klassenlogischen *Objekt*-Mengenlehre) zu geben. Diese scheinbare Zirkelhaftigkeit ist, meiner Meinung nach, gar keine Schwäche logischer Systeme, sondern vielmehr ein Charakteristikum der Grundlagen der Mathematik. Auch bei der Definition der ZFC-Mengenlehre setzt man bereits eine Hintergrundmengenlehre voraus, die man zuerst nur unbestimmt andeutet, und dann oft hinterher „zirkelhaft" als Modell von ZFC charakterisiert.[5] Da die Klassenlogik in der hier gegeben Form ja erst in diesem Dokument angegeben wird, ist es jedoch am besten, wenn sich der noch nicht mit der Klassenlogik vertraute Leser die folgenden Untersuchungen auf Basis von NBG oder ZFC denkt.

[2] Die hiermit gemeinten Klassen und Mengen sind natürlich zunächst von den Klassen und Mengen *in* der Klassenlogik zu unterscheiden. Verwendet man eine klassenlogische Hintergrundmengenlehre, so entsprechen die Begriffe gerade einander.

[3] Für eine Definition von NBG siehe Abschnitt 4.4.

[4] Siehe dazu etwa [Jec06, S. 5]: „Although we work in ZFC which, unlike alternative axiomatic set theories, has only one type of object, namely sets, we introduce the informal notion of a class. We do this for practical reasons: It is easier to manipulate classes than formulas."

[5] Wenngleich dafür auch sehr viel schwächere Axiome reichen.

1.2. Notationen

At this point an apology is also needed regarding the "order" used when denoting the composition of morphisms. Certainly mankind (or at least mathematician-kind) will long be plagued by the regrettable historical accident that the value of a function f at a point x has been denoted $f(x)$ rather than $(x)f$. Because of this notation, the value of $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ at x is written $g(f(x))$ and, consequently, the composition of f and g is denoted by $g \circ f$. This form of designation constitutes a switch in the order, and it would be far preferable both ascetically and practically to write the composition as $f \circ g$.

Horst Herrlich und Georg E. Strecker, *Category Theory*

In dieser Arbeit möchte ich ein kleines Experiment wagen. Es werden im Folgenden einige mengentheoretische Notationen festgesetzt und dabei auch ein paar weitverbreitete Standardnotationen abgeändert. Wenngleich keine dieser Änderungen grundlos geschieht, werde ich nicht auf alle meine Entscheidungen eingehen. Vielmehr hoffe ich, dass dem Leser, nach Überwindung der anfänglichen Befremdungsphase, der ein oder andere Vorteil der neuen Notationen erlebbar wird.

Insbesondere sollen alternative Funktions- und Relationsnotationen eingeführt werden, die eine Präfix- *und* eine Postfix-Schreibweise erlauben. Hierbei kommt es mir weniger auf die konkret gewählten Symbole, als auf die grundsätzliche Umsetzbarkeit dieses Vorhabens an. Ein starker Eingriff ist wohl, dass die runden Klammern () ihrer Funktion als Funktionsanwendungsklammern beraubt werden; sie sollen im Wesentlichen nur noch als Gruppierungsklammern dienen. Vor einer systematischen Zusammenstellung soll zunächst ein grober Überblick gegeben werden:

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. f^{-1} bezeichne die Umkehrrelation von f.

1. Den Funktionswert von f an der Stelle $a \in A$ bezeichnen wir durch

   $$f^{\ulcorner} a_{\lrcorner} \qquad \text{und} \qquad {}_{\llcorner} a^{\urcorner} f \ .$$

   Ist f zudem injektiv und b ein Element des Bildes von f, so bezeichnen wir analog durch

   $$f_{\llcorner} b^{\urcorner} \qquad \text{und} \qquad {}^{\ulcorner} b_{\lrcorner} f$$

   das Urbildelement von b unter f. Es gilt also offenbar $f_{\llcorner} b^{\urcorner} = f^{-1\ulcorner} b_{\lrcorner}$.

2. Um eine entsprechende Präfix- und Postfix-Darstellung der Komposition zu ermöglichen muss offenbar das übliche Kompositionssymbol $\circ$ durch ein asymmetrisches Symbol ersetzt werden. Ist $g : B \to C$ eine weitere Abbildung, so bezeichnen daher

   $$g \lhd f \qquad \text{und} \qquad f \rhd g$$

   beide die Komposition „erst f dann g". Es ist also $g \lhd f$ die übliche „Präfix-Komposition" $g \circ f$ und $f \rhd g$ die entsprechende Postfix-Darstellung.

3. Ein weiteres „Problem" das mit den neuen Notationen gelöst werden soll, ist das folgende:

   > Sei a ein Element oder eine Teilmenge von A. Üblicherweise bezeichnet dann $f(a)$ im ersteren Fall den Funktionswert von f an der Stelle a, im zweiteren

aber die Bildmenge von a unter f. Diese Mehrdeutigkeit ist in vielen Fällen unproblematisch; zu Verwirrungen kann es jedoch kommen, wenn etwas zugleich Element als auch Teilmenge des Definitionsbereiches einer Funktion ist (man denke z.B. an von-Neumann'sche Ordinalzahlen als Definitionsbereich).

Wir wollen daher die Bildmenge einer Menge $C \subseteq A$ unter f durch

$$f\lceil C\rfloor \qquad \text{und} \qquad \lfloor C\rceil f$$

bezeichnen. Auch für die Urbildmenge von $D \subseteq B$ unter f verwenden wir nicht die mehrdeutige Darstellung $f^{-1}(D)$ sondern

$$f\lfloor D\rceil \qquad \text{und} \qquad \lceil D\rfloor f\ .$$

Es gilt auch hier $f\lfloor D\rceil = f^{-1}\lceil D\rfloor$.

4. Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der Faser eines Elementes $b \in B$. Sie wird gewöhnlich durch $f^{-1}(b)$ oder $f^{-1}(\{b\})$ bezeichnet. Wir wollen

$$f\llcorner b\rceil \qquad \text{und} \qquad \lceil b\lrcorner f$$

dafür schreiben. Natürlich können wir sie auch durch $f^{-1}\lceil\{b\}\rfloor$ angeben.

In diesem Dokument werden wir nur im Falle der Komposition auch von einer Postfix-Darstellung Gebrauch machen. Daher wird auch in den folgenden Definitionen nur für die Komposition eine Postfix-Variante angegeben. Die gerade angedeuteten entsprechenden Postfix-Notationen der anderen Funktions-Relations-Begrifflichkeiten liegen jedoch auf der Hand.

Elementare Mengenlehre

Es sei $\mathscr{D}_{\text{All}}$ die Allklasse, d.h. die Klasse aller Mengen. Für $A, B \in \mathscr{D}_{\text{All}}$ definieren wir:

Definiendum	**Definiens**
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge von A
$A \,\underline{\setminus}\, B$	die Menge $A \setminus \{B\}$
$\langle A, B\rangle_{K}$	das Kuratowski-Paar $\{\{A, B\}, \{B\}\}$ von A und B

Natürliche Zahlen

An einigen Stellen wird es sich als sehr praktisch herausstellen, das **von-Neumann-Modell** der natürlichen Zahlen zu verwenden. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wollen wir also auffassen als die Menge $\{0, \dots, n-1\}$ aller kleineren natürlichen Zahlen; insbesondere ist $0 = \emptyset$.[6] Damit können wir z.B. anstatt „Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ ...“ auch kürzer „Für alle $k \in n$ ...“ schreiben. Die Menge $\mathbb{N} \,\underline{\setminus}\, 0$ aller positiven natürlichen Zahlen bezeichnen wir durch $\mathbb{N}^{\times}$.

[6] $\mathbb{N}$ ist also gerade die (von-Neumann'sche) Ordinalzahl ω.

Endliche Tupel

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{D}_{\text{All}}$. Dann definieren wir das **n-Tupel** von $a_1, \dots, a_n$ durch[7]

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle := \{\langle 0, a_1 \rangle_K, \dots, \langle n-1, a_n \rangle_K\} \ .$$

Insbesondere ist $\langle\rangle = \emptyset$ das **leere Tupel**. Mit den endlichen Tupeln können wir nun leicht das **cartesische Produkt** endlich vieler Mengen $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ definieren:[8]

$$A_1 \sqcap \dots \sqcap A_n := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \, ; \; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \ .$$

Insbesondere sei für $A \in \mathscr{D}_{\text{All}}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$^{n}A := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \, ; \; a_1, \dots, a_n \in A\}$$

und damit

$$^{\star}A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} {}^{i}A$$

die Menge aller endlichen Tupel über A. Man beachte, dass $^{0}A = \{\langle\rangle\} = \{\emptyset\}$.

Für eine Menge M kann man nun den **Tupelabschluss** definieren:

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \qquad \text{wobei induktiv } M_0 := M \text{ und } M_{i+1} := M_i \cup {}^{\star}M_i \ .$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ die kleinste Obermenge N von M ist, welche abgeschlossen unter endlicher Tupel-Bildung ist, d.h. für die $^{\star}N \subseteq N$ gilt.

Sind $\tau = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ und $\sigma = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ endliche Tupel, so sei $\tau \star \sigma := \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle$ die **Verkettung** von τ und σ. Ist, allgemeiner, $\varphi(i)$ ein Term, der ein endliches Tupel bezeichnet, wann immer wir i als eine natürliche Zahl interpretieren,[9] so definieren wir induktiv:

$$\bigstar_{i \in 0} \varphi(i) := \langle\rangle \qquad \text{und} \qquad \bigstar_{i \in n+1} \varphi(i) := \left(\bigstar_{i \in n} \varphi(i) \right) \star \varphi(n) \ .$$

Korrespondenzen & Abbildungen

Eine **Korrespondenz** (oder auch **binäre Relation**) ist eine Menge R von 2-Tupeln. In diesem Falle ist die Menge

$$\operatorname{def} R := \{x \, ; \; \exists y \text{ mit } \langle x, y \rangle \in R\}$$

[7] Die verschachtelte Tupel-Definition

$$\langle a_1, a_2 \rangle := \langle a_1, a_2 \rangle_K \, , \quad \langle a_1, a_2, a_3 \rangle := \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle_K \quad \text{etc.}$$

wollen wir hier nicht verwenden, da sonst die Länge eines Tupels nicht eindeutig bestimmt wäre. Ein Tripel wäre z.B. gleichzeitig auch ein Paar. Außerdem lässt sich unsere Tupel-Definition leicht verallgemeinern, wie wir in Kürze sehen werden.

[8] Wir verwenden hier nicht die übliche Darstellung $A_1 \times \dots \times A_n$ um auch symbolisch deutlich zu machen, dass unsere Tupel keine verschachtelten Kuratowski-Paare sind. Außerdem spiegelt sich in unserer Darstellung unmittelbar der Zusammenhang zum allgemeinen cartesischen Produkt $\prod_{i \in I} \varphi(i)$ wider (siehe unten).

[9] Wie diese zuerst einmal etwas schwammige Beschreibung klassenlogisch exakt aufgefasst werden kann, wird deutlich durch Kapitel 3. Bei Bezeichnungen wie $\star_{i \in n} \varphi(i)$, $\prod_{i \in I} \varphi(i)$, $\langle \varphi(i) \rangle_{i \in I}$, etc. handelt es sich eigentlich um verallgemeinerte Quantoren (mit der Bindungsvariablen i).

der **Definitionsbereich** von R und

$$\operatorname{im} R := \{y\,;\ \exists x \text{ mit } \langle x, y\rangle \in R\}$$

das **Bild** von R. Sind R, S Korrespondenzen und $a, b, A, B \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$, so definieren wir:

Definiendum	**Definiens**	**übliche Bezeichnung**[10]
$S \lhd R$ oder $R \rhd S$	$\{\langle x, z\rangle\,;\ \exists y(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)\}$	$S \circ R$
R^{-1}	$\{\langle y, x\rangle\,;\ \langle x, y\rangle \in R\}$	
$R \upharpoonright A$	$R \cap (A \sqcap \operatorname{im} R)$	$R\vert_A$
$R \downharpoonleft B$	$R \cap (\operatorname{def} R \sqcap B)$	
$R\lceil A\rfloor$	$\{y\,;\ \exists x \in A : \langle x, y\rangle \in R\}$	$R(A)$ oder R“A
$R\lfloor B\rceil$	$\{x\,;\ \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in R\}$	$R^{-1}(B)$
$R\ulcorner a\rfloor$	$\{y\,;\ \langle a, y\rangle \in R\}$	
$R\llcorner b\rceil$	$\{x\,;\ \langle x, b\rangle \in R\}$	$R^{-1}(b)$ oder $R^{-1}(\{b\})$

Falls entsprechende Eindeutigkeiten gegeben sind, definieren wir außerdem:

Definiendum	**Definiens**	**übliche Bezeichnung**
$R\ulcorner a\lrcorner$	dasjenige b mit $\langle a, b\rangle \in R$	$R(a)$
$R\llcorner b\urcorner$	dasjenige a mit $\langle a, b\rangle \in R$	$R^{-1}(b)$
$R\lceil A\lrcorner$	dasjenige b mit $A = R\llcorner b\rceil$	
$R\lfloor B\urcorner$	dasjenige a mit $B = R\ulcorner a\rfloor$	

Für $R\ulcorner a\lrcorner$ schreiben wir manchmal einfach $R\,a$ (oder in seltenen Fällen auch $R(a)$) und anstatt $R\ulcorner\langle a_1, \dots, a_n\rangle\lrcorner$ zumeist $R\ulcorner a_1, \dots, a_n\lrcorner$.

Eine Korrespondenz R heißt **eindeutig**, falls für alle $a \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ höchstens ein $b \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ mit $\langle a, b\rangle \in R$ existiert. Eine **Abbildung** oder **Funktion** ist eine eindeutige Korrespondenz. Analog heißt R **coeindeutig** oder **injektiv**, falls für alle $b \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ höchstens ein $a \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ mit $\langle a, b\rangle \in R$ existiert.

Sind A, B Mengen, so seien

$$\operatorname{Abb}(A, B) := \{f\,;\ f \text{ Abbildung mit } \operatorname{def} f = A \text{ und } \operatorname{im} f \subseteq B\}$$

und

$$\operatorname{pAbb}(A, B) := \{f\,;\ f \text{ Abbildung mit } \operatorname{def} f \subseteq A \text{ und } \operatorname{im} f \subseteq B\}$$

die Menge aller Abbildungen bzw. partiellen Abbildungen von A nach B. Für $f \in \operatorname{Abb}(A, B)$ bzw. $f \in \operatorname{pAbb}(A, B)$ schreiben wir, wie üblich, auch $f : A \to B$ bzw. $f : A \rightharpoonup B$.

Ist A eine Menge und $\varphi(x)$ ein Term, der ein Element von $\mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ bezeichnet, wann immer wir x als ein Element von A interpretieren, so sei:

$$\langle x \in A \mapsto \varphi(x)\rangle := \{\langle x, \varphi(x)\rangle\,;\ x \in A\}\ .$$

[10]Meist werden diese Bezeichnungen nur für Abbildungen, d.h. spezielle Korrespondenzen verwendet.

Offenbar ist $\langle x \in A \mapsto \varphi(x)\rangle$ eine Abbildung mit Definitionsbereich A. Ist $\varphi(x)$ ein Ausdruck, der ein Element von B bezeichnet, wann immer wir x als ein Element von A interpretieren, so schreiben wir anstatt „$f := \langle x \in A \mapsto \varphi(x)\rangle$“ oft auch

$$\text{„Sei } f : A \to B,\ x \mapsto \varphi(x)\text{“ .}$$

Allgemeine Tupel

Ein **Tupel** ist eine Menge τ von Kuratowski-Paaren, sodass für alle $a \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ höchstens ein $b \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ mit $\langle a, b\rangle_K \in \tau$ existiert. Offenbar fallen auch die oben eingeführten endlichen Tupel[11] unter diesen allgemeineren Tupelbegriff. Ist I eine Menge und $\varphi(i)$ ein Ausdruck, der ein Element von $\mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ bezeichnet, wann immer wir i als ein Element von I interpretieren, so ist

$$\big\langle \varphi(i) \big\rangle_{i \in I} := \{\langle i, \varphi(i)\rangle_K \,;\ i \in I\}$$

offenbar ein Tupel.

Zu jedem Tupel τ existiert eine „isomorphe“ Abbildung $\{\langle a, b\rangle \,;\ \langle a, b\rangle_K \in \tau\}$. Tupel sind also im Wesentlichen nichts anderes als Abbildungen.[12] Es lassen sich damit unmittelbar alle Definitionen und Bezeichnungen für Korrespondenzen wie def, im, $\triangleleft$ etc. auf Tupel übertragen. Ist $\operatorname{def} \tau$ eine Ordinalzahl, so nennen wir $\operatorname{len} \tau := \operatorname{def} \tau$ auch die **Länge** von τ. Weiter schreiben wir für $\tau^\ulcorner i_\lrcorner$ zumeist $\mathrm{pr}_i\, \tau$ und, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, oft auch einfach τ_i;[13] d.h. es gilt $\tau = \langle \tau_i \rangle_{i \in \operatorname{def} \tau}$.

Im Falle von endlichen Tupeln haben wir also $\tau = \langle \tau_i \rangle_{i \in \operatorname{len} \tau} = \langle \tau_0, \dots, \tau_{\operatorname{len} \tau - 1}\rangle$. Ist $\tau \neq \langle\rangle$, so schreiben wir auch $\mathrm{pr}_{-1}\, \tau$ für $\mathrm{pr}_{\operatorname{len} \tau - 1}\, \tau$. Im Falle von Vektorpfeil-Variablen $\vec{a}$ schreiben wir a_i anstatt $\vec{a}_i$.

Sei I eine Menge. Ein Tupel τ mit $\operatorname{def} \tau = I$ nennen wir auch ein I-Tupel. Sei M eine weitere Menge. Wir definieren dann:

$${}^I M := \{\tau \,;\ \tau \text{ ist } I\text{-Tupel mit } \operatorname{im} \tau \subseteq M\} \ .$$

Ist, allgemeiner, $\varphi(i)$ ein Ausdruck, der eine Menge bezeichnet, wann immer wir i als ein Element von I interpretieren, so definieren wir das **allgemeine cartesische Produkt** durch

$$\prod_{i \in I} \varphi(i) := \{\tau \,;\ \tau \text{ ist } I\text{-Tupel, sodass } \mathrm{pr}_i\, \tau \in \varphi(i) \text{ für alle } i \in I\} \ .$$

Es gilt offenbar, mit weiteren Mengen $A_0, \dots, A_n$ $(n > 0)$

$$\prod_{i \in I} M = {}^I M \qquad \text{und} \qquad \prod_{i \in n+1} A_i = A_0 \sqcap \dots \sqcap A_n \ .$$

Somit handelt es sich wirklich um eine Verallgemeinerung der endlichen Produkte.

[11] Diese endlichen Tupel sind natürlich eine echte Teilklasse der Klasse aller Tupel, die als Menge endlich sind. Im Folgenden ist also „endliche“ in „endliche Tupel“ nicht als eigenständiges Adjektiv zu lesen. Vielleicht wäre es besser von „natürlichen Tupeln“ zu reden.

[12] Da Abbildungen Mengen von 2-Tupeln sind, lassen sich jedoch Tupel und Abbildungen nicht absolut identifizieren.

[13] Anstatt vom „Wert von τ an der Stelle i“ sprechen wir hier von der „i-ten **Komponente** von τ“. Ein Tupel ist somit injektiv genau dann, wenn die Komponenten des Tupels paarweise verschieden sind.

Wir wollen auch die „gemischte“ Hintereinanderschaltung von Tupeln τ und Abbildungen f zulassen. Hierbei legen wir fest, dass die Kompositionen $\tau \lhd f$ und $f \lhd \tau$ wieder Tupel sind. Insbesondere definieren wir also für $\tau \in {}^I M$ und $f : M \to N$

$$f \lhd \tau := \{\langle x, z\rangle_K \,;\, \exists y(\langle x, y\rangle_K \in \tau \wedge \langle y, z\rangle \in f)\} \ .$$

Offenbar gilt $f \lhd \tau = \langle f^\ulcorner \tau_i {}_\lrcorner \rangle_{i \in I} \in {}^I N$, d.h. $f \lhd \tau$ ist nichts anderes als eine kompakte Bezeichnung der „punktweisen“ Anwendung von f auf τ.

* * *

Zusammenfassend noch einmal die wichtigsten vom Standard abweichenden Bezeichnungen:[14]

$S \lhd R$ oder $R \rhd S$	die Komposition „erst R, dann S“
$f^\ulcorner a_\lrcorner$	der Funktionswert von f an der Stelle a
$R\lceil A \rfloor$	das Bild von A unter R
$R\llcorner b \rceil$	der R-Vorbereich von b (oder auch die Faser von R über b)
${}^I M$	die Menge aller I-Tupel in M
$A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n$	das cartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$

[14] Ich hatte mir eigentlich vorgenommen die Latex-Darstellungen einiger Notationen noch etwas zu verschönern. Beispielsweise sähe es vielleicht ansprechender aus, wenn die neuen Funktionsanwendungsklammern das Argument etwas enger umschließen würden. Leider habe ich es nicht mehr geschafft mich damit auseinanderzusetzen.

1.3. Logische Systeme

> *The distrust of mathematicians towards the notion ...* [of truth] *is reinforced by the current opinion that this notion is outside the proper limits of mathematics altogether. The problems of making its meaning more precise, of removing the confusions and misunderstandings connected with it, and of establishing its fundamental properties belong to another branch of science — metamathematics.*
>
> Alfred Tarski, *On Definable Sets of Real Numbers*

Ein **logisches System**[15] $\mathfrak{X}$ ist gegeben durch:

- eine Menge $L_{\mathfrak{X}}$, die **Ausdrucksmenge** von $\mathfrak{X}$
- eine Klasse[16] $\mathscr{M}_{\mathfrak{X}}$, die Klasse der **Interpretationen** zu $\mathfrak{X}$
- zwei Klassen-Abbildungen[17]

$$\mathrm{VER}_{\mathfrak{X}} : \mathscr{M}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}} \quad \text{und} \quad \mathrm{INT}_{\mathfrak{X}} : \mathscr{M}_{\mathfrak{X}} \to \mathrm{Abb}(L_{\mathfrak{X}}, \mathscr{D}_{\mathrm{All}})$$

$\mathrm{VER}_{\mathfrak{X}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$ nennen wir das **Wahrheitsobjekt** und $\mathrm{INT}_{\mathfrak{X}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$ die **Interpretationsabbildung** zur Interpretation $\mathfrak{I}$. Sind keine Missverständnisse zu befürchten, so benutzen wir auch die Bezeichnungen $V_{\mathfrak{I}}$ für $\mathrm{VER}_{\mathfrak{X}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$ sowie $\overline{\mathfrak{I}}$ für $\mathrm{INT}_{\mathfrak{X}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$.

Axiomensysteme von $\mathfrak{X}$ sind Teilmengen von $L_{\mathfrak{X}}$. Elemente aus ${}^{\star}L_{\mathfrak{X}}$ nennen wir **Sequenzen**. Für Sequenzen wie $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ oder $\Gamma \star \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ verwenden wir oft einfach die Schreibweise $\gamma_1\ \gamma_2\ \ldots\ \gamma_n$ bzw. $\Gamma\ \gamma_1\ \gamma_2\ \ldots\ \gamma_n$.

Sei $\mathfrak{X}$ ein logisches System, Φ ein Axiomensystem von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation zu $\mathfrak{X}$. Wir sagen dann $\mathfrak{I}$ ist **Modell von** Φ oder Φ **gilt in** $\mathfrak{I}$ und schreiben

$$\mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \Phi\ ,$$

falls $\overline{\mathfrak{I}}\lceil\Phi\rfloor = \{V_{\mathfrak{I}}\}$. Ist $\varphi \in L_{\mathfrak{X}}$, so schreiben wir anstatt $\mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \{\varphi\}$ zumeist $\mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \varphi$. Ein Axiomensystem Φ für das eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \Phi$ existiert, heißt **erfüllbar**.

In jedem logischen System $\mathfrak{X}$ lässt sich eine **Folgerungsbeziehung** $\vDash_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathcal{P}(L_{\mathfrak{X}}) \sqcap L_{\mathfrak{X}}$ definieren:

$$\Phi \vDash_{\mathfrak{X}} \varphi \qquad \text{:gdw.} \qquad \text{für alle } \mathfrak{I} \in \mathscr{M}_{\mathfrak{X}} \text{ mit } \mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \Phi \text{ gilt auch } \mathfrak{I} \Vdash_{\mathfrak{X}} \varphi\ .$$

[15] Ein allgemeinerer Begriff ist der Begriff der Institution. Siehe dazu etwa [Mos+05]. Für unsere Zwecke reicht jedoch der hier formulierte Begriff des logischen Systems.

[16] Denkt man an die Gesamtheit aller prädikatenlogischen Interpretationen (zu einer gegebenen Signatur), so ist klar, dass es sich dabei um eine echte Klasse handelt. Schon die Gesamtheit aller Gruppen ist keine Menge. Also ist an dieser Stelle der Klassenbegriff notwendig.

[17] Eine **Klassen-Abbildung** F ist natürlich nichts anderes als eine *Klasse* von 2-Tupeln, sodass für alle $a \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ höchstens ein $b \in \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ mit $\langle a, b\rangle \in F$ existiert. Es sollte klar sein, wie die Notationen und Definitionen für Mengen-Abbildungen auf Klassen-Abbildungen übertragen werden können.

1.3.1. Konservative Systemerweiterungen

Ein logisches System $\mathfrak{X}_2$ ist eine **konservative Systemerweiterung** eines logischen Systems $\mathfrak{X}_1$, falls eine Abbildung $A : L_{\mathfrak{X}_1} \to L_{\mathfrak{X}_2}$ und ein $\Psi \subseteq L_{\mathfrak{X}_2}$ existieren, sodass für alle $\Phi \subseteq L_{\mathfrak{X}_1}$ und alle $\varphi \in L_{\mathfrak{X}_1}$:

$$\Phi \vDash_{\mathfrak{X}_1} \varphi \quad \text{gdw.} \quad \Psi \cup A\lceil\Phi\rfloor \vDash_{\mathfrak{X}_2} A^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} \,.$$

Ist $\mathfrak{X}_2$ eine konservative Systemerweiterung von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_1$ eine konservative Systemerweiterung von $\mathfrak{X}_2$, so nennen wir $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ **äquivalent**.

Später werden wir zeigen, dass die Klassenlogik eine konservative Systemerweiterung der Prädikatenlogik ist und dass die Klassenlogik mit Syntaxerweiterungen äquivalent zur Klassenlogik ohne Syntaxerweiterungen ist.

Anmerkung:

Es lässt sich mit dem Begriff der konservativen Systemerweiterung sogar eine Kategorie $\mathcal{L}$ konstruieren. Die Objekte sind die logischen Systeme,[18] die Morphismen sind die Paare $\langle A, \Psi\rangle$ mit den oben genannten Eigenschaften.[19] Die Komposition $\blacktriangleright_{\mathcal{L}}$ ist gegeben durch:

$$\langle A_1, \Psi_1\rangle \blacktriangleright_{\mathcal{L}} \langle A_2, \Psi_2\rangle := \langle A_1 \triangleright A_2, \Psi_2 \cup A_2\lceil\Psi_1\rfloor\rangle$$

Der Identitätsmorphismus zu einem logischen System $\mathfrak{X}$ ist dann $\langle \mathrm{id}_{L_{\mathfrak{X}}}, \emptyset\rangle$. Leider entspricht aber der Isomorphie-Begriff dieser Kategorie nicht unserem Äquivalenzbegriff von logischen Systemen. Dennoch hilft uns diese Kategorie etwas weiter, denn die Wohldefiniertheit der Komposition impliziert sofort die Transitivität, die Existenz der Identitätsmorphismen die Reflexivität der Relation „... ist konservative Systemerweiterung von ...“. Wir gewinnen diese Relation sogar aus der Kategorie durch die Definition: $\mathfrak{X}_2$ ist eine konservative Systemerweiterung von $\mathfrak{X}_1$:gdw. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \neq \emptyset$, d.h. sie ist gerade die durch die Kategorie induzierte Quasiordnung.

[18] Da in logischen Systemen die Gesamtheit der Interpretationen eine echte Klasse sein kann, muss man, um eine Klasse von Objekten zu erhalten, eigentlich eine *Klasse* von vertretenden „Namen“ für logische Systeme wählen. (Oder man arbeitet mit Grothendieck-Universen.)

[19] Genau genommen müssen die Morphismen noch mit den entsprechenden Objekten indiziert werden, damit die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objekten disjunkt sind. D.h. man verwendet etwa statt des Paares $\langle A, \Psi\rangle$, das Tripel $\langle \mathfrak{X}_1, \langle A, \Psi\rangle, \mathfrak{X}_2\rangle$.

1.4. Kalküle

Statt eine Schlußreihe unmittelbar an eine Tatsache anzuknüpfen, kann man, diese dahingestellt sein lassend, ihren Inhalt als Bedingung mitführen. Indem man so alle Tatsachen in einer Gedankenreihe durch Bedingungen ersetzt, wird man das Ergebnis in der Form erhalten, daß von einer Reihe von Bedingungen ein Erfolg abhängig gemacht ist.

Gottlob Frege, *Grundlagen der Arithmetik*

Die Ausdrucksmenge eines logischen Systems wird oft durch einen Kalkül bestimmt. Ein solcher Ausdruckskalkül enthält zumeist zwei Bestandteile:

i) eine Menge A von „atomaren" Ausdrücken

ii) eine Menge R von Regeln, gemäß denen man aus schon gebildeten Ausdrücken weitere Ausdrücke erhält

Die Ausdrucksmenge ist dann der Abschluss der Menge A unter den Regeln aus R.[20]

Zum Beispiel kann die Menge aller aussagenlogischen Ausdrücke definiert werden als die kleinste Menge L von Zeichenketten, die die Zeichen $\top$, $\bot$ und alle Aussagenvariablen $A_0, A_1, \ldots$ enthält und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

d) Ist $p \in L$, so ist auch $\neg p \in L$.

e) Sind $p, q \in L$, so ist auch $(p \wedge q) \in L$.

Kompakter gibt man diesen Ausdruckskalkül auch an durch:

a) $\dfrac{}{\top}$ b) $\dfrac{}{\bot}$ c) $\dfrac{}{A_i}$ für $i \in \mathbb{N}$ d) $\dfrac{p}{\neg p}$ e) $\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{(p \wedge q)}$

Hieraus sieht man schon, dass sich auch die atomaren Ausdrücke, als durch Ausdrucksbildungsregeln gebildet, auffassen lassen. Eine aus den **Prämissen** $P_1, \ldots, P_n$ und der **Konklusion** K bestehende Regel

$$\frac{\begin{matrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{matrix}}{K}$$

die wir auch als **Schluss** bezeichnen wollen, ist hierbei zu lesen als:

$$\text{Sind } P_1, \ldots, P_n \in L, \text{ so ist auch } K \in L.$$

Wie etwa bei a), b) und c) ist auch der Fall $n = 0$ zugelassen; es wird dann nichts anderes gefordert, als dass $K \in L$.

[20] Wie in der Prädikatenlogik (siehe Abschnitt 1.5) kann zudem eine solche Definition in zwei Schritten geschehen:

1. Es werden atomare Terme und Termbildungsregeln angegeben, um die Menge aller Terme zu bestimmen.
2. Mit Hilfe der Termmenge werden atomare Ausdrücke definiert. Zusammen mit den Ausdrucksbildungsregeln bestimmen sie dann die Ausdrucksmenge.

Betrachten wir die Regeln d) und e), so fällt auf, dass es sich eigentlich um **Schlussschemata** handelt: für beliebige Zeichenketten p und q erhalten wir einen Schluss als Instanz des entsprechenden Schemas. Variablen wie p und q in solchen Schemata werden wir im Folgenden, auch um sie von „Objekt-Variablen" wie $A_0, A_1, \ldots$ abzugrenzen, als **Metavariablen** bezeichnen.

Wir wollen nun einen exakten Kalkülbegriff einführen, der uns nicht nur für die Ausdruckskalküle, sondern auch für die noch zu betrachtenden Beweiskalküle eine feste Grundlage geben wird.[21] Im Folgenden sei M eine beliebige nichtleere Menge.

Ein $S \in {}^{\star}M \setminus \langle\rangle$ ist ein **Schluss** in M. Die durch S eindeutig bestimmte natürliche Zahl n mit $S \in {}^{n+1}M$ nennen wir die **Prämissenanzahl** von S und bezeichnen sie durch $\operatorname{prem} S$. Einen Schluss $\langle P_1, \ldots, P_n, K\rangle$ geben wir auch an durch:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline K \end{array}$$

Ein Menge $N \subseteq M$ ist **abgeschlossen unter** einem Schluss S, falls

$$\text{mit} \qquad S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor = \{\operatorname{pr}_i S\,;\ i \in \operatorname{prem} S\} \subseteq N \qquad \text{auch} \qquad \operatorname{pr}_{-1} S \in N\ .$$

Ist $S = \langle P_1, \ldots, P_n, K\rangle$, so ist also N abgeschlossen unter S, wenn im Falle von $P_1, \ldots, P_n \in N$ auch $K \in N$ gilt.

Beispiel:

> Seien $M = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann ist $\mathbb{N}$ abgeschlossen unter dem Schluss $\langle a, b, a+b\rangle$, da im Falle von $a, b \in \mathbb{N}$ auch $a+b \in \mathbb{N}$. Weiter ist $\mathbb{N}$ abgeschlossen unter $\langle 1, 0, -1, \pi\rangle$ aber nicht unter $\langle 1, 0, 7, 4, -2\rangle$.

Ein $F \in \mathrm{SCH}_M := \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \operatorname{Abb}({}^{m}M, {}^{n+1}M)$ ist ein **Schlussschema** in M. Die durch F eindeutig bestimmten natürlichen Zahlen m und n mit $F : {}^{m}M \to {}^{n+1}M$ nennen wir die **Parameteranzahl** und die **Prämissenanzahl** von F und bezeichnen sie durch $\operatorname{par} F$ bzw. $\operatorname{prem} F$. Wir können ein Schlussschema auffassen als einen „parametrisierten" Schluss: jedem „Parameter-Tupel" wird ein Schluss zugeordnet.

Ein Schlussschema F mit $\operatorname{par} F = 0$ bzw. $\operatorname{prem} F = 0$ nennen wir **parameterlos** bzw. **prämissenlos**. Wegen $|{}^{0}M| = |\{\langle\rangle\}| = 1$ lassen sich Schlüsse offenbar als parameterlose Schlussschemata auffassen. Wir wollen uns daher im Folgenden weitestgehend nur noch mit Schlussschemata befassen.

Eine Menge $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{SCH}_M$ von Schlussschemata ist ein **Kalkül** über M. Die Menge M ist der **Träger** von $\mathcal{K}$.[22] Ist $\mathcal{K}$ ein Kalkül und I eine Menge, so nennen wir ein $C \in {}^{I}\mathcal{K}$ einen **Katalog**[23] zu $\mathcal{K}$.

[21] Eigentlich alle Resultate in diesem Abschnitt sind intuitiv unmittelbar einleuchtend. Da ich jedoch keine Quelle gefunden habe, die sich mit diesen Intuitivitäten auseinandersetzt, habe ich mich dazu entschlossenen alle Beweise mit anzugeben. Sie können ohne Bedenken übersprungen werden. Allerdings bieten sie andererseits eine gute Gelegenheit sich mit den neuen Notationen vertraut zu machen.

[22] Enthält ein Kalkül nur parameterlose Schlussschemata, so ist durch den Kalkül kein eindeutiger Träger bestimmt.

[23] Ein Katalog ist also gewissermaßen ein „indizierter Kalkül". Der Begriff des Katalogs wird benötigt, da wir zulassen wollen, dass man in einer Bibliothek (siehe unten) für ein Schlussschema zwei (oder mehr) verschiedene Ableitungen angeben kann. Das Schlussschema bekommt dann einfach zwei Namen/Indices.

Schreibweise:

Zumeist definieren wir einen Katalog bzw. einen Kalkül durch eine Liste von Schlussschemata, die wir in der folgenden Form angeben:[24]

$$\mathit{Name}(\vec{\mathbf{x}}) : \quad \begin{array}{c} P_1(\vec{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ P_n(\vec{\mathbf{x}}) \\ \hline K(\vec{\mathbf{x}}) \end{array}$$

Hierbei seien $P_1(\vec{\mathbf{x}}), \ldots, P_n(\vec{\mathbf{x}})$ und $K(\vec{\mathbf{x}})$ Terme, welche Elemente aus M bezeichnen, wann immer wir die Komponenten von $\vec{\mathbf{x}}$ als Elemente von M interpretieren.[25]

Das hierdurch bestimmte Schlussschema sei

$$\boldsymbol{Name} : {}^{\operatorname{len}\vec{\mathbf{x}}}M \to {}^{n+1}M, \ \vec{x} \mapsto \big\langle P_1(\vec{x}), \ldots P_n(\vec{x}), K(\vec{x}) \big\rangle \ .$$

Name ist gewissermaßen ein Name des Schlussschemas $\boldsymbol{Name}$.

Ist I die Menge aller angegebenen „Namen"[26], so ist der durch die Liste bestimmte Katalog gegeben durch

$$\big\langle \boldsymbol{Name} \big\rangle_{\mathit{Name} \in I} \ .$$

Weiter haben wir insbesondere den Kalkül

$$\{\boldsymbol{Name}\, ; \ \mathit{Name} \in I\}$$

bestimmt.

Beispiel:

Sei $M = \mathbb{R}$ und $I = \{\mathit{Null}, \mathit{Eins}, \mathit{Plus}\}$ eine 3-elementige Menge. Durch

$$\mathit{Null} : \quad \begin{array}{c} \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \mathit{Eins} : \quad \begin{array}{c} \\ \hline 1 \end{array} \qquad\qquad \mathit{Plus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \quad \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{array}$$

werden die folgenden Schlussschemata definiert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Null} &: {}^0\mathbb{R} \to {}^1\mathbb{R}, \ \langle\rangle \mapsto \langle 0 \rangle \\ \boldsymbol{Eins} &: {}^0\mathbb{R} \to {}^1\mathbb{R}, \ \langle\rangle \mapsto \langle 1 \rangle \\ \boldsymbol{Plus} &: {}^2\mathbb{R} \to {}^3\mathbb{R}, \ \langle a, b \rangle \mapsto \langle a, b, a + b \rangle \end{aligned}$$

und damit der Katalog $C_{\mathrm{Bsp}} := \{\langle \mathit{Null}, \boldsymbol{Null} \rangle_K, \langle \mathit{Eins}, \boldsymbol{Eins} \rangle_K, \langle \mathit{Plus}, \boldsymbol{Plus} \rangle_K\}$ sowie der Kalkül $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}} := \{\boldsymbol{Null}, \boldsymbol{Eins}, \boldsymbol{Plus}\}$.

---

[24] In $\mathit{Name}(\vec{\mathbf{x}})$ lassen wir die Tupel-Klammern von $\vec{\mathbf{x}}$ ggf. weg, d.h. wir schreiben $\mathit{Name}(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{m-1})$ anstatt $\mathit{Name}(\langle \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{m-1} \rangle)$. Außerdem schreiben wir im Falle $m = 0$ (d.h. wenn wir das Schussschema als Schluss auffassen können) *Name* für $\mathit{Name}(\langle\rangle)$.

[25] Wir schreiben hier die Variablen in nicht-kursiver fetter Schrift $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ... (auch um Verwechslungen mit der entsprechenden Darstellung für Schlüsse zu vermeiden) und nennen sie **Metavariablen**.

[26] Die genaue mengentheoretische Definition der „Namen" ist natürlich unwichtig.

Durch einen Kalkül $\mathcal{K}$ wird eine Menge von Schlüssen $\overline{\mathcal{K}} := \bigcup_{F \in \mathcal{K}} \operatorname{im} F$ bestimmt.

Ist $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M und $N \subseteq M$ abgeschlossen unter allen Schlüssen aus $\overline{\mathcal{K}}$, so nennen wir N **abgeschlossen unter** $\mathcal{K}$.

Die **durch** $\mathcal{K}$ **generierte Menge** $G_{\mathcal{K}}$ ist nun gegeben durch

$$G_{\mathcal{K}} := \bigcap \{N \subseteq M\,;\ N \text{ abgeschlossen unter } \mathcal{K}\}\ .$$

$G_{\mathcal{K}}$ ist selbst abgeschlossen unter $\mathcal{K}$, d.h. $G_{\mathcal{K}}$ ist die kleinste unter $\mathcal{K}$ abgeschlossene Teilmenge von M.

1.1 Lemma

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M. Dann ist $G_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}$. Ist $\mathcal{K}'$ ein weiterer Kalkül über M mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, so gilt $G_{\mathcal{K}} \subseteq G_{\mathcal{K}'}$.

Beweis: Sei $S \in \overline{\mathcal{K}}$ mit $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq G_{\mathcal{K}}$. Nach Definition von $G_{\mathcal{K}}$ gilt auch $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq N$ und damit $\operatorname{pr}_{-1} S \in N$ für alle unter $\mathcal{K}$ abgeschlossenen Teilmengen N von M. Also muss $\operatorname{pr}_{-1} S \in G_{\mathcal{K}}$ gelten. Folglich ist $G_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}$.

Offenbar ist jede unter $\mathcal{K}'$ abgeschlossene Teilmenge von M auch abgeschlossen unter $\mathcal{K}$. Die zweite Aussage ist damit klar. ■

Beispiel:

Mit $M = \mathbb{R}$ und $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}$ wie oben gilt $G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}} = \mathbb{N}$. Offenbar ist nämlich $\mathbb{N}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}$, d.h. $G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}} \subseteq \mathbb{N}$ und umgekehrt ist $0 \in G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}}$ wegen ***Null*** und mit ***Eins*** und ***Plus*** folgt aus $a \in G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}}$ auch $a + 1 \in G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}}$, d.h. $\mathbb{N} \subseteq G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}}$.

Sei im Folgenden ein beliebiger Kalkül $\mathcal{K}$ über M gegeben. Wir wollen noch eine andere Charakterisierung von $G_{\mathcal{K}}$ angeben. Dazu definieren wir induktiv für $n \in \mathbb{N}$:[27]

$$G_{\mathcal{K},\leq n} := \left\{ \operatorname{pr}_{-1} S\,;\ S \in \overline{\mathcal{K}} \text{ mit } S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq \bigcup_{k \in n} G_{\mathcal{K},\leq k} \right\}\ .$$

1.2 Lemma

(i) $G_{\mathcal{K},\leq n} \subseteq G_{\mathcal{K},\leq n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Ist* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $G_{\mathcal{K},\leq n_0+1} = G_{\mathcal{K},\leq n_0}$, *so gilt* $G_{\mathcal{K},\leq n} = G_{\mathcal{K},\leq n_0}$ *für alle* $n \geq n_0$.

(iii) *Es gilt*

$$G_{\mathcal{K}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\mathcal{K},\leq n}\ .$$

Beweis:
(i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Definition von $G_{\mathcal{K},\leq n}$.
(iii) Wir zeigen zuerst $G_{\mathcal{K}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\mathcal{K},\leq n}$, indem wir die Abgeschlossenheit von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\mathcal{K},\leq n}$ unter $\mathcal{K}$ nachweisen. Sei $S \in \overline{\mathcal{K}}$ mit $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\mathcal{K},\leq n}$. Da $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor$ endlich ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq \bigcup_{n \in n_0} G_{\mathcal{K},\leq n}$. Nach Definition von $G_{\mathcal{K},\leq n_0}$ ist also

[27] Hierbei ist wie üblich $\bigcup_{k \in 0} G_{\mathcal{K},\leq k} := \emptyset$.

$\mathrm{pr}_{-1} S \in G_{\mathcal{K},\leq n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{\mathcal{K},\leq n}$.

Nun zeigen wir induktiv, dass $G_{\mathcal{K},\leq n} \subseteq G_{\mathcal{K}}$. Nehmen wir dazu an, dass $n \in \mathbb{N}$ mit $G_{\mathcal{K},\leq k} \subseteq G_{\mathcal{K}}$ für alle $k \in n$. Ist $x \in G_{\mathcal{K},\leq n}$, so gibt es ein $S \in \overline{\mathcal{K}}$ mit $x = \mathrm{pr}_{-1} S$ und $S\lceil \mathrm{prem}\, S\rfloor \subseteq \bigcup_{k\in n} G_{\mathcal{K},\leq k} \subseteq G_{\mathcal{K}}$. Da $G_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen ist unter $\mathcal{K}$, gilt also $x = \mathrm{pr}_{-1} S \in G_{\mathcal{K}}$. Folglich gilt auch $G_{\mathcal{K},\leq n} \subseteq G_{\mathcal{K}}$. ■

Damit ist die Abbildung

$$\mathrm{rg}_{\mathcal{K}} : G_{\mathcal{K}} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}\,;\ x \in G_{\mathcal{K},\leq n}\}$$

wohldefiniert und durch

$$x \prec_{\mathcal{K}} y \quad \text{:gdw.} \quad \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, x < \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, y$$

ist auf $G_{\mathcal{K}}$ eine wohlfundierte Relation erklärt. Wegen (i) und (ii) des gerade gezeigten Lemmas gilt $\mathrm{im}\,\mathrm{rg}_{\mathcal{K}} = \mathbb{N}$ oder $\mathrm{im}\,\mathrm{rg}_{\mathcal{K}} \in \mathbb{N}$. Gemäß Lemma A.3 (ii) ist damit $\mathrm{rg}_{\mathcal{K}}$ die Rangfunktion dieser Wohlfundierung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zudem offenbar

$$G_{\mathcal{K},\leq n} = \{x \in G_{\mathcal{K}}\,;\ \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, x \leq n\}\ .$$

Dies ist der Grund für die Bezeichnungsweise $G_{\mathcal{K},\leq n}$. Weiter deutet sich schon an, dass die Elemente von $G_{\mathcal{K}}$ in endlich vielen Schritten mit den Schlüssen aus $\overline{\mathcal{K}}$ „erzeugt“ werden können. Wir wollen an dieser Stelle aber keinen exakten Begriff der Ableitung eines Elements von $G_{\mathcal{K}}$ formulieren. Vielmehr werden wir im nächsten Abschnitt den allgemeineren Begriff der Ableitung eines Schlussschemas einführen.

Mit der Wohlfundierung $\prec_{\mathcal{K}}$ lässt sich der allgemeine Rekursionssatz (Satz A.1 (ii)) für wohlfundierte Mengen anwenden, um Funktionen auf $G_{\mathcal{K}}$ zu definieren.

1.3 Satz

Seien Y eine Menge, $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M und $g : G_{\mathcal{K}} \sqcap \mathrm{pAbb}(G_{\mathcal{K}}, Y) \to Y$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : G_{\mathcal{K}} \to Y$ mit

$$f\ulcorner x \lrcorner = g\ulcorner x, f\restriction(\prec_{\mathcal{K}}\llcorner x\rceil)\lrcorner \quad \textit{für alle } x \in X\ .$$

Zur Erinnerung: $\prec_{\mathcal{K}}\llcorner x\rceil = \{y \in G_{\mathcal{K}}\,;\ y \prec_{\mathcal{K}} x\}$ ist der $\prec_{\mathcal{K}}$-Vorbereich von x.

1.4.1. Zulässige und ableitbare Schlussschemata

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M.

Ein Schlussschema $F \in \mathrm{SCH}_M$ heißt **zulässig** in $\mathcal{K}$, falls

$$G_{\mathcal{K}\cup\{F\}} = G_{\mathcal{K}} \ .$$

Weiter heißt $Z \subseteq \mathrm{SCH}_M$ **zulässig** in $\mathcal{K}$, falls alle $F \in Z$ zulässig in $\mathcal{K}$ sind.

1.4 Lemma

Ein $Z \subseteq \mathrm{SCH}_M$ ist zulässig in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn $G_{\mathcal{K}\cup Z} = G_{\mathcal{K}}$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Wegen Lemma 1.1 reicht es $G_{\mathcal{K}\cup Z} \subseteq G_{\mathcal{K}}$ zu zeigen. Da nach Voraussetzung (und Lemma 1.1) $G_{\mathcal{K}} = G_{\mathcal{K}\cup\{F\}}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K} \cup \{F\}$ für alle $F \in Z$, ist $G_{\mathcal{K}}$ auch abgeschlossen unter $\mathcal{K} \cup Z$. Es muss also $G_{\mathcal{K}\cup Z} \subseteq G_{\mathcal{K}}$ gelten.
„$\Leftarrow$“: Sei $F \in Z$ beliebig, dann gilt (wieder mit Lemma 1.1)

$$G_{\mathcal{K}} \subseteq G_{\mathcal{K}\cup\{F\}} \subseteq G_{\mathcal{K}\cup Z} = G_{\mathcal{K}} \ ,$$

d.h. $G_{\mathcal{K}\cup\{F\}} = G_{\mathcal{K}}$. ■

Durch das Hinzufügen zulässiger Schlussschemata lassen sich also keine neuen Elemente „generieren“. Ob ein gegebenes Schlussschema zulässig ist, ist oft eine wichtige Frage.[28] Ein hinreichendes Kriterium für die Zulässigkeit ist die Ableitbarkeit, mit der wir uns nun beschäftigen wollen.

Es ist im Folgenden sehr praktisch die Projektionen pr_j, pr_{-1} als Abbildungen aufzufassen. Entweder definiert man sie hierzu global als Klassen-Abbildungen, oder man wählt lokale Definitionen, wie etwa

$$\mathrm{pr}_j : \{\tau \in {}^{\star}M \ ; \ \mathrm{len}\,\tau > j\} \to M, \ \tau \mapsto \mathrm{pr}_j\,\tau \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

und

$$\mathrm{pr}_{-1} : {}^{\star}M \setminus \langle\rangle \to M, \ \tau \mapsto \mathrm{pr}_{-1}\,\tau \ .$$

Für die in der folgenden Definition angegebenen Kompositionen wie etwa $\mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F$ ist nur wichtig, dass die Projektionsabbildungen pr_j bzw. pr_{-1} *mindestens* auf $\{\tau \in {}^{\star}M \ ; \ \mathrm{len}\,\tau > j\}$ bzw. ${}^{\star}M \setminus \langle\rangle$ definiert sind.

Sei $F \in \mathrm{SCH}_M$ und $C = \langle F_i \rangle_{i\in I}$ ein Katalog zu SCH_M. Eine **Ableitung** von F bzgl. C ist eine endliche Folge $\mathcal{A} = \big\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k \rangle \big\rangle_{k\in l}$ mit $l \in \mathbb{N}^{\times}$, sodass

$$Z_{l-1} = \mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F$$

und für alle $k \in l$:

$$Z_k : {}^{\mathrm{par}\,F}M \to M, \quad r_k \in I \quad \text{ und } \quad \mu_k : {}^{\mathrm{par}\,F}M \to {}^{\mathrm{par}\,F_{r_k}}M$$

[28] Wir werden später sehen, dass sich für jede (in der Klassenlogik formulierbare) mathematische Aussage die Frage, ob diese Aussage wahr ist, auffassen lässt als die Frage, ob ein entsprechendes Schlussschema zulässig ist.

mit

$$Z_k = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k$$

und

$$\mathrm{pr}_j \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k \in \{Z_s\,;\ s \in k\} \cup \{\mathrm{pr}_t \lhd F\,;\ t \in \mathrm{prem}\,F\} \qquad \text{für alle } j \in \mathrm{prem}\,F_{r_k}\ .$$

In diesem Falle definieren wir $\mathrm{Ref}_{\mathcal{A}} := \{r_k\,;\ k \in l\}$, d.h. $\mathrm{Ref}_{\mathcal{A}}$ ist die Menge aller „Namen" der Schlussschemata, die in der Ableitung $\mathcal{A}$ verwendet werden.

Schreibweise:

Sei $C = \langle F_i \rangle_{i \in I}$ ein Katalog und $F : {}^{m}M \to {}^{n+1}M$ gegeben durch

$$\mathit{Name}(\vec{\mathbf{x}}) : \quad \begin{array}{c} P_1(\vec{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ P_n(\vec{\mathbf{x}}) \\ \hline K(\vec{\mathbf{x}}) \end{array}$$

Ist $\mathcal{A} = \big\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k \rangle \big\rangle_{k \in l}$ eine Ableitung von F bzgl. C die bestimmt ist durch

$$Z_k : {}^{m}M \to M,\ \vec{x} \mapsto A_k(\vec{x}) \quad \text{ und } \quad \mu_k : {}^{m}M \to {}^{\mathrm{par}\,F_{r_k}}M,\ \vec{x} \mapsto B_k(\vec{x})$$

mit Termen $A_k(\vec{x})$ und $B_k(\vec{x})$, welche Elemente von M bzw. ${}^{\mathrm{par}\,F_{r_k}}M$ bezeichnen, wann immer wir $x_0, \ldots, x_{m-1}$ als Elemente von M interpretieren, so geben wir $\mathcal{A}$ zumeist an in der Form:[29]

Demonstratio:

$$\begin{array}{ll} P_1(\vec{\mathbf{x}}) & \text{Praemissio} \\ \vdots & \vdots \\ P_n(\vec{\mathbf{x}}) & \text{Praemissio} \\ A_0(\vec{\mathbf{x}}) & r_0\big(B_0(\vec{\mathbf{x}})\big) \\ \vdots & \vdots \\ A_{l-1}(\vec{\mathbf{x}}) & r_{l-1}(B_{l-1}(\vec{\mathbf{x}})) \end{array}$$

qed.

$A_{l-1}(\vec{\mathbf{x}})$ ist natürlich nach Definition des Ableitungsbegriffs nichts anderes als $K(\vec{\mathbf{x}})$.

Ein Schlussschema $F \in \mathrm{SCH}_M$ ist **ableitbar** in $\mathcal{K}$, falls es eine Ableitung von F bzgl. eines Katalogs zu $\mathcal{K}$ gibt.

Beispiel:

Das Schema

$$\mathit{Beispiel1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \quad \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \hline 3 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} + 1 \end{array}$$

ist ableitbar und damit (nach folgendem Lemma) auch zulässig in $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}$. Offenbar ist nämlich

[29] Auch hier lassen wir, wie bei Angabe von Schlussschemata, unnötige Klammern in $r_k\big(B_k(\vec{\mathbf{x}})\big)$ weg.

Demonstratio:

$\mathbf{a}$	Praemissio
$\mathbf{b}$	Praemissio
$\mathbf{a}+\mathbf{a}$	$\mathit{Plus}\big(\mathbf{a},\mathbf{a}\big)$
$(\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a}$	$\mathit{Plus}(\mathbf{a}+\mathbf{a},\mathbf{a})$
$((\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a})+\mathbf{b}$	$\mathit{Plus}\big((\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a},\mathbf{b}\big)$
1	*Eins*
$(((\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a})+\mathbf{b})+1$	$\mathit{Plus}\big(((\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a})+\mathbf{b},1\big)$

qed.

eine Ableitung von ***Beispiel1*** bzgl. C_{Bsp}.[30] Dagegen ist das Schema

$$\mathit{Mal}(\mathbf{a},\mathbf{b}):\quad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{array}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}$$

zwar zulässig, aber nicht ableitbar in $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}$ (was wir an dieser Stelle aber nicht zeigen wollen). Das Schema

$$\mathit{Vorgänger}(\mathbf{a}):\quad \frac{\mathbf{a}+1}{\mathbf{a}}$$

ist nicht zulässig in $\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}$, denn es gilt $G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}\cup\{\textbf{\textit{Vorgänger}}\}}=\mathbb{Z}\neq\mathbb{N}=G_{\mathcal{K}_{\mathrm{Bsp}}}$

Wir wollen nun zeigen, dass ableitbare Schlussschemata auch zulässig sind. Der Kern der Argumentation steckt in folgendem Lemma.

1.5 Lemma

Sei $N\subseteq M$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}$, $C=\langle F_i\rangle_{i\in I}$ ein Katalog zu $\mathcal{K}$, $F\in\mathrm{SCH}_M$ und $\big\langle\langle Z_k,r_k,\mu_k\rangle\big\rangle_{k\in l}$ mit $l\in\mathbb{N}^\times$ eine Ableitung von F bzgl. C. Dann gilt für alle $\tau\in{}^{\mathrm{par}\,F}M$

$$\text{mit}\quad F^\ulcorner\tau_\lrcorner\lceil\mathrm{prem}\,F\rfloor\subseteq N\quad\text{auch}\quad Z_k{}^\ulcorner\tau_\lrcorner\in N\ \text{für alle}\ k\in l\ .$$

Da $Z_{l-1}=\mathrm{pr}_{-1}\triangleleft F$ ist N insbesondere auch abgeschlossen unter $\mathcal{K}\cup\{F\}$.

Beweis:
Wir führen Induktion über l.

IA: Es gelte $l=1$. Sei $\tau\in{}^{\mathrm{par}\,F}M$ mit $F^\ulcorner\tau_\lrcorner\lceil\mathrm{prem}\,F\rfloor\subseteq N$. Wegen

$$\mathrm{pr}_j\triangleleft F_{r_0}\triangleleft\mu_0\in\{\mathrm{pr}_t\triangleleft F\,;\ t\in\mathrm{prem}\,F\}\ ,$$

d.h. insbesondere

$$\mathrm{pr}_j\,F_{r_0}{}^\ulcorner\mu_0{}^\ulcorner\tau_{\lrcorner\lrcorner}\in\{\mathrm{pr}_t\,F^\ulcorner\tau_\lrcorner;\ t\in\mathrm{prem}\,F\}=F^\ulcorner\tau_\lrcorner\lceil\mathrm{prem}\,F\rfloor\subseteq N$$

für alle $j\in\mathrm{prem}\,F_{r_0}$, gilt auch

$$Z_0{}^\ulcorner\tau_\lrcorner=(\mathrm{pr}_{-1}\triangleleft F_{r_0}\triangleleft\mu_0)^\ulcorner\tau_\lrcorner=\mathrm{pr}_{-1}\,F_{r_0}{}^\ulcorner\mu_0{}^\ulcorner\tau_{\lrcorner\lrcorner}\in N\ ,$$

denn $F_{r_0}\in\mathcal{K}$ und N ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}$.

---

[30]Hierbei ist nur zu beachten, dass $\dfrac{\begin{array}{c}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{array}}{3\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}+1}$ und $\dfrac{\begin{array}{c}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{array}}{(((\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{a})+\mathbf{b})+1}$ dasselbe Schlussschema bestimmen.

IV: Sei $l_0 \in \mathbb{N}^\times$ und gelte die Aussage für alle Ableitungen der Länge $l = l_0$.

IS: Betrachten wir nun den Fall $l = l_0 + 1$. Wir definieren $G : {}^{\operatorname{par} F}M \to {}^{\operatorname{prem} F+1}M$ durch

$$\sigma \mapsto \left\langle \operatorname{pr}_j F^\ulcorner \sigma_\lrcorner \right\rangle_{j \in \operatorname{prem} F} \star \left\langle Z_{l_0-1}{}^\ulcorner \sigma_\lrcorner \right\rangle \ .$$

Es ist klar, dass $\left\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k \rangle \right\rangle_{k \in l_0}$ eine Ableitung von G bzgl. C ist. Sei $\tau \in {}^{\operatorname{par} F}M = {}^{\operatorname{par} G}M$ mit $G^\ulcorner \tau_\lrcorner \lceil \operatorname{prem} G \rfloor = F^\ulcorner \tau_\lrcorner \lceil \operatorname{prem} F \rfloor \subseteq N$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $Z_k{}^\ulcorner \tau_\lrcorner \in N$ für alle $k \in l_0$. Weiter gilt für jedes $j \in \operatorname{prem} F_{r_{l_0}}$ wegen

$$\operatorname{pr}_j \triangleleft F_{r_{l_0}} \triangleleft \mu_{l_0} \in \{Z_k\,;\ k \in l_0\} \cup \{\operatorname{pr}_t \triangleleft F\,;\ t \in \operatorname{prem} F\} \ ,$$

auch

$$\operatorname{pr}_j F_{r_{l_0}}{}^\ulcorner \mu_{l_0}{}^\ulcorner \tau_{\lrcorner\lrcorner} \in \{Z_k{}^\ulcorner \tau_\lrcorner\,;\ k \in l_0\} \cup F^\ulcorner \tau_\lrcorner \lceil \operatorname{prem} F \rfloor \subseteq N \ .$$

Mit der Abgeschlossenheit von N folgt also

$$Z_{l_0}{}^\ulcorner \tau_\lrcorner = (\operatorname{pr}_{-1} \triangleleft F_{r_{l_0}} \triangleleft \mu_{l_0})^\ulcorner \tau_\lrcorner = \operatorname{pr}_{-1} F_{r_{l_0}}{}^\ulcorner \mu_{l_0}{}^\ulcorner \tau_{\lrcorner\lrcorner} \in N \ .$$

Folglich gilt $Z_k{}^\ulcorner \tau_\lrcorner \in N$ für alle $k \in l = l_0 + 1$.

■

1.6 Satz

Ist $F \in \mathrm{SCH}_M$ ableitbar in $\mathcal{K}$, so ist F auch zulässig in $\mathcal{K}$.

Beweis: Es reicht $G_{\mathcal{K} \cup \{F\}} \subseteq G_\mathcal{K}$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da $G_\mathcal{K}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}$ und damit nach vorigem Lemma auch abgeschlossen unter $\mathcal{K} \cup \{F\}$ ist. ■

Von einem sinnvollen Ableitbarkeitsbegriff erwartet man wohl folgendes:

> Hat man die Ableitbarkeit eines Schlussschemas in einem Kalkül gezeigt, und findet nun für ein weiteres Schema eine Ableitung in dem um das erstere Schema erweiterten Kalkül, so ist das zweitere Schema auch ohne das erstere, direkt aus dem ursprünglichen Kalkül ableitbar.

In der Tat hat unser Ableitungsbegriff diese Eigenschaft. Um dies in seiner allgemeinsten Form zu zeigen, führen wir die Begriffe „Ableitungsnetz“ und „Bibliothek“ ein. Im Falle von Beweiskalkülen (die wir in Kürze besprechen werden) handelt es sich bei einer Bibliothek gewissermaßen um eine Sammlung von mathematischen Theoremen (und ein paar Axiomen) samt ihren Beweisen, wobei die Referenzen auf andere Theoreme in den Beweisen ein „wohlfundiertes Netz“ bilden. Insbesondere sind keine zirkelhaften Beweise enthalten.

Sei I eine beliebige Menge und $C = \langle F_i \rangle_{i \in I}$ ein Katalog zu SCH_M. Ist $\mathcal{N} = \langle \mathcal{A}_j \rangle_{j \in I_0}$ mit $I_0 \subseteq I$ ein I_0-Tupel, sodass $\mathcal{A}_j$ eine Ableitung von F_j bzgl. C ist für jedes $j \in I_0$, so nennen wir $\mathcal{N}$ ein **Ableitungsnetz** für C, falls die Relation $\prec_\mathcal{N} \subseteq I \times I$ mit

$$i \prec_\mathcal{N} j \quad :\text{gdw} \quad j \in I_0 \text{ und } i \in \operatorname{Ref}_{\mathcal{A}_j}$$

wohlfundiert ist.

Eine **Bibliothek** über $\mathcal{K}$ ist ein Paar $\langle C, \mathcal{N}\rangle$ bestehend aus einem Katalog C zu SCH_M und einem Ableitungsnetz $\mathcal{N}$ für C, sodass $\mathrm{pr}_i\, C \in \mathcal{K}$ für alle $i \in \operatorname{def} C \setminus \operatorname{def} \mathcal{N}$.

1.7 Theorem

Ist $\big\langle \langle F_i\rangle_{i\in I}, \langle \mathcal{A}_j\rangle_{j\in I_0}\big\rangle$ eine Bibliothek über $\mathcal{K}$, so existiert für jedes $j \in I_0$ sogar eine Ableitung $\mathcal{B}_j$ von F_j bzgl. $\langle F_i\rangle_{i\in I\setminus I_0}$. Damit ist dann auch $\big\langle \langle F_i\rangle_{i\in I}, \langle \mathcal{B}_j\rangle_{j\in I_0}\big\rangle$ eine Bibliothek über $\mathcal{K}$. Insbesondere sind alle F_i ableitbar und zulässig in $\mathcal{K}$ und $G_{\mathcal{K}\cup\{F_i\,;\, i\in I\}} = G_{\mathcal{K}}$.

Beweis: Sei $\mathcal{N} := \langle \mathcal{A}_j\rangle_{j\in I_0}$. Natürlich ist $\prec\, := \,\prec_{\mathcal{N}} \cap\, (I_0 \sqcap I_0)$ wohlfundiert auf I_0. Wir können daher die Zuordnung $j \mapsto \mathcal{B}_j$ rekursiv definieren. Sei also $j_0 \in I_0$, sodass für alle $j \prec j_0$ bereits eine Ableitung

$$\mathcal{B}_j = \big\langle \langle V_a^j, s_a^j, \nu_a^j\rangle\big\rangle_{a\in l_j} \qquad (l_j \in \mathbb{N}^\times)$$

von F_j bzgl. $\langle F_i\rangle_{i\in I\setminus I_0}$ gegeben ist. Für alle $j \prec j_0$ gilt also

$$V^j_{l_j-1} = \mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F_j \tag{1.1}$$

und für alle $a \in l_j$:

$$V_a^j : {}^{\mathrm{par}\, F_j}M \to M, \quad s_a^j \in I \setminus I_0 \quad \text{und} \quad \nu_a^j : {}^{\mathrm{par}\, F_j}M \to {}^{\mathrm{par}\, F_{s_a^j}}M \tag{1.2}$$

mit

$$V_a^j = \mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F_{s_a^j} \triangleleft \nu_a^j \tag{1.3}$$

und

$$\mathrm{pr}_p \triangleleft F_{s_a^j} \triangleleft \nu_a^j \in \big\{V_e^j\,;\ e \in a\big\} \cup \big\{\mathrm{pr}_q \triangleleft F_j\,;\ q \in \operatorname{prem} F_j\big\} \qquad \text{für alle } p \in \operatorname{prem} F_{s_a^j}\ . \tag{1.4}$$

Sei weiter

$$\mathcal{A}_{j_0} = \big\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k\rangle\big\rangle_{k\in l} \qquad (l \in \mathbb{N}^\times)\ ,$$

d.h. es ist

$$Z_{l-1} = \mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F_{j_0} \tag{1.5}$$

und für alle $k \in l$:

$$Z_k : {}^{\mathrm{par}\, F_{j_0}}M \to M, \quad r_k \in I \quad \text{und} \quad \mu_k : {}^{\mathrm{par}\, F_{j_0}}M \to {}^{\mathrm{par}\, F_{r_k}}M \tag{1.6}$$

mit

$$Z_k = \mathrm{pr}_{-1} \triangleleft F_{r_k} \triangleleft \mu_k \tag{1.7}$$

und

$$\mathrm{pr}_q \triangleleft F_{r_k} \triangleleft \mu_k \in \{Z_c\,;\ c \in k\} \cup \{\mathrm{pr}_t \triangleleft F_{j_0}\,;\ t \in \operatorname{prem} F_{j_0}\} \qquad \text{für alle } q \in \operatorname{prem} F_{r_k}\ . \tag{1.8}$$

Außerdem gilt $r_k \prec_{\mathcal{N}} j_0$ und damit

$$r_k \prec j_0 \quad \text{gdw.} \quad r_k \in I_0 \qquad \text{für alle } k \in l\ . \tag{1.9}$$

Wir definieren nun für $k \in l$

$$H_k := \begin{cases} \big\langle \langle V_a^{r_k} \triangleleft \mu_k, s_a^{r_k}, \nu_a^{r_k} \triangleleft \mu_k\rangle\big\rangle_{a\in l_{r_k}}, & \text{falls } r_k \prec j_0 \\ \big\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k\rangle\big\rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\mathcal{B}_{j_0} := \mathop{\bigstar}_{k\in l} H_k \ .$$

Da für alle $k \in l$ mit (1.2), (1.6) und (1.9) im Falle $r_k \prec j_0$

$$V_a^{r_k} : {}^{\operatorname{par} F_{r_k}}M \to M, \quad \mu_k : {}^{\operatorname{par} F_{j_0}}M \to {}^{\operatorname{par} F_{r_k}}M, \quad s_a^{r_k} \in I \setminus I_0, \quad \nu_a^{r_k} : {}^{\operatorname{par} F_{r_k}}M \to {}^{\operatorname{par} F_{s_a^{r_k}}}M$$

für alle $a \in l_{r_k}$ und im Falle $r_k \not\prec j_0$

$$Z_k : {}^{\operatorname{par} F_{j_0}}M \to M, \quad r_k \in I \setminus I_0, \quad \mu_k : {}^{\operatorname{par} F_{j_0}}M \to {}^{\operatorname{par} F_{r_k}}M \ ,$$

sind die H_k wohldefiniert und es ist $\mathcal{B}_{j_0}$ von der Form

$$\mathcal{B}_{j_0} = \langle\langle V_b^{j_0}, s_b^{j_0}, \nu_b^{j_0}\rangle\rangle_{b\in l_{j_0}} \qquad (l_{j_0} \in \mathbb{N}^\times)$$

mit

$$V_b^{j_0} : {}^{\operatorname{par} F_{j_0}}M \to M, \quad s_b^{j_0} \in I \setminus I_0, \quad \nu_b^{j_0} : {}^{\operatorname{par} F_{j_0}}M \to {}^{\operatorname{par} F_{s_b^{j_0}}}M \qquad \text{für alle } b \in l_{j_0} \ .$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{B}_{j_0}$ eine Ableitung von F_{j_0} bzgl. $\langle F_i\rangle_{i\in I\setminus I_0}$ ist. Sei $b \in l_{j_0}$ beliebig. Es gibt dann ein $k \in l$, sodass

(a) Fall $r_k \prec j_0$:

$$V_b^{j_0} = V_a^{r_k} \lhd \mu_k, \quad s_b^{j_0} = s_a^{r_k} \quad \text{und} \quad \nu_b^{j_0} = \nu_a^{r_k} \lhd \mu_k \qquad \text{für ein } a \in l_{r_k}$$

(b) Fall $r_k \not\prec j_0$:

$$V_b^{j_0} = Z_k, \quad s_b^{j_0} = r_k \quad \text{und} \quad \nu_b^{j_0} = \mu_k$$

In beiden Fällen gilt für alle $c \in k$ entweder $r_c \prec j_0$ und damit wegen (1.7) und (1.1)

$$Z_c = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{r_c} \lhd \mu_c = (\operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{r_c}) \lhd \mu_c = V_{l_{r_c}-1}^{r_c} \lhd \mu_c = \operatorname{pr}_0 \operatorname{pr}_{-1} H_c \in \left\{V_d^{j_0} \,;\ d \in b\right\}$$

oder $r_c \not\prec j_0$ und damit auch

$$Z_c = \operatorname{pr}_0 \operatorname{pr}_{-1} H_c \in \left\{V_d^{j_0} \,;\ d \in b\right\} \ .$$

Es gilt also in jedem Fall

$$(*) \quad Z_c \in \left\{V_d^{j_0} \,;\ d \in b\right\} \quad \text{für alle } c \in k \ .$$

Gelte nun Fall (a). Wir haben also mit (1.3)

$$V_b^{j_0} = V_a^{r_k} \lhd \mu_k = (\operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{s_a^{r_k}} \lhd \nu_a^{r_k}) \lhd \mu_k = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{s_a^{r_k}} \lhd (\nu_a^{r_k} \lhd \mu_k) = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0}$$

und für alle $p \in \operatorname{prem} F_{s_b^{j_0}} = \operatorname{prem} F_{s_a^{r_k}}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{pr}_p \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0} &= \operatorname{pr}_p \lhd F_{s_a^{r_k}} \lhd (\nu_a^{r_k} \lhd \mu_k) \\
&= (\operatorname{pr}_p \lhd F_{s_a^{r_k}} \lhd \nu_a^{r_k}) \lhd \mu_k \\
&\in \{V_e^{r_k} \lhd \mu_k \,;\ e \in a\} \cup \left\{\operatorname{pr}_q \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k \,;\ q \in \operatorname{prem} F_{r_k}\right\} \qquad \text{mit (1.4)}
\end{aligned}$$

Da

$$V_e^{r_k} \lhd \mu_k = \mathrm{pr}_0\, \mathrm{pr}_e\, H_k \in \left\{V_d^{j_0}\,;\ d \in b\right\} \quad \text{für alle } e \in a\ ,$$

erhalten wir mit (1.8) und $(*)$:

$$\mathrm{pr}_p \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0} \in \left\{V_d^{j_0}\,;\ d \in b\right\} \cup \{\mathrm{pr}_t \lhd F_{j_0}\,;\ t \in \mathrm{prem}\, F_{j_0}\}$$

für alle $p \in \mathrm{prem}\, F_{s_b^{j_0}}$. Ist $b = l_{j_0} - 1$, so muss $k = l - 1$ und $a = l_{r_k} - 1$ gelten und damit gemäß (1.1), (1.7) und (1.5)

$$V_{l_{j_0}-1}^{j_0} = V_b^{j_0} = V_a^{r_k} \lhd \mu_k = V_{l_{r_k}-1}^{r_k} \lhd \mu_k = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k = Z_k = Z_{l-1} = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{j_0}\ .$$

Gelte nun Fall (b). Auch hier ist mit (1.7)

$$V_b^{j_0} = Z_k = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0}$$

und für alle $p \in \mathrm{prem}\, F_{s_b^{j_0}} = \mathrm{prem}\, F_{r_k}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_p \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0} &= \mathrm{pr}_p \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k \\
&\in \{Z_c\,;\ c \in k\} \cup \{\mathrm{pr}_t \lhd F_{j_0}\,;\ t \in \mathrm{prem}\, F_{j_0}\} && \text{mit (1.8)} \\
&\subseteq \left\{V_d^{j_0}\,;\ d \in b\right\} \cup \{\mathrm{pr}_t \lhd F_{j_0}\,;\ t \in \mathrm{prem}\, F_{j_0}\} && \text{mit } (*)
\end{aligned}$$

Ist $b = l_{j_0} - 1$, so muss $k = l - 1$ gelten und folglich mit (1.5)

$$V_{l_{j_0}-1}^{j_0} = V_b^{j_0} = Z_k = Z_{l-1} = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{j_0}\ .$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$V_{l_{j_0}-1}^{j_0} = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{j_0}$$

und dass für alle $b \in l_{j_0}$:

$$V_b^{j_0} = \mathrm{pr}_{-1} \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0}$$

und

$$\mathrm{pr}_p \lhd F_{s_b^{j_0}} \lhd \nu_b^{j_0} \in \left\{V_d^{j_0}\,;\ d \in b\right\} \cup \{\mathrm{pr}_t \lhd F_{j_0}\,;\ t \in \mathrm{prem}\, F_{j_0}\} \quad \text{für alle } p \in \mathrm{prem}\, F_{s_b^{j_0}}\ .$$

Damit ist $\mathcal{B}_{j_0} = \left\langle \langle V_b^{j_0}, s_b^{j_0}, \nu_b^{j_0} \rangle \right\rangle_{b \in l_{j_0}}$ eine Ableitung von F_{j_0} bzgl. $\langle F_i \rangle_{i \in I \setminus I_0}$.

Sei nun $\mathcal{N}' := \langle \mathcal{B}_j \rangle_{j \in I_0}$. Da

$$i \prec_{\mathcal{N}'} j \quad \Rightarrow \quad i \in I \setminus I_0 \text{ und } j \in I_0\ ,$$

ist $\prec_{\mathcal{N}'}$ offenbar wohlfundiert und damit $\mathcal{N}'$ ein Ableitungsnetz für $\langle F_i \rangle_{i \in I \setminus I_0}$ und damit natürlich auch für $\langle F_i \rangle_{i \in I}$, d.h. auch $\left\langle \langle F_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathcal{B}_j \rangle_{j \in I_0} \right\rangle$ ist eine Bibliothek über $\mathcal{K}$. Die restlichen Aussagen folgen leicht mit Satz 1.6 und Lemma 1.4. ■

Bemerkung: Stellt man entsprechende Berechenbarkeits- bzw. Entscheidbarkeits-Kriterien an $\mathcal{K}$, $\langle F_i \rangle_{i \in I}$ und $\langle \mathcal{A}_j \rangle_{j \in I_0}$, so sind auch die Zuordnungen $j \mapsto \mathcal{B}_j$ und $\langle \mathcal{A}_j \rangle_{j \in I_0} \mapsto \langle \mathcal{B}_j \rangle_{j \in I_0}$ berechenbar.

Ist eine endliche Indexmenge gegeben, so gibt es ein einfacherer zu überprüfendes hinreichendes Kriterium für Ableitungsnetze.

1.8 Satz

Sei I eine Menge und $I_0 \subseteq I$ endlich, $C = \langle F_i \rangle_{i \in I}$ ein Katalog zu SCH_M und zu jedem $j \in I_0$ sei $\mathcal{A}_j$ eine Ableitung von F_j bzgl. C. Gilt dann mit $\mathcal{N} := \langle \mathcal{A}_i \rangle_{i \in I_0}$:

$$i \;\overline{\prec_{\mathcal{N}}}\; i \qquad \text{für kein } i \in I_0,$$

so ist $\mathcal{N}$ ein Ableitungsnetz für C. Hierbei bezeichne $\overline{\prec_{\mathcal{N}}}$ den transitiven Abschluss von $\prec_{\mathcal{N}}$.

Beweis:
Angenommen $\prec_{\mathcal{N}}$ ist nicht wohlfundiert. Dann gibt es eine Folge $\alpha = \langle i_k \rangle_{k \in \mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}I$ mit $i_{k+1} \prec_{\mathcal{N}} i_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (Lemma A.2 (i)). Nach Definition von $\prec_{\mathcal{N}}$ muss $\operatorname{im} \alpha \subseteq I_0$ gelten. Also ist auch $\operatorname{im} \alpha$ endlich und folglich gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ mit $i_{k_1} = i_{k_2}$. Es gilt also

$$i_{k_1} = i_{k_2} \;\overline{\prec_{\mathcal{N}}}\; i_{k_1}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Jedes Element a von M lässt sich als parameter- und prämissenloses Schlussschema

$$Atom_a : \quad \frac{}{a}$$

auffassen.

1.9 Satz

Für alle $a \in M$ ist $\boldsymbol{Atom}_a$ ableitbar in $\mathcal{K}$ gdw. $a \in G_{\mathcal{K}}$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Sei $\boldsymbol{Atom}_a$ ableitbar in $\mathcal{K}$. Damit ist $\boldsymbol{Atom}_a$ auch zulässig in $\mathcal{K}$, d.h. es gilt $G_{\mathcal{K}} = G_{\mathcal{K} \cup \{\boldsymbol{Atom}_a\}}$. Insbesondere ist $G_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen unter dem Schluss $\boldsymbol{Atom}_a{}^{\ulcorner}\langle\rangle_{\lrcorner} = \langle a \rangle$. Also gilt $a \in G_{\mathcal{K}}$.

„$\Leftarrow$“: Wir führen Induktion über $\mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, a$. Sei also $a \in G_{\mathcal{K}}$ und sei $\boldsymbol{Atom}_b$ ableitbar in $\mathcal{K}$ für alle $b \in G_{\mathcal{K}}$ mit $\mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, b < \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, a$. Nach Definition von $\mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, a$ gibt es ein $F \in \mathcal{K}$ und ein $\tau \in {}^{\mathrm{par}\, F}M$ mit $a = \mathrm{pr}_{-1}\, F^{\ulcorner}\tau_{\lrcorner}$ und $F^{\ulcorner}\tau_{\lrcorner}\lceil \mathrm{prem}\, F \rfloor \subseteq \bigcup_{k \in \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, a} G_{\mathcal{K}, \leq k}$. Sei $n := \mathrm{prem}\, F$ und für $j \in n$

$$b_j := \mathrm{pr}_j\, F^{\ulcorner}\tau_{\lrcorner}\ ;$$

wegen $\mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, b_j < \mathrm{rg}_{\mathcal{K}}\, a$ ist nach Induktionsvoraussetzung $\boldsymbol{Atom}_{b_j}$ ableitbar in $\mathcal{K}$. Zu jedem $j \in n$ gibt es also einen Katalog $C^j = \langle F_i^j \rangle_{i \in I^j}$ zu $\mathcal{K}$ und eine Ableitung $\mathcal{A}_j$ von $\boldsymbol{Atom}_{b_j}$ bzgl. C^j. OBdA. sei angenommen, dass die Mengen $I^0, \ldots, I^{n-1}, n+2$ paarweise disjunkt sind. Damit definieren wir

$$I := \bigcup_{j \in n} I^j \cup (n+2)$$

und den Katalog $C = \langle F_i \rangle_{i \in I}$ durch

$$C := \bigcup_{j \in n} C^j \cup \left\{ \langle j, \boldsymbol{Atom}_{b_j} \rangle_K\ ;\ j \in n \right\} \cup \left\{ \langle n, \boldsymbol{Atom}_a \rangle_K \right\} \cup \left\{ \langle n+1, F \rangle_K \right\}\ .$$

Sei weiter $\mathcal{A}_n = \big\langle \langle Z_k, r_k, \mu_k \rangle \big\rangle_{k \in n+1}$ gegeben durch

$$Z_k : {}^0M \to M,\ \langle\rangle \mapsto b_k, \quad r_k := k, \quad \mu_k : {}^0M \to {}^0M,\ \langle\rangle \mapsto \langle\rangle \qquad \text{falls } k \in n$$

und

$$Z_n : {}^0M \to M,\ \langle\rangle \mapsto a, \quad r_n := n+1, \quad \mu_n : {}^0M \to {}^{\operatorname{par} F}M,\ \langle\rangle \mapsto \tau\ .$$

Man beachte, dass $\operatorname{par} \boldsymbol{Atom}_x = \operatorname{prem} \boldsymbol{Atom}_x = 0$ für beliebiges $x \in M$, $F_{r_n} = F_{n+1} = F$ und $F_{r_k} = F_k = \boldsymbol{Atom}_{b_k}$ für $k \in n$. Damit gilt offenbar für $k \in n$

$$Z_k : {}^{\operatorname{par} \boldsymbol{Atom}_a}M \to M, \quad r_k \in I, \quad \mu_k : {}^{\operatorname{par} \boldsymbol{Atom}_a}M \to {}^{\operatorname{par} F_{r_k}}M$$

mit

$$Z_k = \operatorname{pr}_{-1} \lhd \boldsymbol{Atom}_{b_k} \lhd \mu_k = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k$$

und da $\operatorname{prem} F_{r_k} = \operatorname{prem} \boldsymbol{Atom}_{b_k} = 0$, trivialerweise

$$\operatorname{pr}_j \lhd F_{r_k} \lhd \mu_k \in \{Z_s\,;\ s \in n\} \qquad \text{für alle } j \in \operatorname{prem} F_{r_k} = 0\ .$$

Außerdem gilt

$$Z_n : {}^{\operatorname{par} \boldsymbol{Atom}_a}M \to M, \quad r_n \in I, \quad \mu_n : {}^{\operatorname{par} \boldsymbol{Atom}_a}M \to {}^{\operatorname{par} F_{r_n}}M$$

mit

$$Z_n = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F \lhd \mu_n = \operatorname{pr}_{-1} \lhd F_{r_n} \lhd \mu_n$$

und

$$\operatorname{pr}_j \lhd F_{r_n} \lhd \mu_n = \operatorname{pr}_j \lhd F \lhd \mu_n = \operatorname{pr}_{-1} \lhd \boldsymbol{Atom}_{b_j} = Z_j \in \{Z_s\,;\ s \in n\}$$

für alle $j \in \operatorname{prem} F_{r_n} = n$. Da schließlich

$$Z_n = \operatorname{pr}_{-1} \lhd \boldsymbol{Atom}_a\ ,$$

ist $\mathcal{A}_n$ eine Ableitung von $\boldsymbol{Atom}_a$ bzgl. C. Sei $\mathcal{N} := \langle \mathcal{A}_k \rangle_{k \in n+1}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\langle C, \mathcal{N} \rangle$ eine Bibliothek über $\mathcal{K}$ ist. Seien $i, j \in I$ mit $i \prec_{\mathcal{N}} j$, d.h. $j \in n+1$ und $i \in \operatorname{Ref}_{\mathcal{A}_j}$. Ist $i \in n+1$, so folgt nach Definition von $\mathcal{N}$ offenbar $i \in n$ und $j = n$. Da kein $k \in I$ mit $n \prec_{\mathcal{N}} k$ existiert, kann es also kein $i \in n+1$ geben mit $i \overline{\prec_{\mathcal{N}}}\, i$. Nach Lemma 1.8 ist also $\mathcal{N}$ ein Ableitungsnetz für C. Weiter ist $\operatorname{def} C \setminus \operatorname{def} \mathcal{N} = \bigcup_{j \in n} I^j \cup \{n+1\}$ und damit

$$\operatorname{pr}_i C = F_i = \begin{cases} F_i^j, & \text{falls } i \in I^j \\ F, & \text{falls } i = n+1 \end{cases} \in \mathcal{K}$$

für $i \in \operatorname{def} C \setminus \operatorname{def} \mathcal{N}$, d.h. $\langle C, \mathcal{N} \rangle$ ist eine Bibliothek über $\mathcal{K}$. Insbesondere ist nach Theorem 1.7 also $\boldsymbol{Atom}_a = F_n$ ableitbar in $\mathcal{K}$. ■

Es lassen sich also alle Elemente von $G_{\mathcal{K}}$ als ableitbare Schlussschemata auffassen. Um einzusehen, dass ein $a \in M$ zu $G_{\mathcal{K}}$ gehört, reicht es somit zu zeigen, dass $\boldsymbol{Atom}_a$ in $\mathcal{K}$ ableitbar ist.

1.4.2. Ausdruckskalküle

Wir wollen nun zeigen, wie sich mit unserem Kalkülbegriff Ausdruckskalküle exakt definieren lassen. Da wir uns hier auf abzählbare Ausdrucksmengen beschränken wollen, sei $M := \langle\!\langle \mathbb{N} \rangle\!\rangle$ der Träger aller hier betrachteten Kalküle.[31] Weiter wollen wir annehmen, dass das logische System nur eine Variablensorte besitzt. Schreiben wir v_i für das Paar $\langle 0, i \rangle$, so sei daher

$$\mathcal{V} := \{v_i\,;\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq M \qquad \text{die allgemeine Variablenmenge.}^{32}$$

Betrachtet man die Ausdrucksbildungsregeln der Prädikatenlogik, so fällt auf, dass sie sich in zwei Arten einteilen lassen:

Junktorenregeln: Aus einem bzw. zwei schon gebildeten Ausdrücken φ und ψ (den Operanden) werden durch Negation, Konjunktion, Disjunktion etc. die neuen Ausdrücke $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ etc. gebildet.

Quantorenregeln: Aus einem Ausdruck φ (dem Operanden) und einer Variablen v (der Bindungsvariablen) wird die neue All- bzw. Existenzaussage $\forall v \varphi$ bzw. $\exists v \varphi$ gebildet. Hierbei verändert sich zudem evtl. die „Funktion" der in φ vorkommenden Instanzen von v; die Quantoren „binden" die Variable v in φ.

In Kapitel 3 über klassenlogische Syntaxerweiterungen werden wir Quantoren mit mehr als einer Bindungsvariablen und mehr als einem Operanden betrachten. Wir wollen daher den allgemeineren Begriff des Operators einführen. Ein allgemeiner **Operator** mit Unterscheidungsindex i bildet aus den Variablen $u_1, \ldots, u_m$ und den Ausdrücken $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ den neuen Ausdruck[33]

$$\big\langle i, \langle u_1, \ldots, u_m \rangle, \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle \big\rangle\ , \qquad \text{wobei } i, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } i \neq 0\ .$$

Wir nennen i den **Operatorindex**, $u_1, \ldots, u_m$ die **Haupt-Bindungsvariablen** und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die **Operanden** des Ausdrucks $\big\langle i, \langle u_1, \ldots, u_m \rangle, \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle \big\rangle$.

Beispiel:

Im Hinblick auf die Syntax der Klassen- und Prädikatenlogik wollen wir für die syntaktische Repräsentation der logischen Standardoperatoren die folgenden Festlegungen treffen:

$$\text{Wir schreiben} \quad \begin{array}{lll} (a = b) & \text{für} & \big\langle 1, \langle\rangle, \langle a, b \rangle \big\rangle \\ (a \wedge b) & \text{für} & \big\langle 2, \langle\rangle, \langle a, b \rangle \big\rangle \\ (a \in b) & \text{für} & \big\langle 3, \langle\rangle, \langle a, b \rangle \big\rangle \\ \forall v a & \text{für} & \big\langle 4, \langle v \rangle, \langle a \rangle \big\rangle \\ \iota v a & \text{für} & \big\langle 5, \langle v \rangle, \langle a \rangle \big\rangle \\ \{v ; a\} & \text{für} & \big\langle 6, \langle v \rangle, \langle a \rangle \big\rangle \\ \top & \text{für} & \big\langle 7, \langle\rangle, \langle\rangle \big\rangle \\ \bot & \text{für} & \big\langle 8, \langle\rangle, \langle\rangle \big\rangle \\ \neg a & \text{für} & \big\langle 9, \langle\rangle, \langle a \rangle \big\rangle \end{array} \quad .$$

[31] Allgemeiner würde sich für Ausdrucksmengen der Kardinalität κ der Träger $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ anbieten.

[32] Für mehrere Variablensorten oder auch zweitstufige Variablen lässt sich die Definition leicht anpassen. Man könnte entsprechende Variablenmengen auch in $\mathcal{V}$ „hineincodieren". Z.B. könnte man die Variablen mit geradem Index als erststufige und die übrigen als zweitstufige Variablen auffassen.

[33] Üblicherweise werden Ausdrücke als Zeichenketten, d.h. als endliche Tupel von elementaren „Zeichen" realisiert. Wir wollen hier einen anderen Weg gehen und Ausdrücke als verschachtelte Tupel auffassen. Dies wird sich gerade bei rekursiven Definitionen und in induktiven Beweisen als sehr hilfreich erweisen und entspricht, meiner Meinung nach, auch mehr dem „Baum-Charakter" von Ausdrücken.

Diese Festlegungen könnten auf den ersten Blick etwas befremden. Wie schon in Fußnote 33 angedeutet, wird uns jedoch die gleichförmige und verschachtelte Gestalt der Ausdrücke gerade bei systematischen Untersuchungen von großer Hilfe sein. Zudem wird im Vergleich zur üblichen linearisierten „Zeichenketten-Repräsentation" deutlicher, dass die syntaktische Repräsentation mathematischer Aussagen vollkommen unabhängig ist von einer möglichen Interpretation. Formale Ausdrücke sind irgendwelche konkreten mathematischen Objekte; wie sie interpretiert werden, ist ihnen „egal".

Es sind aber nicht nur logische Operatoren denkbar. Wir werden vielmehr sehen, dass sich viele mathematischen Operatoren und Eigenschaften als Operatoren in unserem Sinne realisieren lassen. So ließe sich etwa für das allgemeine cartesische Produkt bzw. für die Surjektivität von Abbildungen folgende Wahl treffen:

$$„\prod_{v \in a} b" \quad \text{steht für} \quad \big\langle i_\Pi, \langle v \rangle, \langle a, b \rangle \big\rangle$$

bzw.

$$„a : b \to c \text{ ist surjektiv}" \quad \text{steht für} \quad \big\langle i_{\mathrm{sur}}, \langle \rangle, \langle a, b, c \rangle \big\rangle \ .$$

Hierbei seien i_Π und i_{sur} irgendwelche festen natürlichen Zahlen. Die genaue Wahl der Operatorindices ist natürlich letztendlich (auch bei obigen Grundoperatoren) irrelevant.

Wir wollen nun noch eine genauere Definition von „Operator" geben. Dazu definieren wir für $i, m, n \in \mathbb{N}$, $i \neq 0$ und $\vec{u} \in {}^m\mathcal{V}$ das Schlussschema

$$\mathit{Operator}^{\vec{u}}_{i,m,n}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) : \quad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n\end{array}}{\big\langle i, \vec{u}, \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \big\rangle} \ ,$$

d.h. es ist

$$\boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,m,n} : {}^nM \to {}^{n+1}M, \ \vec{a} \mapsto \vec{a} \star \langle i, \vec{u}, \vec{a} \rangle \ .$$

Die Menge aller möglichen Operatoren ist damit gegeben durch

$$\mathrm{OP} := \Big\{ \boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,m,n} \, ; \ i, m, n \in \mathbb{N}, i \neq 0 \text{ und } \vec{u} \in {}^m\mathcal{V} \Big\} \subseteq \mathrm{SCH}_M \ .$$

Jetzt können wir endlich genau festlegen, was wir in dieser Arbeit unter einem Ausdruckskalkül verstanden wissen wollen. Ist $A \subseteq M$ eine Menge von „atomaren Ausdrücken" und $R \subseteq \mathrm{OP}$ eine Menge von „Ausdrucksbildungsregeln", so sei

$$\mathcal{AK}_{A,R} := \{ \boldsymbol{Atom}_a \, ; \ a \in A \} \cup R$$

der durch A und R bestimmte **Ausdruckskalkül** und damit $L_{A,R} := G_{\mathcal{AK}_{A,R}} \subseteq M$ die durch A und R bestimmte **Ausdrucksmenge**. Ist $\mathcal{K}$ ein Ausdruckskalkül, L die zugehörige Ausdrucksmenge und $n \in \mathbb{N}$ so setzen wir außerdem

$$L^{\leq n} := G_{\mathcal{K}, \leq n} = \{ \varphi \in L \, ; \ \mathrm{rg}_{\mathcal{K}} \, \varphi \leq n \} \ .$$

Es lassen sich ein paar schöne, allgemeine Eigenschaften von Ausdruckskalkülen feststellen.

1.10 Satz

Seien $A \subseteq M$, $R \subseteq \mathrm{OP}$ beliebig, $\mathcal{K} := \mathcal{AK}_{A,R}$ und $L := L_{A,R}$. Dann gilt:

(i)
$$L = A \cup \Big\{ \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \,;\; i \in \mathbb{N}^{\times}, \vec{u} \in {}^{\star}\mathcal{V}, \vec{\alpha} \in {}^{\star}L \text{ mit } \boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,\operatorname{len}\vec{u},\operatorname{len}\vec{\alpha}} \in R \Big\} \;.$$

(ii) *Für $\varphi \in L$ gilt*

$$\operatorname{rg}_{\mathcal{K}} \varphi = \begin{cases} 0 \;, & \text{falls } \varphi \in A \text{ oder } \varphi = \big\langle i, \vec{u}, \langle\rangle \big\rangle \\ \max\{\operatorname{rg}_{\mathcal{K}} \alpha_j \,;\; j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}\} + 1 \;, & \text{falls } \varphi \notin A \text{ und } \varphi = \big\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \big\rangle \text{ mit } \alpha \neq \langle\rangle \end{cases} \;.$$

Ist $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \notin A$, so gilt damit

$$\operatorname{rg}_{\mathcal{K}} \alpha_j < \operatorname{rg}_{\mathcal{K}} \varphi, \;\text{ d.h. } \alpha_j \prec_{\mathcal{K}} \varphi \qquad \text{für alle } j \in \operatorname{len}\vec{\alpha} \;.$$

(iii) *Für jedes $\varphi \in L$ sei $A(\varphi)$ eine wahre oder falsche Aussage. Können wir die beiden Behauptungen*

SI: *Es gilt $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in A$.*

SII: *Für alle $\varphi \in L \setminus A$ folgt aus der Annahme, dass $A(\psi)$ für alle $\psi \in L$ mit $\psi \prec_{\mathcal{K}} \varphi$ auch $A(\varphi)$.*[34]

beweisen, so gilt $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L$.

(iv) *Seien Y eine beliebige Menge, $h : A \to Y$ und $g : L \sqcap {}^{\star}Y \to Y$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : L \to Y$ mit*

$$f^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = \begin{cases} h^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} \;, & \text{falls } \varphi \in A \\ g^{\ulcorner}\varphi, f \triangleleft \vec{\alpha}_{\lrcorner} \;, & \text{falls } \varphi \notin A \text{ mit } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases} \;.$$

Beweis:

(i) Da L abgeschlossen ist unter $\mathcal{K}$ folgt die Inklusion „$\supseteq$" unmittelbar. Man zeigt nun leicht, dass auch die rechte Seite der Gleichung abgeschlossen ist unter $\mathcal{K}$. Also gilt die Gleichheit.

(ii) Ist $\varphi \in A$, so gilt $\boldsymbol{Atom}_{\varphi} \in \mathcal{K}$. Damit gilt $\varphi \in L^{\leq 0}$, d.h. $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}} \varphi = 0$.
Sei nun $\varphi \notin A$. Nach (i) gilt $\varphi = \big\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \big\rangle$ für $i \in \mathbb{N}^{\times}, \vec{u} \in {}^{\star}\mathcal{V}, \vec{\alpha} \in {}^{\star}L$ mit

$$\boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,\operatorname{len}\vec{u},\operatorname{len}\vec{\alpha}} \in \mathcal{K} \;.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\varphi \in L^{\leq n}$, d.h. $\varphi = \mathrm{pr}_{-1}\, S$ für ein $S \in \overline{\mathcal{K}}$ mit $S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq \bigcup_{k \in n} L^{\leq k}$, so gilt offenbar $S = \boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,\operatorname{len}\vec{u},\operatorname{len}\vec{\alpha}}{}^{\ulcorner}\vec{\alpha}_{\lrcorner} = \vec{\alpha} \star \langle \varphi \rangle$ und damit

$$\operatorname{im} \vec{\alpha} = S\lceil \operatorname{prem} S \rfloor \subseteq \bigcup_{k \in n} L^{\leq k} \;.$$

[34]Ist $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \notin A$ so reicht oft die Annahme, dass $A(\alpha_j)$ für alle $j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}$, um auf $A(\varphi)$ zu schließen.

Andersherum folgt aus $\operatorname{im}\vec{\alpha} \subseteq \bigcup_{k\in n} L^{\leq k}$ wegen $\boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,\operatorname{len}\vec{u},\operatorname{len}\vec{\alpha}}\ulcorner\vec{\alpha}\lrcorner = \vec{\alpha} \star \langle\varphi\rangle$ unmittelbar $\varphi \in L^{\leq n}$. Also ist

$$\varphi \in L^{\leq n} \quad \text{gdw.} \quad \operatorname{rg}_{\mathcal{K}}\alpha_j < n \text{ für alle } j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}_{\mathcal{K}}\varphi &= \min\{n \in \mathbb{N}\,;\ \operatorname{rg}_{\mathcal{K}}\alpha_j < n \text{ für alle } j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}\} \\ &= \begin{cases} 0\ , & \text{falls } \operatorname{len}\vec{\alpha} = 0 \\ \max\{\operatorname{rg}_{\mathcal{K}}\alpha_j\ ;\ j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}\} + 1\ , & \text{sonst}\end{cases}\ .\end{aligned}$$

(iii) folgt unmittelbar aus der Wohlfundiertheit von $\prec_{\mathcal{K}}$.

(iv) ist ein Spezialfall von Satz 1.3. Wir definieren

$$\tilde{g} : L \sqcap \operatorname{pAbb}(L, Y) \to Y$$

durch

$$\langle\varphi, p\rangle \mapsto \begin{cases} h\ulcorner\varphi\lrcorner, & \text{falls } \varphi \in A \\ g\ulcorner\varphi, p \vartriangleleft \vec{\alpha}\lrcorner, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \notin A\end{cases}\ .$$

Nach Satz 1.3 gibt es dann genau eine $f : L \to Y$ Abbildung mit

$$\begin{aligned} f\ulcorner\varphi\lrcorner &= \tilde{g}\ulcorner\varphi, f\restriction(\prec_{\mathcal{K}}\llcorner\varphi\rceil)\lrcorner \\ &= \begin{cases} h\ulcorner\varphi\lrcorner, & \text{falls } \varphi \in A \\ g\ulcorner\varphi, f\restriction(\prec_{\mathcal{K}}\llcorner\varphi\rceil) \vartriangleleft \vec{\alpha}\lrcorner, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \notin A\end{cases} \\ &= \begin{cases} h\ulcorner\varphi\lrcorner, & \text{falls } \varphi \in A \\ g\ulcorner\varphi, f \vartriangleleft \vec{\alpha}\lrcorner, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \notin A\end{cases}\ .\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in L$. Die letzte Gleichheit folgt, da nach (ii) $\alpha_j \prec_{\mathcal{K}} \varphi$ für alle $j \in \operatorname{len}\vec{\alpha}$. ■

Das in (iii) beschriebene Beweisverfahren nennt man **strukturelle Induktion**. Sie ist offenbar ein Spezialfall der Induktion auf wohlfundierten Mengen.[35] Wir werden im Folgenden viele strukturelle Induktionen führen. Hierbei werden wir die Induktionsvoraussetzung in SII (welche wir, um Missverständnisse in Doppelinduktionen zu vermeiden, manchmal auch mit SIV bezeichnen wollen) selten explizit erwähnen.

Wegen (iv) lassen sich Funktionen auf L rekursiv über den Aufbau der Ausdrücke definieren. Derartige rekursive Funktions-Definitionen geben wir im Folgenden an durch die üblichen Schreibweisen wie

$$f : L \to Y,\ \varphi \mapsto \begin{cases} h\ulcorner\varphi\lrcorner\ , & \varphi \in A \\ g\ulcorner\varphi, f \vartriangleleft \vec{\alpha}\lrcorner\ , & \varphi \notin A \text{ mit } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle\end{cases}\ .$$

[35] Zu beachten ist, dass die strukturelle Induktion nicht immer gleichzusetzen ist mit einer Induktion über den Rang der Ausdrücke, da Operatoren mit $n = 0$ prämissenlosen Schlussschemata entsprechen, die Elemente mit Rang 0 „erzeugen“, aber im Induktionsschritt SII behandelt werden.

Eine besondere Ausdrucksmenge ist gegeben im Falle von $A = \mathcal{V}$ und $R = \mathrm{OP}$. Wir setzen

$$L_{\mathrm{sup}} := L_{\mathcal{V},\mathrm{OP}} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{AK}_{\mathrm{sup}} := \mathcal{AK}_{\mathcal{V},\mathrm{OP}} \ .$$

Alle klassenlogischen Ausdrucksmengen, die wir in diesem Dokument betrachten werden, haben die Gestalt $L_{\mathcal{V},R}$ mit $R \subseteq \mathrm{OP}$. Natürlich gilt dann $\mathcal{AK}_{\mathcal{V},R} \subseteq \mathcal{AK}_{\mathrm{sup}}$ und damit $L_{\mathcal{V},R} \subseteq L_{\mathrm{sup}}$.[36] Die Menge L_{sup} ist also eine Obermenge aller klassenlogischen Ausdrucksmengen. Insbesondere lassen sich die folgenden Definition für alle klassenlogischen Ausdrucksmengen verwenden.

Es lassen sich rekursiv leicht drei Hilfsabbildungen definieren, die die in einem Ausdruck vorkommenden „Operanden-Variablen", Bindungsvariablen bzw. Operatorindices bestimmen:

$$\mathrm{var} : L_{\mathrm{sup}} \to \mathcal{P}(\mathcal{V}),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \{\varphi\}, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \bigcup_{j \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \mathrm{var}\,\alpha_j, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases}$$

$$\mathrm{bind} : L_{\mathrm{sup}} \to \mathcal{P}(\mathcal{V}),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \mathrm{im}\,\vec{u} \cup \bigcup_{j \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \mathrm{bind}\,\alpha_j, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases}$$

$$\mathrm{opi} : L_{\mathrm{sup}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \{i\} \cup \bigcup_{j \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \mathrm{opi}\,\alpha_j, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases}$$

Wegen $L_{\mathrm{sup}} \cap {}^{\star}L_{\mathrm{sup}} = \emptyset$[37] können wir die Abbildung var fortsetzen auf ${}^{\star}L_{\mathrm{sup}}$ durch

$$\vec{\gamma} \mapsto \bigcup_{j \in \mathrm{len}\,\vec{\gamma}} \mathrm{var}\,\gamma_j \ .$$

Weiter ist es sehr praktisch die Minimumsfunktion von den natürlichen Zahlen auf $\mathcal{V}$ zu übertragen. Für $X \subseteq \mathcal{V}$ sei daher

$$\min\nolimits_0 X := \begin{cases} v_{\min\{i \in \mathbb{N}\,;\, v_i \in X\}} & X \neq \emptyset \\ v_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit induktiv für $j \in \mathbb{N}$:

$$\min\nolimits_{j+1} X := \min\nolimits_j (X \setminus \min\nolimits_0 X) \ .$$

Gewissermaßen bezeichnet $\min_j X$ also die „$(j+1)$-kleinste" in X vorkommende Variable. Für $j \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \in {}^{\star}L_{\mathrm{sup}}$ sei nun

$$\mathfrak{v}_j(\Gamma) := \min\nolimits_j(\mathcal{V} \setminus (\mathrm{var}\,\Gamma \cup \mathrm{bind}\,\Gamma))$$

die „$(j+1)$-kleinste" nicht in Γ vorkommende Variable. Es gilt offenbar $\mathfrak{v}_j(\langle\rangle) = v_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

[36] Es gilt sogar $L^{\leq n}_{\mathcal{V},R} = L^{\leq n}_{\mathrm{sup}} \cap L_{\mathcal{V},R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[37] Für alle Ausdrücke $\varphi \in L_{\mathrm{sup}}$ gilt unter Beachtung von Satz 1.10 (i) einerseits $\varphi \neq \langle\rangle$ und $\mathrm{pr}_0\,\varphi \in \mathbb{N}$ und andererseits $\varphi \notin \mathbb{N}$ wegen unseren Definitionen von Tupeln und $\mathbb{N}$. Ein Ausdruck kann also nicht gleichzeitig ein Tupel von Ausdrücken sein.

Abschließend wollen wir auf L_{sup} eine „starre" Substitutionsfunktion definieren. Anders als die später zu betrachtende „intelligente" Substitution (siehe Seite 63) ersetzt die starre Substitution auch Bindungsvariablen und führt keine kollisionsvermeidende Variablenumbenennung durch. Wir definieren zunächst die Menge

$$\mathrm{SK} \subseteq L_{\text{sup}} \sqcap {}^{\star}L_{\text{sup}} \sqcap {}^{\star}\mathcal{V}$$

der „Substitutions-Konstellationen" durch

$$\begin{aligned}&\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \in \mathrm{SK}\\ &\qquad \text{gdw.}\\ &\vec{w} \text{ injektiv}, \quad \operatorname{len}\vec{\gamma} = \operatorname{len}\vec{w}, \quad \operatorname{bind}\varphi \cup \operatorname{var}\varphi \subseteq \operatorname{im}\vec{w}, \quad \forall j \in \operatorname{len}\vec{w} : (w_j \in \operatorname{bind}\varphi \Rightarrow \gamma_j \in \mathcal{V})\end{aligned}$$

und damit die **starre Substitution**

$$\mathrm{sSUB} : \mathrm{SK} \to L_{\text{sup}},\ \langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \mapsto \varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}$$

durch

$$\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} = \begin{cases} \gamma_j, & \text{falls } \varphi = w_j \text{ mit } j \in \operatorname{len}\vec{w} \\ \big\langle i, \langle u_1\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}, \dots, u_n\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\rangle, \langle \alpha_1\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}, \dots, \alpha_m\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\rangle\big\rangle, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \end{cases}.$$

Man überlegt sich induktiv leicht, dass für $R \subseteq \mathrm{OP}$ und $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \in \mathrm{SK}$ mit $\varphi \in L_{\mathcal{V},R}$ und $\vec{\gamma} \in {}^{\star}L_{\mathcal{V},R}$ auch $\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \in L_{\mathcal{V},R}$ gilt.

Die starre Substitution werden wir erst im Kapitel 3 über klassenlogische Syntaxerweiterungen benötigen.

1.4.3. Beweiskalküle

Sei $\mathfrak{X}$ ein logisches System.

Ein **Beweiskalkül**[38] für $\mathfrak{X}$ ist ein Kalkül $\mathcal{K}$ über ${}^{\star}L_{\mathfrak{X}}$ mit $G_{\mathcal{K}} \subseteq {}^{\star}L_{\mathfrak{X}} \setminus \langle\rangle$. Ist $\mathcal{K}$ ein Beweiskalkül für $\mathfrak{X}$, so ist die (durch $\mathcal{K}$ gegebene) **Beweisbarkeitsrelation** $\vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}(L_{\mathfrak{X}}) \sqcap L_{\mathfrak{X}}$ definiert durch:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} \varphi \qquad \text{:gdw} \qquad \text{es gibt ein } \Gamma \in {}^{\star}\Phi \text{ mit } \Gamma \star \langle\varphi\rangle \in G_{\mathcal{K}} \;.$$

Ein Beweiskalkül $\mathcal{K}$ für $\mathfrak{X}$ heißt

- **korrekt**, falls $\vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} \subseteq \vDash_{\mathfrak{X}}$
- **vollständig**, falls $\vDash_{\mathfrak{X}} \subseteq \vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}}$
- **adäquat**, falls $\vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} = \vDash_{\mathfrak{X}}$

Ein $\Phi \subseteq L_{\mathfrak{X}}$ heißt **$\mathcal{K}$-inkonsistent**, falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} \varphi$ für alle $\varphi \in L_{\mathfrak{X}}$. Andernfalls nennen wir Φ **$\mathcal{K}$-konsistent**.

Wenn ein Beweiskalkül oder ein logisches System fixiert wurde, so lassen wir den entsprechenden Index zumeist weg. D.h. wir schreiben einfach „$\vdash_{\mathfrak{X}}$“ bzw. „$\vdash_{\mathcal{K}}$“ (oder sogar einfach „$\vdash$“) und „Φ ist inkonsistent“ etc.

Ist $\Gamma \in {}^{\star}L_{\mathfrak{X}}$ und $\varphi \in L_{\mathfrak{X}}$, so nennen wir $\Gamma \star \langle\varphi\rangle$ **korrekt**, falls im $\Gamma \vDash_{\mathfrak{X}} \varphi$.

1.11 Satz

Sei $\mathcal{K}$ ein Beweiskalkül für $\mathfrak{X}$. Sind alle $\Gamma \in G_{\mathcal{K}}$ korrekt, so ist $\mathcal{K}$ korrekt.

Beweis: Gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{X},\mathcal{K}} \varphi$. Es gibt also ein $\Gamma \in {}^{\star}\Phi$ mit $\Gamma \star \langle\varphi\rangle \in G_{\mathcal{K}}$. Nach Voraussetzung ist $\Gamma \star \langle\varphi\rangle$ korrekt, d.h. es gilt im $\Gamma \vDash_{\mathfrak{X}} \varphi$. Da im $\Gamma \subseteq \Phi$ gilt natürlich auch $\Phi \vDash_{\mathfrak{X}} \varphi$. ■

In Abschnitt 2.3 werden wir uns intensiv mit einem konkreten Beweiskalkül für die Klassenlogik beschäftigen. Daher wollen wir an dieser Stelle nicht genauer auf diesen Begriff eingehen und auch keine Beispiele angeben.

[38] Wir beschränken uns hier auf Sequenzenkalküle mit genau einem Sukzedens. Die Definitionen lassen sich leicht anpassen, wenn man andere Kalküle, wie z.B. die Hilbertkalküle benutzen möchte.

1.5. Prädikatenlogik

Wir wollen hier eine Definition der Prädikatenlogik geben, die eine Einbettung in die Klassenlogik besonders einfach macht. Möchte man die Prädikatenlogik als ein für sich stehendes logisches System einführen, würde man sicherlich aus ästhetischen Gründen eine leicht andere Definition wählen. Da wir eine Vertrautheit mit der Prädikatenlogik voraussetzen, soll dieser Abschnitt kurz und kompakt gehalten sein; ohne Beispiele und Erläuterungen.

Wieder sei $M := \langle\!\langle \mathbb{N} \rangle\!\rangle$ der Träger aller hier zu betrachtenden Kalküle. Die Menge der möglichen prädikatenlogischen (nicht-logischen) Symbole sei

$$I_{\text{Sym}} := \{2n+1\,;\ n \in \mathbb{N} \setminus 5\} = \{11, 13, 15, 17, \dots\}\ .$$ [39]

Ein Tripel $\sigma = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathrm{ar} \rangle$ ist eine (prädikatenlogische) **Signatur**, wenn

- $\mathcal{F}, \mathcal{R} \subseteq I_{\text{Sym}}$ mit $\mathcal{F} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ (Menge der Funktions- bzw. Relationssymbole)
- $\mathrm{ar} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{N}$ (Stelligkeit der Symbole)

Konstantensymbole werden hier durch 0-stellige Funktionssymbole vertreten. Bei 0-stelligen Relationssymbolen handelt es sich um boolesche Konstantensymbole.

Sei nun $\sigma = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathrm{ar} \rangle$ eine feste Signatur.

1.5.1. Syntax der Prädikatenlogik

Sei

$$\mathcal{V}_P := \{v_{2i}\,;\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V}$$

die Menge der (prädikatenlogischen) Variablen. Ist $f \in \mathcal{F}$, so schreiben wir

$$f t_1 \dots t_{\mathrm{ar}(f)} \quad \text{für} \quad \big\langle f, \langle\rangle, \langle t_1, \dots, t_{\mathrm{ar}(f)} \rangle \big\rangle\ .$$

Damit sei die Menge T_σ aller **σ-Terme** bestimmt durch[40]

$$\frac{}{v} \quad \text{für } v \in \mathcal{V}_P \qquad \text{und} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{\mathrm{ar}(f)}\end{array}}{f\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_{\mathrm{ar}(f)}} \quad \text{für } f \in \mathcal{F}\ .$$

Weiter schreiben wir

$$\begin{array}{lll}
(t = t') & \text{für} & \big\langle 1, \langle\rangle, \langle t, t' \rangle \big\rangle \\
(\varphi \wedge \psi) & \text{für} & \big\langle 2, \langle\rangle, \langle \varphi, \psi \rangle \big\rangle \\
\forall v \varphi & \text{für} & \big\langle 4, \langle v \rangle, \langle \varphi \rangle \big\rangle \\
\neg \varphi & \text{für} & \big\langle 9, \langle\rangle, \langle \varphi \rangle \big\rangle \\
R t_1 \dots t_{\mathrm{ar}(R)} & \text{für} & \big\langle R, \langle\rangle, \langle t_1, \dots, t_{\mathrm{ar}(R)} \rangle \big\rangle \qquad \text{wenn } R \in \mathcal{R}
\end{array}\ .$$

[39] Wir beschränken uns hier auf abzählbare Symbolmengen.

[40] D.h. es gilt $T_\sigma = L_{\mathcal{V}_P, X}$ mit $X := \Big\{ \boldsymbol{Operator}^{\langle\rangle}_{f,0,\mathrm{ar}(f)}\,;\ f \in \mathcal{F} \Big\}$.

Sei

$$A_\sigma := \left\{ (t = t')\,;\; t, t' \in T_\sigma \right\} \cup \left\{ Rt_1 \ldots t_{\mathrm{ar}(R)}\,;\; R \in \mathcal{R}, t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)} \in T_\sigma \right\}$$

die Menge aller atomaren σ-Ausdrücke. Die Menge L_σ aller σ-**Ausdrücke** ist dann gegeben durch[41]

$$\frac{}{\varphi} \quad \text{für } \varphi \in A_\sigma \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{array}}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})} \qquad\qquad \frac{\mathbf{a}}{\neg\mathbf{a}} \qquad\qquad \frac{\mathbf{a}}{\forall v\mathbf{a}} \quad \text{für } v \in \mathcal{V}_P\ .$$

1.5.2. Semantik der Prädikatenlogik

Eine (prädikatenlogische) σ-**Struktur** ist ein Paar $\mathfrak{A} = \langle U_\mathfrak{A}, \mathcal{B}_\mathfrak{A} \rangle$ mit

- $U_\mathfrak{A}$ nichtleere Menge (Träger/Universum der Struktur)
- $\mathcal{B}_\mathfrak{A} \in {}^{\mathcal{F}\cup\mathcal{R}}\mathscr{D}_{\mathrm{All}}$, sodass (Symbolbelegung)

$$f^\mathfrak{A} := \mathrm{pr}_f\, \mathcal{B}_\mathfrak{A} \in \mathrm{Abb}({}^{\mathrm{ar}(f)}U_\mathfrak{A}, U_\mathfrak{A}) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}$$

$$R^\mathfrak{A} := \mathrm{pr}_R\, \mathcal{B}_\mathfrak{A} \subseteq {}^{\mathrm{ar}(R)}U_\mathfrak{A} \quad \text{für alle } R \in \mathcal{R}$$

Ein Paar $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}_\mathfrak{I}, h_\mathfrak{I} \rangle$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}_\mathfrak{I} = \langle U_\mathfrak{I}, \mathcal{B}_\mathfrak{I} \rangle$ und einer sogenannten Variablenbelegung $h_\mathfrak{I} : \mathcal{V}_P \to U_\mathfrak{I}$ ist eine (prädikatenlogische) σ-**Interpretation**. Wir schreiben dann auch $x^\mathfrak{I}$ für $x^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}$.

Ist $v \in \mathcal{V}_P$ und $a \in U_\mathfrak{I}$, so definieren wir $\mathfrak{I}\frac{a}{v} := \langle \mathfrak{A}_\mathfrak{I}, h_\mathfrak{I}\frac{a}{v} \rangle$, wobei

$$h_\mathfrak{I}\frac{a}{v} : \mathcal{V}_P \to A,\ x \mapsto \begin{cases} a, & \text{falls } x = v \\ h_\mathfrak{I}\ulcorner x \lrcorner, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Durch jede σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Terminterpretationsabbildung $\tilde{\mathfrak{I}} : T_\sigma \to U_\mathfrak{I}$ bestimmt:

$$t \mapsto \begin{cases} h_\mathfrak{I}\ulcorner t \lrcorner, & \text{falls } t \in \mathcal{V}_P \\ f^\mathfrak{I}\ulcorner \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_1 \lrcorner, \ldots, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_{\mathrm{ar}(f)} \lrcorner \lrcorner, & \text{falls } t = ft_1 \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \end{cases} .$$

Sei $\{V_\mathrm{P}, F_\mathrm{P}\}$ eine zweielementige Menge. Wir bezeichnen V_P als das Wahrheits- und F_P als das Falschheitsobjekt (der Prädikatenlogik). Es lässt sich nun auf eindeutige Weise zu jeder σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ eine Ausdrucksinterpretationsabbildung $\overline{\mathfrak{I}} : L_\sigma \to \{V_\mathrm{P}, F_\mathrm{P}\}$ definieren, sodass für alle $R \in \mathcal{R}$, $t, t', t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)} \in T_\sigma$, $u \in \mathcal{V}_P$ und alle $\alpha, \beta \in L_\sigma$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner (t = t') \lrcorner = \begin{cases} V_\mathrm{P}, & \text{falls } \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t' \lrcorner \\ F_\mathrm{P}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner Rt_1 \ldots t_{\mathrm{ar}(R)} \lrcorner = \begin{cases} V_\mathrm{P}, & \text{falls } \langle \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_1 \lrcorner, \ldots, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_{\mathrm{ar}(R)} \lrcorner \rangle \in R^\mathfrak{I} \\ F_\mathrm{P}, & \text{sonst} \end{cases}$$

[41] D.h. es gilt $L_\sigma = L_{A_\sigma,X}$ mit $X := \left\{ \boldsymbol{\mathit{Operator}}^{\langle\rangle}_{2,0,2}, \boldsymbol{\mathit{Operator}}^{\langle\rangle}_{9,0,1} \right\} \cup \left\{ \boldsymbol{\mathit{Operator}}^{\langle v\rangle}_{4,1,1}\,;\; v \in \mathcal{V}_P \right\}$.

$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\lrcorner = \begin{cases} V_{\mathrm{P}}, & \text{falls } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathrm{P}} \text{ und } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\beta\lrcorner = V_{\mathrm{P}} \\ F_{\mathrm{P}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\neg\alpha\lrcorner = \begin{cases} V_{\mathrm{P}}, & \text{falls nicht } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathrm{P}} \\ F_{\mathrm{P}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\forall u\alpha\lrcorner = \begin{cases} V_{\mathrm{P}}, & \text{falls } \overline{\mathfrak{I}_u^b}\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathrm{P}} \text{ für all } b \in U_{\mathfrak{I}} \\ F_{\mathrm{P}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir können nun das logische System PL_σ definieren durch:

- $L_{\mathrm{PL}_\sigma} := L_\sigma$
- $\mathscr{M}_{\mathrm{PL}_\sigma}$ sei die Klasse aller σ-Interpretationen
- $\mathrm{VER}_{\mathrm{PL}_\sigma} : \mathscr{M}_{\mathrm{PL}_\sigma} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}}, \mathfrak{I} \mapsto V_{\mathrm{P}}$
- $\mathrm{INT}_{\mathrm{PL}_\sigma} : \mathscr{M}_{\mathrm{PL}_\sigma} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}}, \mathfrak{I} \mapsto \overline{\mathfrak{I}}$

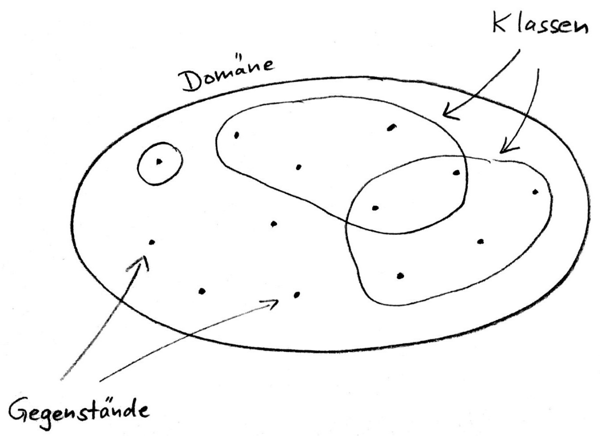
2. Klassenlogik

Since it is now well known that the whole of mathematics can be constructed within set theory, or the theory of classes, the problem [of whether mathematical notions are logical notions] *reduces to the following one: Are set-theoretical notions logical notions or not? Again, since it is known that all usual set-theoretical notions can be defined in terms of one, the notion of belonging, or the membership relation, the final form of our question is whether the membership relation is a logical one in the sense of my suggestion.*

Alfred Tarski, *What Are Logical Notions?*

Wenden wir uns nun endlich dem Hauptgegenstand dieser Arbeit, der Klassenlogik CL zu. Sie ist ein logisches System im Sinne des ersten Kapitels. Bevor wir die exakten Definitionen angeben, wollen wir ein paar motivierende Gedanken vorausschicken.

Der Ausgangspunkt mathematischer Untersuchungen ist zumeist eine manchmal mehr, manchmal weniger klar umgrenzte Gesamtheit D von Gegenständen, die wir **Domäne** nennen wollen. Wir interessieren uns hierbei weniger für die einzelnen Gegenstände an sich, als für die Relationen der Gegenstände zueinander.[1] Die einfachsten Relations-Formen sind die (1-stelligen) **Eigenschaften**. Durch eine Eigenschaft ist für jeden Gegenstand der Domäne festgelegt, ob er diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Dies ist auch der Grund warum Frege unter Eigenschaften, die er *Begriffe* nennt, Funktionen $f : D \to \{\text{Wahr}, \text{Falsch}\}$ versteht. Man kann eine Eigenschaft aber auch als eine Teilgesamtheit der Domäne auffassen, nämlich gerade als die Teilgesamtheit aller Gegenstände aus D, die diese Eigenschaft besitzen. Oft nennt man derartig gebildete Teilgesamtheiten *Begriffsumfänge*; in der Klassenlogik wollen wir sie als **Klassen** bezeichnen.

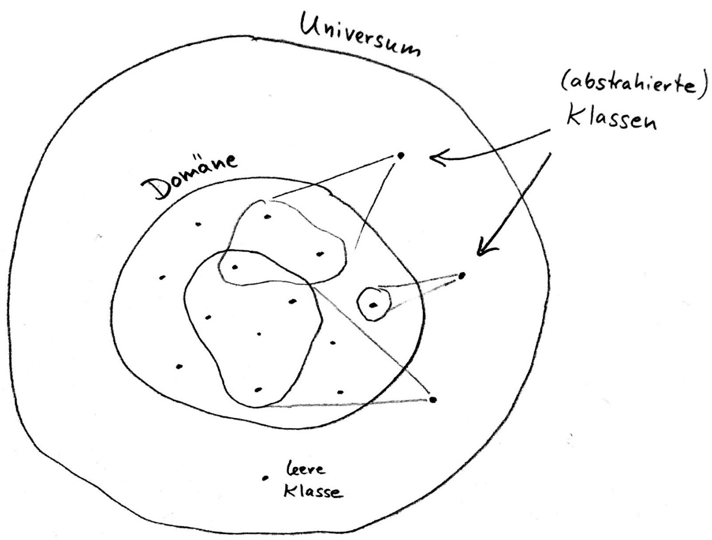


[1] Wenn scheinbar doch einmal ein einzelner Gegenstand unsere gesamte Aufmerksamkeit auf sich zieht, so liegt dies wohl daran, dass er eine reichhaltige innere Struktur besitzt, die alsbald zum eigentlich Interessierenden wird, sodass wir es also wieder mit einer Vielheit von Gegenständen zu tun haben.

Nun kommt es aber recht bald vor, dass wir Eigenschaften/Klassen selbst zu Gegenständen unserer Untersuchung machen wollen. So fasst man beispielsweise in der axiomatischen Punkt-Geometrie, in der man von einer Gesamtheit von Punkten ausgeht, die Klasse aller zu zwei gegebenen Punkten a, b kollinear liegenden Punkte, als die a und b verbindende Gerade auf, die man dann oft im weiteren Verlauf als etwas Gegenständliches behandelt wissen möchte. Es liegt also nahe unseren Gegenstandsbereich D zu einem größeren Gegenstandsbereich U, dem **Universum**, zu erweitern. Er enthält neben unseren urspünglichen Gegenständen, d.h. den Elementen der Domäne, die wir von nun an **Gegenstände 1. Stufe** nennen wollen, auch **Gegenstände 2. Stufe**, unsere Klassen, die nun als neue Einheiten, als Gegenstände zu denken sind und nicht als Vielheiten. Hierbei nehmen wir einen extensionalen Standpunkt ein, d.h. Klassen mit denselben Elementen seien gleich. Um den Übergang „Teilgesamtheit von D, als Vielheit gedacht“ zu „Teilgesamtheit von D, als neue Einheit gedacht“ explizit zu machen, wollen wir uns genauer eine Injektion

$$A : \mathcal{P}(D) \to U \ ,$$

den sogenannten **Abstraktor**, denken. D.h. wir ordnen jeder Teilgesamtheit X von D (als Vielheit gedacht[2]) einen „Vertreter“ (die Abstraktion $A(X)$ von X) in unserem Gegenstandsbereich U zu.[3] Genau genommen wollen wir erst diese Vertreter als Klassen bezeichnen. Das Bild von A besteht also aus allen Klassen. In vielen Fällen ist A die identische Injektion, d.h. es gilt $A(X) = X$ für alle $X \subseteq D$.



Der Zwischenschritt des „Abstrahierens“ überträgt sich natürlich auf die Elementbeziehung ϵ zwischen Gegenständen 1. Stufe und den Klassen von Gegenständen 1. Stufe, d.h. für $a \in D$ und $b \in U$ setzen wir

$$a \, \epsilon \, b \quad \text{:gdw.} \quad \text{es existiert ein } X \subseteq D \text{ mit } b = A(X) \text{, sodass } a \in X \ .$$

Gilt $a \, \epsilon \, b$, so sagen wir oft einfach „b enthält a“ und verwenden die üblichen mengentheoretischen Sprechweisen. Im Falle einer identischen Injektion A ist ϵ eine Einschränkung der Meta-Elementrelation $\in$.

[2] Natürlich behandeln wir auf der Meta-Ebene auch diese „Vielheit-Gesamtheiten“ (allein schon durch die Bildung der Potenzgesamtheit $\mathcal{P}(D)$) als Einheiten.

[3] Auch in Cantors berühmter Mengencharakterisierung (siehe [Can32, S. 282]) wird diese Vereinheitlichung/Verdinglichung thematisiert: „Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Wie gehen wir nun aber vor, wenn wir Eigenschaften auf dem ganzen Universum U, d.h. insbesondere Gesamtheiten von Klassen untersuchen wollen?

Eine Möglichkeit wäre, den gerade geschilderten Vorgang zu wiederholen. Bezeichne hierzu U_1 die Domäne, d.h. die Gesamtheit der Gegenstände 1. Stufe und U_2 das Universum von Gegenständen 1. und 2. Stufe. Die Klassen von Gegenständen 1. Stufe nennen wir Klassen 1. Stufe. Klassen zweiter Stufe enthalten Gegenstände 1. und 2. Stufe; sie sind Gegenstände 3. Stufe und erweitern U_2 zu U_3. Dieser Prozess lässt sich wiederholen, sodass wir eine aufsteigende Hierarchie von Universen erhalten. Das Universum U_i besteht aus allen Gegenständen der Stufen 1 bis i, der Abstraktor $A_i : \mathcal{P}(U_i) \to U_{i+1}$ „abstrahiert" Teilgesamtheiten von U_i zu Klassen i-ter Stufe. Klassen i-ter Stufe sind also Gegenstände $(i+1)$-ter Stufe und enthalten Gegenstände der Stufen 1 bis i.

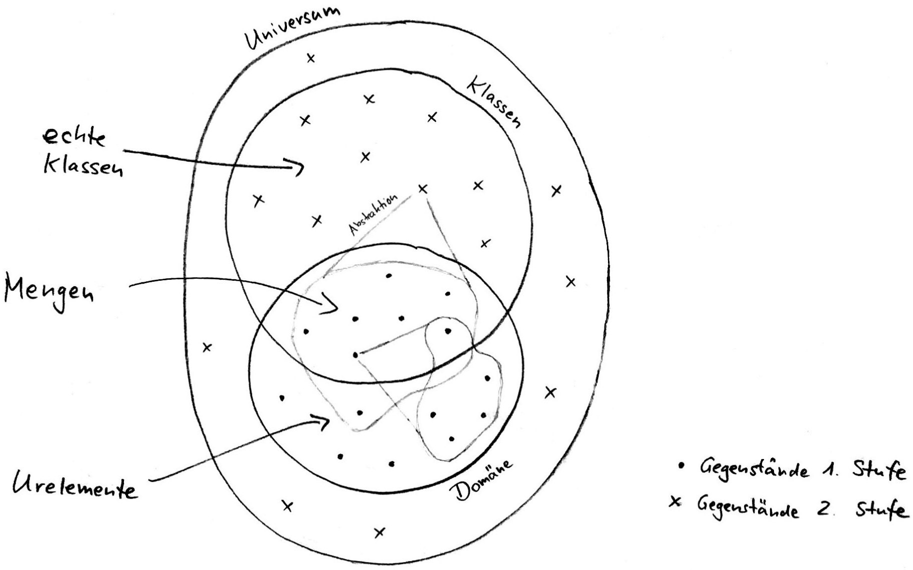
In höherstufiger Prädikatenlogik geht man diesen Weg, nur dass man identische Injektionen A_i wählt und zudem die Universen U_i nur aus Gegenständen i-ter Stufe bestehen (d.h. Klassen i-ter Stufe enthalten nur Gegenstände i-ter Stufe), sodass man die höherstufigen Universen nicht explizit erwähnen muss.[4]

Könnten wir diese sich auftürmende Hierarchie nicht vermeiden, indem wir einfach fordern, dass alle Klassen (1. Stufe) auch Gegenstände 1. Stufe sind? Frege tat genau dies, was bekanntermaßen zum Zutagetreten der Russel'schen Antinomie geführt hat. Es ist nämlich nach dem Satz von Cantor keine Injektion $\mathcal{P}(D) \to D$ möglich. Es gibt einfach „mehr" Eigenschaften von Gegenständen als Gegenstände. Aber könnten wir nicht zumindest von *manchen* Klassen fordern, dass sie sogar Gegenstände 1. Stufe sind? Ja, das ist möglich! Der von Zermelo und Fraenkel eingeschlagene Weg nimmt sich gerade diesen Ansatz zum Ausgangspunkt. Die Klassen, die zugleich Gegenstände 1. Stufe sind, werden üblicherweise als **Mengen** bezeichnet. Die axiomatische Mengenlehre beschäftigt sich im Wesentlichen mit der Frage, welche Klassen Mengen sein dürfen, wie derartige Forderungen logisch zusammenhängen und welche Schlussfolgerungen sich aus ihnen ziehen lassen.

Auch die Klassenlogik ermöglicht die Bildung von Klassen von Klassen in dieser Weise. Da sie jedoch einen logischen Rahmen darstellen möchte, wird von keiner Klasse allgemein gefordert, dass sie sogar eine Menge ist. Dies geschieht erst durch konkrete hinzuzunehmende nicht-logische Axiome.[5] Eine klassenlogische Struktur ist somit (im Wesentlichen) gegeben durch ein Universum U, eine Domäne $D \subseteq U$ und einen injektiven Abstraktor $A : \mathcal{P}(D) \to U$. Das Bild im A ist die Gesamtheit aller Klassen und im $A \cap D$ die Gesamtheit aller Mengen dieser Struktur. Klassen die keine Mengen sind, werden **echte Klassen** genannt und Gegenstände 1. Stufe, die keine Klassen sind, **Urelemente**.

Bis hierhin haben wir uns nur mit den einfachsten Relations-Formen, den Eigenschaften/Klassen beschäftigt. Wie sieht es mit komplizierteren, wie etwa den n-stelligen Funktionen ${}^nD \to D$ oder den zweistelligen Relationen[6], d.h. Teilmengen von ${}^2D$ aus? Wie in der NBG-Mengenlehre lassen sie sich mit Hilfe einer mengentheoretischen Definition des geordneten Paares als spezielle Klassen auffassen,[7] sodass wir unseren Strukturbegriff nicht um derartige Objekte erweitern müssen.

[4]Es gilt nämlich einfach $U_i = \mathcal{P}^{i-1}(U_1)$.
[5]In Kapitel 4 werden wir uns mit derartigen Axiomen beschäftigen.
[6]Frege nennt sie einfach Beziehungen und fasst sie als Funktionen ${}^2D \to \{\mathrm{Wahr}, \mathrm{Falsch}\}$ auf.
[7]Hierzu ist allerdings die Existenz gewisser endlicher Mengen zu fordern. Siehe Kapitel 4.



Hiermit ist im Wesentlichen die Semantik der Klassenlogik beschrieben. Da man jedoch letztendlich nicht nur an der Definition mathematischer Strukturen interessiert ist, sondern vor allem an Aussagen, die in entsprechenden Strukturen gelten, wollen wir uns nun der Sprache, d.h. der Syntax der Klassenlogik zuwenden.

Es ist ein Verdienst der formalen Logik, dass uns heutzutage sehr angepasste formale Sprachen für den Umgang mit mathematischen Strukturen zur Verfügung stehen. Diese ermöglichen uns nicht nur eine dem mathematischen Anspruch gerecht werdende Präzision, sondern bereiten auch das Feld für genaue metamathematische Untersuchungen.

Der Ausgangspunkt der klassenlogischen Syntax ist die Prädikatenlogik 1. Stufe mit Gleichheit und dem zweistelligen Elementsymbol $\in$. D.h. wir erlauben es uns aus Termen t_1 und t_2 die Ausdrücke $t_1 = t_2$ und $t_1 \in t_2$ sowie aus Variablen v und Ausdrücken α und β die Ausdrücke $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$ und $\forall v\alpha$ zu bilden. Was sind nun aber unsere Terme? Neben den Variablen $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$, die in einer prädikatenlogisch entwickelten ZFC-Mengenlehre die einzigen Terme sind, wollen wir in der Klassenlogik für jede Variable v und jeden Ausdruck α (in dem in den interessanten Fällen die Variable v frei vorkommt) auch die **Klassenterme**

$$\{v; \alpha\} \ ,$$

zu lesen als „die Klasse aller v mit α“, und die **Kennzeichnungsterme**

$$\iota v\alpha \ ,$$

in Worten „dasjenige v mit α“, zulassen. Der Term $\{v; \alpha\}$ soll also gerade die Klasse bezeichnen, die genau die Gegenstände 1. Stufe enthält, auf die $\alpha(v)$[8] zutrifft. Der **Kennzeichnungsoperator** (oder auch Jota-Operator) ι entspricht dem bestimmten Artikel: bezeichnet $\alpha(v)$ eine Eigenschaft, die genau auf einen Gegenstand zutrifft, so bezeichnet $\iota v\alpha$ gerade diesen Gegenstand. Doch was passiert, wenn $\alpha(v)$ auf keinen bzw. auf mehr als einen Gegenstand zutrifft? Anstatt zu sagen, dass $\iota v\alpha$ in diesen Fällen nichts bezeichnet, wollen wir jeder klassenlogischen Struktur ein **Unsinnsobjekt** N hinzufügen, das genau in solchen Situationen als Denotat für $\iota v\alpha$ fungiert. Wir fordern $N \notin$ im $A \cup D$, d.h. N sei ein Gegenstand 2. Stufe, aber keine Klasse.

[8] Wir schreiben hier $\alpha(v)$ für α, um den Bezug zu v deutlich zu machen.

Eine Struktur (zusammen mit einer Variablenbelegung $\mathcal{V} \to U$) bestimmt also einerseits eine Terminterpretationsfunktion, die jedem Term einen Gegenstand des Universums zuordnet und andererseits eine Ausdrucksinterpretationsfunktion, die jeden Ausdruck mit einem Wahrheitswert („Wahr“ oder „Falsch“) bewertet.

Frege war wohl der erste, der an diesem Punkt den folgenden, sehr interessanten Weg geht: er fasste auch die beiden Wahrheitswerte als Gegenstände des Universums auf und verschmolz dadurch Terme und Ausdrücke zu einer einheitlichen Kategorie von Ausdrücken. Konsequenterweise erlaubte er deshalb auch Ausdrücke wie

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)\ ;$$ [9]

dieser ist zu interpretieren als: „Der Wahrheitswert von $2^2 = 4$ (d.h. ‚Wahr‘) ist gleich dem Wahrheitswert von $2 > 1$ (d.h. ‚Wahr‘).“

Glubrecht, Oberschelp und Todt übernahmen diese Verschmelzung von Termen und Ausdrücken in ihrer konsequentesten Formulierung der Klassenlogik, die sie die *Ausdruckslogik* nennen, und auch wir wollen es tun. Es sind daher in jedem Universum zwei Objekte V (Verum), F (Falsum) als **Wahrheitswerte** auszuzeichnen. Wir werden später sehen, dass wir dadurch die Negation als Grundoperator entbehren können. Unsere vollständige Definition der klassenlogischen Syntax sieht nun folgendermaßen aus:

1. Alle Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ sind Ausdrücke.

2. Sind α und β Ausdrücke, so sind auch $(\alpha = \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \in \beta)$ Ausdrücke.

3. Ist u eine Variable und α ein Ausdruck, so sind auch $\forall u\alpha$, $\iota u\alpha$ und $\{u; \alpha\}$ Ausdrücke.

Auf semantischer Seite entsprechen den sechs Grundoperatoren im groben die folgenden Bedeutungen:

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedeutung**
$(\alpha = \beta)$	„α gleich β“	α und β bezeichnen dasselbe Objekt
$(\alpha \wedge \beta)$	„α und β“	α und β sind wahr
$(\alpha \in \beta)$	„α Element von β“	α ist Element der Klasse β
$\forall v\alpha$	„für alle v gilt α“	für alle $v \in U$ gilt $\alpha(v)$
$\iota v\alpha$	„dasjenige v mit α“	dasjenige $v \in U$ mit $\alpha(v)$
$\{v; \alpha\}$	„die Klasse aller v mit α“	die Klasse aller $v \in D$ mit $\alpha(v)$

[9] In [Fre08a, S. 49f] schreibt Frege: „Zunächst nehme ich zu den Zeichen $+, -$ usw., die zur Bildung eines Funktionsausdruckes dienen, noch hinzu Zeichen wie $=, >, <$, so daß ich z.B. von der Funktion $x^2 = 1$ sprechen kann, wo x wie früher das Argument vertritt. ... Ich sage nun: »der Wert unserer Funktion ist ein Wahrheitswert« und unterscheide den Wahrheitswert des Wahren von dem des Falschen. Den einen nenne ich kurz das Wahre, den andern das Falsche. Hiernach bedeutet z.B. »$2^2 = 4$« das Wahre ebenso, wie etwa »2^2« 4 bedeutet. Und es bedeutet »$2^2 = 1$« das Falsche. Demnach bedeuten »$2^2 = 4$«, »$2 > 1$«, »$2^4 = 4^2$« dasselbe, nämlich das Wahre, so daß wir in

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

eine richtige Gleichung haben.“

Zu beachten ist, dass der Klassenbildungsoperator[10] anders als der Allquantor und der Kennzeichnungsoperator nur über die Domäne, d.h. über Gegenstände 1. Stufe quantifiziert.[11] Um diesen Unterschied deutlich zu machen, wäre es sicherlich hilfreich, den Klassenbildungsoperator durch

$$\{v \in D; \varphi\}$$

auszudrücken. Da wir jedoch umgekehrt einen syntaktischen Ausdruck $\mathbb{D}$, der die Domäne[12] bezeichnen wird, durch den Klassenbildungsoperator definieren und zudem allgemein $\{v \in A; \varphi\}$ als Abkürzung für $\{v; v \in A \wedge \varphi\}$ auffassen werden, wollen wir bei der einfacheren Darstellung $\{v; \varphi\}$ bleiben.[13]

In Abschnitt 2.3 werden wir einen korrekten Beweiskalkül für die Klassenlogik angeben. Ist er auch vollständig bzgl. unserer gerade angedeuteten Semantik? Leider nein. Die Totalität der Abstraktoren (d.h. dass die Abstraktoren auf der gesamten Potenzmenge der Domäne definiert sein müssen) führt dazu, dass wir es bei der bisher angedeuteten Klassenlogik mit einer echten zweitstufigen Logik zu tun haben, für die es ja grundsätzlich unmöglich ist, einen vollständigen Beweiskalkül anzugeben, der mit endlichen Antezedenzen arbeitet. Wir wollen daher unseren Strukturbegriff etwas aufweichen, indem wir auch partielle Abstraktoren $A : \mathcal{P}(D) \rightharpoonup D$ zulassen. Wichtig ist nur, dass alle (klassen-)logisch *beschreibbaren* Klassen existieren. In Unterabschnitt 2.3.2 werden wir zeigen, dass bzgl. dieses allgemeineren Strukturbegriffs unser Beweiskalkül vollständig ist. Die Strukturen mit totalem Abstraktor nennen wir dann **volle Strukturen**. Die Klassenlogik verhält sich wie eine erststufige Logik, d.h. es liegt ein vollständiger Beweiskalkül vor (aber es existieren Nichtstandardmodelle), wenn wir beliebige Strukturen und wie eine zweitstufige Logik ohne einen vollständigen Beweiskalkül, wenn wir nur volle Strukturen zulassen.

Die Klassenlogik lässt sich also als erststufige *und* als zweitstufige Logik verwenden, ohne dass wir auf syntaktischer Seite etwas davon mitbekommen; in beiden Fällen benutzen wir denselben Beweiskalkül.

Wir wollen nun noch einmal kurz auf die vielleicht etwas fremd anmutende „Abstraktion“ zurückkommen. In unserem Strukturbegriff sind wir von einem Abstraktor ausgegangen und haben dann mit ihm eine Elementrelation definiert. In prädikatenlogischen Charakterisierungen der Mengenlehre, wie zum Beispiel in ZFC, geht man umgekehrt von einer zweistelligen Elementrelation ϵ auf einer Gesamtheit D von „Mengen“ aus. Auch hier muss man jedoch zwischen einer „Menge“ und dem ϵ-Vorbereich dieser Menge (einer Teilgesamtheit von D) unterscheiden. Ist für diese Elementrelation Extensionalität gefordert, so lässt sich auch ein partieller Abstraktor (d.h. eine partielle injektive Abbildung $A : \mathcal{P}(D) \rightharpoonup D$) definieren, der den ϵ-Vorbereichen die zugehörigen Mengen zuordnet. Abstraktor und (extensionale) Elementrelation sind also gewissermaßen zwei Seiten einer Medaille. Wir haben uns hier dafür entschieden, den Abstraktor als semantischen Grundbestandteil zu wählen, da dieser so oder so für die Interpretation der Klassenbildungsterme benötigt wird und es zudem recht natürlich scheint, den Übergang Vielheit-Einheit funktional zu beschreiben.

Kommen wir nun zu den exakten Definitionen.

[10] Der ja gerade dadurch, dass er nur eine auf Gegenstände 1. Stufe beschränkte Klassenkomprehension ermöglicht, die Russel'sche Antinomie vermeidet.

[11] Die Erweiterung von Allquantor und Kennzeichnungsoperator auf das gesamte Universum ist der Hauptunterschied der in dieser Arbeit dargestellten Variante der Klassenlogik zu der von Glubrecht, Oberschelp und Todt entwickelten. Man siehe dazu auch den Abschnitt 2.4.

[12] Oder genauer gesagt die Abstraktion der Domäne.

[13] Mit den gerade angedeuteten Abkürzungen wird aber natürlich $\emptyset \vdash \{v; \varphi\} = \{v \in \mathbb{D}; \varphi\}$ gelten.

2.1. Syntax der Klassenlogik

Sei $M := \langle\!\langle \mathbb{N} \rangle\!\rangle$ und

$$\mathcal{V} = \{v_i\,;\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq M \qquad \text{die Variablenmenge der Klassenlogik.}$$[14]

Sind $a, b \in M$ und $u \in \mathcal{V}$ so schreiben wir:[15]

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}(a = b) & \text{für } \big\langle 1, \langle\rangle, \langle a, b\rangle \big\rangle \\ (a \wedge b) & \text{für } \big\langle 2, \langle\rangle, \langle a, b\rangle \big\rangle \\ (a \in b) & \text{für } \big\langle 3, \langle\rangle, \langle a, b\rangle \big\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{die } \textbf{Grundjunktoren}, \\ \text{Indices } I_{\mathrm{GJ}} := \{1, 2, 3\}\end{array} \\[2em] \left.\begin{array}{ll}\forall ua & \text{für } \big\langle 4, \langle u\rangle, \langle a\rangle \big\rangle \\ \iota ua & \text{für } \big\langle 5, \langle u\rangle, \langle a\rangle \big\rangle \\ \{u; a\} & \text{für } \big\langle 6, \langle u\rangle, \langle a\rangle \big\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{die } \textbf{Grundquantoren}, \\ \text{Indices } I_{\mathrm{GQ}} := \{4, 5, 6\}\end{array}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{die } \textbf{Grundoperatoren}, \\ \text{Indices } I_{\mathrm{GO}} := I_{\mathrm{GJ}} \cup I_{\mathrm{GQ}}\end{array}$$

Damit sei der Ausdruckskalkül $\mathcal{AK}_{\mathrm{CL}}$ der Klassenlogik gegeben durch die folgenden Schlussschemata in M:

Variablen

$$\mathit{Atom}_u : \quad \frac{}{u} \qquad \text{für jedes } u \in \mathcal{V}$$

Junktoren

$$\mathit{Gleich}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \frac{\mathbf{a} \quad \mathbf{b}}{(\mathbf{a} = \mathbf{b})} \qquad \mathit{Und}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \frac{\mathbf{a} \quad \mathbf{b}}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})} \qquad \mathit{Element}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \frac{\mathbf{a} \quad \mathbf{b}}{(\mathbf{a} \in \mathbf{b})}$$

Quantoren

$$\mathit{Alle}_u(\mathbf{a}) : \frac{\mathbf{a}}{\forall u\mathbf{a}} \qquad \mathit{Dasjenige}_u(\mathbf{a}) : \frac{\mathbf{a}}{\iota u\mathbf{a}} \qquad \mathit{Klasse}_u(\mathbf{a}) : \frac{\mathbf{a}}{\{u; \mathbf{a}\}} \qquad \text{für jedes } u \in \mathcal{V}$$

Wir definieren nun die klassenlogische Ausdrucksmenge durch:

$$L_{\mathrm{CL}} := G_{\mathcal{AK}_{\mathrm{CL}}} \ .$$

Offenbar gilt für die obigen Schlussschemata mit den Bezeichnungen aus Unterabschnitt 1.4.2:

$$\begin{array}{lcl} \textbf{\textit{Gleich}} & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle\rangle}_{1,0,2} \\ \textbf{\textit{Und}} & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle\rangle}_{2,0,2} \\ \textbf{\textit{Element}} & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle\rangle}_{3,0,2} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lcl} \textbf{\textit{Alle}}_u & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle u\rangle}_{4,1,1} \\ \textbf{\textit{Dasjenige}}_u & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle u\rangle}_{5,1,1} \\ \textbf{\textit{Klasse}}_u & = & \textbf{\textit{Operator}}^{\langle u\rangle}_{6,1,1} \end{array}$$

[14]Die v_i's seien definiert wie in Unterabschnitt 1.4.2.

[15]Siehe hierzu auch das Beispiel in Unterabschnitt 1.4.2.

d.h. mit

$$\begin{aligned} R \;:=\; & \{\boldsymbol{Gleich}, \boldsymbol{Und}, \boldsymbol{Element}\} \\ & \cup \{\boldsymbol{Alle}_u \,;\; u \in \mathcal{V}\} \cup \{\boldsymbol{Dasjenige}_u \,;\; u \in \mathcal{V}\} \cup \{\boldsymbol{Klasse}_u \,;\; u \in \mathcal{V}\} \end{aligned}$$

gilt

$$\mathcal{AK}_{\mathrm{CL}} = \mathcal{AK}_{\mathcal{V},R} \qquad \text{und} \qquad L_{\mathrm{CL}} = L_{\mathcal{V},R} \subseteq L_{\mathrm{sup}} \ .$$

Es lassen sich also alle Definitionen und Aussagen aus Unterabschnitt 1.4.2 anwenden.

Ein Ausdruck $\varphi \in L_{\mathrm{CL}}$ mit $\mathrm{pr}_0\, \varphi \in \{1, 2, 3, 4\}$ heißt **boolesch**. D.h. φ ist boolesch, falls er die Gestalt $(\alpha = \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \in \beta)$ oder $\forall u\alpha$ hat.

Nun wollen wir noch ein paar Abkürzungen einführen:[16]

Abbrevians[17]	**Abbreviandum**	**Bedeutung**[18]
$\top$	$\forall v_0(v_0 = v_0)$	Wahrheit
$\perp$	$\forall v_0 v_0$	Falschheit
$\$$	$\iota v_0 \perp$	Unsinn
$\mathbb{D}$	$\{v_0; \top\}$	Domäne, Allklasse
$\varnothing$	$\{v_0; \perp\}$	leere Klasse

Für $\varphi, \psi \in L_{\mathrm{CL}}$ und $u \in \mathcal{V}$ sei

Abbrevians	**Abbreviandum**	**Bedeutung**
$\neg\varphi$	$(\varphi = \top) = \perp$	Negation
$(\varphi \vee \psi)$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	Disjunktion
$(\varphi \to \psi)$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	Implikation
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	Äquivalenz
$\exists u\varphi$	$\neg\forall u\neg\varphi$	Existenzquantor
$\exists^{=1} u\varphi$	$\exists w\forall u(\varphi \leftrightarrow u = w)$	Eindeutigkeitsquantor

wobei $w := \mathfrak{v}_0(u\ \varphi)$, d.h. w ist die erste nicht in $u\ \varphi$ vorkommende Variable. All diese Abkürzungen bezeichnen offenbar boolesche Ausdrücke.

[16] Hier und im Folgenden wollen wir einige Klammern weglassen, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind. Dabei beziehen wir uns auf die übliche Operatorrangfolge (in absteigender Priorität), wie etwa:
1. $\cup, \cap$ 2. $=, \in$ 3. $\neg$ 4. $\wedge, \vee$ 5. $\to, \leftrightarrow$

[17] Abbrevians - „das Abkürzende“, Abbreviandum - „das Abzukürzende“. Diese Bezeichnungen sind nicht üblich. Da ich in dieser Arbeit aber unterscheiden möchte zwischen Abkürzungen und Definitionen, ist es nur konsequent an dieser Stelle auch andere Bezeichnungen als Definiendum/Definiens zu verwenden. Man beachte die grammatikalische Umkehrung im Vergleich zu Definiendum/Definiens: im einen Falle ist das Definiendum das zu definierende, im anderen das Abbrevians.

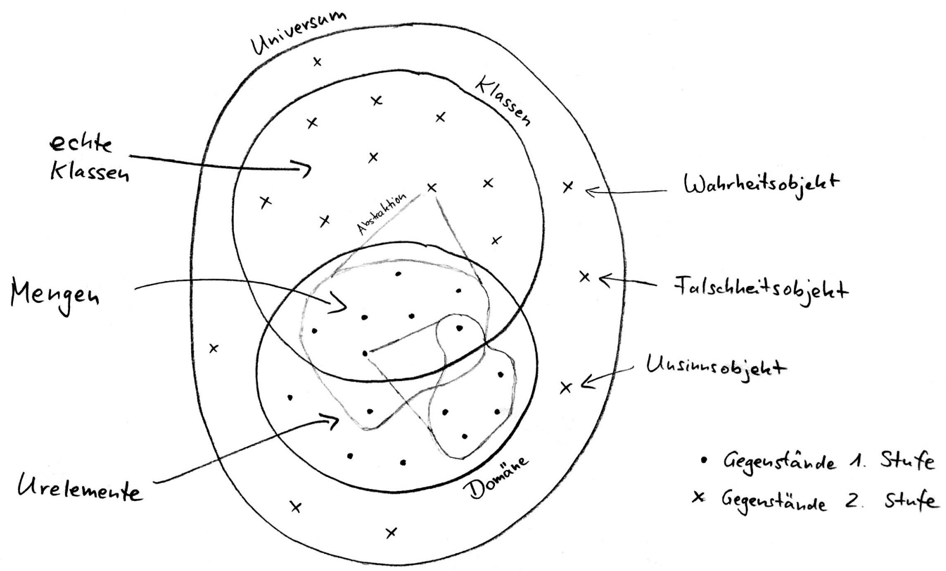
[18] Die Bedeutung wird natürlich erst mit dem semantischen Interpretationsbegriff genau festgelegt.

2.2. Semantik der Klassenlogik

> *So werden wir dahin gedrängt, den Wahrheitswert eines Satzes als seine Bedeutung anzuerkennen. Ich verstehe unter dem Wahrheitswerte eines Satzes den Umstand, daß er wahr oder daß er falsch ist. Weitere Wahrheitswerte gibt es nicht. Ich nenne der Kürze halber den einen das Wahre, den anderen das Falsche. Jeder Behauptungssatz, in dem es auf die Bedeutung der Wörter ankommt, ist also als Eigenname aufzufassen, und zwar ist seine Bedeutung, falls sie vorhanden ist, entweder das Wahre oder das Falsche.*
>
> Gottlob Frege, *Über Sinn und Bedeutung*

Eine (klassenlogische) **Prä-Struktur** $\mathfrak{A}$ ist ein 6-Tupel $\langle U_\mathfrak{A}, D_\mathfrak{A}, A_\mathfrak{A}, V_\mathfrak{A}, F_\mathfrak{A}, N_\mathfrak{A}\rangle$ mit

- $U_\mathfrak{A}$ Menge (**Universum** von $\mathfrak{A}$)
- $D_\mathfrak{A} \subseteq U_\mathfrak{A}$ (**Domäne** von $\mathfrak{A}$)
- $V_\mathfrak{A}, F_\mathfrak{A}, N_\mathfrak{A} \in U_\mathfrak{A}$ mit $V_\mathfrak{A} \neq F_\mathfrak{A}$ und $N_\mathfrak{A} \notin D_\mathfrak{A}$
  (**Wahrheits-**, **Falschheits-** und **Unsinnsobjekt** von $\mathfrak{A}$)
- $A_\mathfrak{A} : \mathcal{P}(D_\mathfrak{A}) \to U_\mathfrak{A}$ Abbildung, wobei $\{\langle x, y\rangle \in A_\mathfrak{A}\,;\; y \neq N_\mathfrak{A}\}$ injektiv
  (**Abstraktor**[19] von $\mathfrak{A}$)



[19] Dem aufmerksamen Leser der Einleitung dieses Kapitels ist sicherlich aufgefallen, dass wir den Abstraktor doch nicht wie dort angekündigt als partielle Funktion $\mathcal{P}(D_\mathfrak{A}) \rightharpoonup U_\mathfrak{A}$ auffassen. Im Grunde genommen machen wir aber doch nichts anderes, nur das wir den Teilgesamtheiten der Domäne die nicht abstrahiert werden sollen nicht nichts zuordnen, sondern unser Unsinnsobjekt. Diese leichte Umformulierung hat sich bei der Definition des Struktur-Begriffs als recht praktisch herausgestellt.

In diesem Falle definieren wir die Menge der **$\mathfrak{A}$-Klassen**

$$\mathrm{Cls}_{\mathfrak{A}} := \mathrm{im}\, A_{\mathfrak{A}} \setminus N_{\mathfrak{A}}$$

und damit die Menge der **$\mathfrak{A}$-Mengen**

$$\mathrm{Set}_{\mathfrak{A}} := \mathrm{Cls}_{\mathfrak{A}} \cap D_{\mathfrak{A}} \ .$$

Die **$\mathfrak{A}$-Elementrelation** $\epsilon_{\mathfrak{A}} \subseteq D_{\mathfrak{A}} \sqcap U_{\mathfrak{A}}$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{lll} a \,\epsilon_{\mathfrak{A}}\, b & \text{:gdw.} & b \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{A}} \text{ und } a \in A_{\mathfrak{A}}{\llcorner} b^{\urcorner} \\ & \text{gdw.} & \text{es existiert } X \subseteq D_{\mathfrak{A}} \text{ mit } A_{\mathfrak{A}}{}^{\ulcorner} X_{\lrcorner} = b \neq N_{\mathfrak{A}} \text{ und } a \in X \ . \end{array}$$

$A_{\mathfrak{A}}{\llcorner} b^{\urcorner} = A_{\mathfrak{A}}{}^{-1\ulcorner} b_{\lrcorner}$ nennen wir auch die **$\mathfrak{A}$-Extension** von b.

Durch eine derartige Prä-Struktur sind folgende **Interpretations-Grundfunktionen** bestimmt:

$$H_1^{\mathfrak{A}} : U_{\mathfrak{A}} \sqcap U_{\mathfrak{A}} \to U_{\mathfrak{A}},\ \langle a, b\rangle \mapsto \begin{cases} V_{\mathfrak{A}}, & \text{falls } a = b \\ F_{\mathfrak{A}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_2^{\mathfrak{A}} : U_{\mathfrak{A}} \sqcap U_{\mathfrak{A}} \to U_{\mathfrak{A}},\ \langle a, b\rangle \mapsto \begin{cases} V_{\mathfrak{A}}, & \text{falls } a = V_{\mathfrak{A}} \text{ und } b = V_{\mathfrak{A}} \\ F_{\mathfrak{A}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_3^{\mathfrak{A}} : U_{\mathfrak{A}} \sqcap U_{\mathfrak{A}} \to U_{\mathfrak{A}},\ \langle a, b\rangle \mapsto \begin{cases} V_{\mathfrak{A}}, & \text{falls } a \,\epsilon_{\mathfrak{A}}\, b \\ F_{\mathfrak{A}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_4^{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(U_{\mathfrak{A}}) \to U_{\mathfrak{A}},\ X \mapsto \begin{cases} V_{\mathfrak{A}}, & \text{falls } X = U_{\mathfrak{A}} \\ F_{\mathfrak{A}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_5^{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(U_{\mathfrak{A}}) \to U_{\mathfrak{A}},\ X \mapsto \begin{cases} \text{das einzige Element von } X, & \text{falls } |X| = 1 \\ N_{\mathfrak{A}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_6^{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(U_{\mathfrak{A}}) \to U_{\mathfrak{A}},\ X \mapsto A_{\mathfrak{A}}{}^{\ulcorner} X \cap D_{\mathfrak{A}\lrcorner}$$

Eine **Variablenbelegung** in $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $h : \mathcal{V} \to U_{\mathfrak{A}}$. Die Menge der Variablenbelegungen in $\mathfrak{A}$ sei $\mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} := \mathrm{Abb}(\mathcal{V}, U_{\mathfrak{A}})$. Ist $h \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$, $u \in \mathcal{V}$ und $a \in U_{\mathfrak{A}}$, so definieren wir $h{}^{a}_{u} \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ durch:

$$h{}^{a}_{u} : \mathcal{V} \to U_{\mathfrak{A}},\ x \mapsto \begin{cases} a, & \text{falls } x = u \\ h^{\ulcorner} x_{\lrcorner}, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Eine (klassenlogische) **Prä-Interpretation** $\mathfrak{I}$ ist ein Paar $\langle \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}, h_{\mathfrak{I}}\rangle$, bestehend aus einer Prä-Struktur $\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$ und einem $h_{\mathfrak{I}} \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$. Es sei dann $U_{\mathfrak{I}} := U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $D_{\mathfrak{I}} := D_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $A_{\mathfrak{I}} := A_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $V_{\mathfrak{I}} := V_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $F_{\mathfrak{I}} := F_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $N_{\mathfrak{I}} := N_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $\mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} := \mathrm{Cls}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $\mathrm{Set}_{\mathfrak{I}} := \mathrm{Set}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$, $\epsilon_{\mathfrak{I}} := \epsilon_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$ und $H_i^{\mathfrak{I}} := H_i^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$ für $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Ist $\mathfrak{I}$ eine Prä-Interpretation, $u \in \mathcal{V}$ und $a \in U_{\mathfrak{I}}$, so schreiben wir für die Prä-Interpretation $\langle \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}, h_{\mathfrak{I}}{}^{a}_{u}\rangle$ auch $\mathfrak{I}{}^{a}_{u}$.[20]

[20] Zudem setzen wir $\mathfrak{I}{}^{a_1 \ldots a_n}_{u_1 \ldots u_n} := (\ldots(\mathfrak{I}{}^{a_1}_{u_1})\ldots){}^{a_n}_{u_n}$.

2.1 Lemma

Zu jeder Prä-Interpretation $\mathfrak{I}$ lässt sich eine ***Interpretationsabbildung*** $\overline{\mathfrak{I}} : L_{\mathrm{CL}} \to U_{\mathfrak{I}}$ *definieren, sodass die folgenden (von einer* Interpretations*abbildung zu erwartenden) Bedingungen gelten:*

Für alle $u \in \mathcal{V}$ und alle $\alpha, \beta \in L_{\mathrm{CL}}$ gilt

1. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner u \lrcorner = h_{\mathfrak{I}}\ulcorner u \lrcorner$

2. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha = \beta \lrcorner = \begin{cases} V_{\mathfrak{I}}, & \textit{falls } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha \lrcorner = \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \beta \lrcorner \\ F_{\mathfrak{I}}, & \textit{sonst} \end{cases}$

3. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha \wedge \beta \lrcorner = \begin{cases} V_{\mathfrak{I}}, & \textit{falls } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \textit{ und } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \beta \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \\ F_{\mathfrak{I}}, & \textit{sonst} \end{cases}$

4. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha \in \beta \lrcorner = \begin{cases} V_{\mathfrak{I}}, & \textit{falls } \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha \lrcorner \epsilon_{\mathfrak{I}} \overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \beta \lrcorner \\ F_{\mathfrak{I}}, & \textit{sonst} \end{cases}$

5. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \forall u \alpha \lrcorner = \begin{cases} V_{\mathfrak{I}}, & \textit{falls } \overline{\mathfrak{I}^{\,b}_{u}}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \textit{ für alle } b \in U_{\mathfrak{I}} \\ F_{\mathfrak{I}}, & \textit{sonst} \end{cases}$

6. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \iota u \alpha \lrcorner = \begin{cases} \textit{dasjenige } b \textit{ mit } \overline{\mathfrak{I}^{\,b}_{u}}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}}, & \textit{falls } \left|\left\{ b \in U_{\mathfrak{I}} \,;\, \overline{\mathfrak{I}^{\,b}_{u}}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \right\}\right| = 1 \\ N_{\mathfrak{I}}, & \textit{sonst} \end{cases}$

7. $\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner \{u ; \alpha\} \lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, \overline{\mathfrak{I}^{\,b}_{u}}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \right\} \lrcorner$

Beweis:
Wir definieren zuerst für jede Prä-Struktur $\mathfrak{A}$ die Abbildung $\overline{\mathfrak{A}} : L_{\mathrm{CL}} \sqcap \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}} \to U_{\mathfrak{A}}$ durch:

$$\langle \varphi, h \rangle \mapsto \begin{cases} h\ulcorner \varphi \lrcorner\,, & \varphi \in \mathcal{V} \\ H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner \overline{\mathfrak{A}}\ulcorner \alpha, h \lrcorner, \overline{\mathfrak{A}}\ulcorner \beta, h \lrcorner \lrcorner\,, & \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner \left\{ a \in U_{\mathfrak{A}} \,;\, \overline{\mathfrak{A}}\ulcorner \alpha, h^{\,a}_{\,u} \lrcorner = V_{\mathfrak{A}} \right\} \lrcorner\,, & \varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GQ}} \end{cases}$$

Durch $\langle \varphi_1, h_1 \rangle \prec \langle \varphi_2, h_2 \rangle$:gdw $\varphi_1 \prec_{\mathcal{AK}_{\mathrm{CL}}} \varphi_2$ ist mit L_{CL} auch $L_{\mathrm{CL}} \sqcap \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ wohlfundiert. Die Definition von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist also gerechtfertigt durch Satz A.1 (b).[21]

Ist $\mathfrak{I}$ eine Prä-Interpretation, so definieren wir damit $\overline{\mathfrak{I}} : L_{\mathrm{CL}} \to U_{\mathfrak{I}}$ durch $\varphi \mapsto \overline{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}\ulcorner \varphi, h_{\mathfrak{I}} \lrcorner$. Aus der Definition von $\overline{\mathfrak{A}}$ folgt unmittelbar, dass $\overline{\mathfrak{I}}$ die gewünschten Eigenschaften hat. ■

[21] Alternativ ließe sich auch mit Satz 1.10 (iv) eine „schöngefinkelte“ Abbildung $L_{\mathrm{CL}} \to \mathrm{Abb}(\mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}, U_{\mathfrak{A}})$ definieren.

Aus diesem Beweis folgt unmittelbar, dass

$$\overline{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = \begin{cases} h^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner}\ , & \varphi \in \mathcal{V} \\ H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\overline{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\alpha_{\lrcorner}, \overline{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\beta_{\lrcorner\lrcorner}\ , & \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\Big\{a \in U_{\mathfrak{I}}\,;\ \overline{\mathfrak{I}_u^a}^{\ulcorner}\alpha_{\lrcorner} = V_{\mathfrak{I}}\Big\}_{\lrcorner}\ , & \varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GQ}} \end{cases}$$

für jede Prä-Interpretation $\mathfrak{I}$. Dies ist in systematischen Überlegungen sehr hilfreich.

Prä-Interpretationen in denen alle „klassenlogisch beschreibbaren“ Teilgesamtheiten der Domäne existieren, d.h. nicht als „Unsinn“ interpretiert werden, nennen wir Interpretationen. Genauer ist eine Prä-Interpretation $\mathfrak{I}$ eine (klassenlogische) **Interpretation**, wenn für alle Prä-Interpretationen $\mathfrak{I}'$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}'} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$

$$\overline{\mathfrak{I}'}^{\ulcorner}\{u;\alpha\}_{\lrcorner} \neq N_{\mathfrak{A}} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{V}, \alpha \in L_{\mathrm{CL}}\ .$$

Eine Prä-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt (klassenlogische) **Struktur**, wenn für alle (oder äquivalent: für ein) $h \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ die Prä-Interpretation $\langle\mathfrak{A}, h\rangle$ sogar eine Interpretation ist.

Sei nun $\mathscr{M}_{\mathrm{CL}}$ die Klasse aller (klassenlogischen) Interpretationen und

$$\mathrm{VER}_{\mathrm{CL}} : \mathscr{M}_{\mathrm{CL}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}},\ \mathfrak{I} \mapsto V_{\mathfrak{I}} \quad \text{sowie} \quad \mathrm{INT}_{\mathrm{CL}} : \mathscr{M}_{\mathrm{CL}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}},\ \mathfrak{I} \mapsto \overline{\mathfrak{I}}\ .$$

Damit ist die Klassenlogik CL ein logisches System im Sinne des ersten Kapitels. Insbesondere ist also eine Modellbeziehung $\Vdash_{\mathrm{CL}}$ und eine Folgerungsbeziehung $\vDash_{\mathrm{CL}}$ definiert. Im Folgenden lassen wir, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, den Index CL zumeist weg, d.h. wir schreiben L für L_{CL}, rg für $\mathrm{rg}_{\mathcal{AK}_{\mathrm{CL}}}$, $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$ für $\mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{CL}} \varphi$ etc. Außerdem schreiben wir für $\overline{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner}$ zumeist einfach $\mathfrak{I}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner}$.

Weiter wollen wir die Modellbeziehung auch für Prä-Interpretationen definieren. Hierzu setzen wir für Prä-Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\varphi \in L$ ebenfalls

$$\mathfrak{I} \Vdash \varphi \quad \text{:gdw.} \quad \overline{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = V_{\mathfrak{I}}\ .$$

Schließlich setzen wir für Prä-Strukturen $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \varphi \quad \text{:gdw.} \quad \langle\mathfrak{A}, h\rangle \Vdash \varphi \quad \text{für alle } h \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}\ .$$

Wie wir später sehen werden, hängt insbesondere bei Ausdrücken, die keine freien Variablen enthalten, der Wert der Interpretationsabbildung nur von der zugrunde gelegten Struktur ab.

* * *

Wir zeigen nun, dass die oben eingeführten syntaktischen Abkürzungen auch wirklich die dort angegebenen „Bedeutungen“ haben.

2.2 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Prä-Interpretation. Dann gilt für alle $\alpha, \beta, \varphi, \gamma \in L$ und alle $u \in \mathcal{V}$:

(i)	$\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner \in \{V_\mathfrak{I}, F_\mathfrak{I}\}$,	*falls φ boolesch*[22]	
(ii)	$\mathfrak{I}\ulcorner\top\lrcorner = V_\mathfrak{I}$, $\quad \mathfrak{I}\ulcorner\bot\lrcorner = F_\mathfrak{I}$ *und* $\mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner = N_\mathfrak{I}$;		*insbesondere $\mathfrak{I} \Vdash \top$ und $\mathfrak{I} \nVdash \bot$*
(iii)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha = \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I}\ulcorner\alpha\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\beta\lrcorner$
(iv)	$\mathfrak{I} \Vdash \neg\alpha$	*gdw.*	*nicht* $\mathfrak{I} \Vdash \alpha$
(v)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha \wedge \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha$ *und* $\mathfrak{I} \Vdash \beta$
(vi)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha \vee \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha$ *oder* $\mathfrak{I} \Vdash \beta$
(vii)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha \rightarrow \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha$ *impliziert* $\mathfrak{I} \Vdash \beta$
(viii)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha \leftrightarrow \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha$ *gdw.* $\mathfrak{I} \Vdash \beta$
(ix)	$\mathfrak{I} \Vdash \forall u\alpha$	*gdw.*	$\mathfrak{I}^{\,b}_{u} \Vdash \alpha$ *für alle* $b \in U_\mathfrak{I}$
(x)	$\mathfrak{I} \Vdash \exists u\alpha$	*gdw.*	$\mathfrak{I}^{\,b}_{u} \Vdash \alpha$ *für mindestens ein* $b \in U_\mathfrak{I}$
(xi)	$\mathfrak{I} \Vdash \alpha \in \beta$	*gdw.*	$\mathfrak{I}\ulcorner\alpha\lrcorner \epsilon_\mathfrak{A} \mathfrak{I}\ulcorner\beta\lrcorner$
(xii)	$\mathfrak{I}\ulcorner\mathbb{D}\lrcorner = A_\mathfrak{I}\ulcorner D_\mathfrak{I}\lrcorner$ *und* $\mathfrak{I}\ulcorner\varnothing\lrcorner = A_\mathfrak{I}\ulcorner\emptyset\lrcorner$		

Ist $\mathfrak{I}$ sogar eine Interpretation, so gilt

(xiii) $\mathfrak{I}\ulcorner\{u;\alpha\}\lrcorner \in \mathrm{Cls}_\mathfrak{I}$, *insbesondere also* $\mathfrak{I}\ulcorner\mathbb{D}\lrcorner, \mathfrak{I}\ulcorner\varnothing\lrcorner \in \mathrm{Cls}_\mathfrak{I}$
und $\quad \mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \mathbb{D} \quad$ *gdw.* $\quad \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in D_\mathfrak{I}$

Beweis:
(i), (iii), (v), (ix) und (xi) folgen unmittelbar aus den in Lemma 2.1 angegebenen Eigenschaften der Interpretationsfunktion $\overline{\mathfrak{I}}$.

(ii): Mit (iii) und (ix) gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\ulcorner\top\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\forall v_0(v_0 = v_0)\lrcorner = V_\mathfrak{I} \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0} \Vdash v_0 = v_0 \text{ für alle } b \in U_\mathfrak{I} \\ &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0}\ulcorner v_0\lrcorner = \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0}\ulcorner v_0\lrcorner \text{ für alle } b \in U_\mathfrak{I} \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{I}\ulcorner\top\lrcorner = V_\mathfrak{I}$. Ebenfalls mit (ix) und (i) folgt aus $\mathfrak{I}^{F_\mathfrak{I}}_{v_0}\ulcorner v_0\lrcorner = F_\mathfrak{I} \neq V_\mathfrak{I}$, d.h. $\mathfrak{I}^{F_\mathfrak{I}}_{v_0} \nVdash v_0$, sofort $\mathfrak{I}\ulcorner\bot\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\forall v_0 v_0\lrcorner = F_\mathfrak{I}$. Wegen $\left\{b \in U_\mathfrak{I}\,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0}\ulcorner\bot\lrcorner = V_\mathfrak{I}\right\} = \{b \in U_\mathfrak{I}\,;\, F_\mathfrak{I} = V_\mathfrak{I}\} = \emptyset$ ist schließlich $\mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\iota v_0\bot\lrcorner = N_\mathfrak{I}$.

(iv): Mit (iii), (ii) und (i) gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \Vdash \neg\varphi \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash (\varphi = \top) = \bot \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\varphi = \top\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\bot\lrcorner = F_\mathfrak{I} \\ &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner \neq \mathfrak{I}\ulcorner\top\lrcorner = V_\mathfrak{I} \quad \text{gdw.} \quad \text{nicht } \mathfrak{I} \Vdash \varphi \end{aligned}$$

[22] Für boolesche Ausdrücke reicht es somit zu wissen, ob $\mathfrak{I}$ Modell ist von φ, um den Wert $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner$ zu bestimmen. Es gilt nämlich für φ boolesch

$$\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = \begin{cases} V_\mathfrak{I}, & \text{falls } \mathfrak{I} \Vdash \varphi \\ F_\mathfrak{I}, & \text{sonst} \end{cases}$$

(vi), (vii), (viii) und (x) folgen leicht aus (iv), (v), (ix) und den entsprechende Definitionen.

(xii): Mit (ii) folgt

$$\mathfrak{I}\ulcorner \mathbb{D} \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \{v_0; \top\} \lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0}\ulcorner \top \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \right\} \lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner D_{\mathfrak{I}} \lrcorner$$

und

$$\mathfrak{I}\ulcorner \varnothing \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \{v_0; \bot\} \lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v_0}\ulcorner \bot \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \right\} \lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \emptyset \lrcorner$$

(xiii): Aus der Definition der Interpretationsabbildung folgt $\mathfrak{I}\ulcorner \{u; \alpha\} \lrcorner \in \operatorname{im} A_{\mathfrak{I}}$. Ist $\mathfrak{I}$ Interpretation gilt zudem $\mathfrak{I}\ulcorner \{u; \alpha\} \lrcorner \neq N_{\mathfrak{I}}$. Mit (xi) und (xii) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \mathbb{D} \quad & \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner \gamma \lrcorner \in_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}\ulcorner \mathbb{D} \lrcorner \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner \mathbb{D} \lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} \text{ und } \mathfrak{I}\ulcorner \gamma \lrcorner \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I}\ulcorner \mathbb{D} \lrcorner \urcorner = A_{\mathfrak{I}} \llcorner A_{\mathfrak{I}}\ulcorner D_{\mathfrak{I}} \lrcorner \urcorner = D_{\mathfrak{I}} \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner \gamma \lrcorner \in D_{\mathfrak{I}} \end{aligned}$$

■

2.2.1. Beispiel-Strukturen

Eine Prä-Struktur (bzw. Struktur bzw. Prä-Interpretation bzw. Interpretation) $\mathfrak{A}$ nennen wir **voll**, falls $N_{\mathfrak{A}} \notin \operatorname{im} A_{\mathfrak{A}}$. Insbesondere ist dann $A_{\mathfrak{A}}$ injektiv. Offenbar ist jede volle Prä-Struktur sogar eine Struktur. In vollen Strukturen gibt es auf der Meta-Ebene keine Teilgesamtheiten der Domäne, die nicht (als durch den Abstraktor „abstrahiertes“ Objekt) in der Struktur vorhanden sind. Weiter nennen wir eine Prä-Struktur (bzw. Struktur bzw. Prä-Interpretation bzw. Interpretation) $\mathfrak{A}$ **natürlich**, falls $A_{\mathfrak{A}}\ulcorner X \lrcorner = X$ für alle $X \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ mit $A_{\mathfrak{A}}\ulcorner X \lrcorner \neq N_{\mathfrak{A}}$. In natürlichen Strukturen $\mathfrak{A}$ ist die $\mathfrak{A}$-Elementrelation also gerade eine Einschränkung der „echten“ Elementrelation $\in$. Das „echte“, „platonische“ Hintergrund-Mengen-Klassen-Universum (falls es ein solches überhaupt gibt) denkt man sich intuitiv sicherlich als eine volle und natürliche Struktur (bzgl. des Meta-Meta-Universums Gottes ;-).

Triviale Strukturen

Die einfachsten Prä-Strukturen enthalten nur zwei Objekte. So ist etwa durch

- $U_{\mathfrak{A}} = \{V_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}}\}$
- $D_{\mathfrak{A}} = \emptyset$
- $N_{\mathfrak{A}} = F_{\mathfrak{A}}$
- $A_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(\emptyset) \to U_{\mathfrak{A}},\ \emptyset \mapsto V_{\mathfrak{A}}$

eine Struktur bestimmt. Sie ist voll und im Fall $V_{\mathfrak{A}} = \emptyset$ auch natürlich.

Aber auch

- $U_{\mathfrak{A}} = \{V_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}}\}$
- $D_{\mathfrak{A}} = \{V_{\mathfrak{A}}\}$
- $N_{\mathfrak{A}} = F_{\mathfrak{A}}$
- $A_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(\{V_{\mathfrak{A}}\}) \to U_{\mathfrak{A}}$, $\emptyset \mapsto N_{\mathfrak{A}}$, $\{V_{\mathfrak{A}}\} \mapsto V_{\mathfrak{A}}$

bestimmt eine Prä-Struktur $\mathfrak{A}$. Sie ist offenbar keine Struktur[23] und damit insbesondere nicht voll (und nicht natürlich genau dann, wenn $\{V_{\mathfrak{A}}\} \neq V_{\mathfrak{A}}$). Es gilt hier $\mathfrak{A} \Vdash \mathbb{D} \in \mathbb{D}$.

Natürliche Strukturen

Aus jeder beliebigen Menge M lässt sich durch

- $D_{\mathfrak{A}} := M$
- $V_{\mathfrak{A}}$ und $F_{\mathfrak{A}}$ seien zwei beliebige (voneinander verschiedene) Objekte
- $N_{\mathfrak{A}}$ sei ein beliebiges Objekt, welches nicht in $M \cup \mathcal{P}(M)$ vorkommt
- $U_{\mathfrak{A}} := M \cup \mathcal{P}(M) \cup \{V_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}}, N_{\mathfrak{A}}\}$
- $A_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(M) \to U_{\mathfrak{A}}$, $X \mapsto X$

eine volle und natürliche Struktur konstruieren. Die oben genannte erste triviale Struktur lässt sich in diesem Sinne aus der leeren Menge konstruieren.

Mengentheoretische Universen

Ist (M, ϵ) ein prädikatenlogisches Modell von ZFC (oder eines anderen „ϵ-Axiomensystems“ in dem Extensionalität gefordert wird) und $f : \mathcal{P}(M) \to N$ injektiv mit $\operatorname{im} f \cap M = \emptyset$, so erhalten wir daraus eine volle klassenlogische Struktur durch:

- $D_{\mathfrak{A}} := M$
- $V_{\mathfrak{A}}$ und $F_{\mathfrak{A}}$ seien zwei beliebige (voneinander verschiedene) Objekte
- $N_{\mathfrak{A}}$ sei ein beliebiges Objekt, welches nicht in $M \cup N$ vorkommt
- $U_{\mathfrak{A}} := M \cup N \cup \{V_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}}, N_{\mathfrak{A}}\}$

[23]Denn die leere Klasse ist „beschreibbar“, aber „Unsinn“, d.h. $\langle \mathfrak{A}, h\rangle \ulcorner \varnothing \lrcorner = A_{\mathfrak{A}} \ulcorner \emptyset \lrcorner = N_{\mathfrak{A}}$ für alle $h \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$.

- $A_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(M) \to U_{\mathfrak{A}},\ X \mapsto \begin{cases} a\ , & \text{falls } X = \epsilon \llcorner a \rceil = \{b \in M\ ;\ b \mathrel{\epsilon} a\} \\ f\ulcorner X \lrcorner\ , & \text{sonst} \end{cases}$

Die Extensionalität sichert, dass es zu jedem $X \subseteq M$ höchstens ein $a \in M$ mit $X = \epsilon \llcorner a \rceil$ gibt.

Modelle (M, ϵ) von MK (Morse-Kelley-Mengenlehre) oder von NBG,[24] die sowohl Mengen als auch Klassen beinhalten, sind noch besser geeignet, um daraus kanonische klassenlogische Prä-Strukturen zu basteln:

- $D_{\mathfrak{A}} := \{a \in M\ ;\ \text{es gibt ein } b \in M \text{ mit } a \mathrel{\epsilon} b\}$ (die Gesamtheit aller Mengen von (M, ϵ))
- $V_{\mathfrak{A}}$ und $F_{\mathfrak{A}}$ seien zwei beliebige (voneinander verschiedene) Objekte
- $N_{\mathfrak{A}}$ sei ein beliebiges Objekt, welches nicht in M vorkommt
- $U_{\mathfrak{A}} := M \cup \{V_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}}, N_{\mathfrak{A}}\}$
- $A_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(D_{\mathfrak{A}}) \to U_{\mathfrak{A}},\ X \mapsto \begin{cases} a\ , & \text{falls } X = \epsilon \llcorner a \rceil = \{b \in M\ ;\ b \mathrel{\epsilon} a\} \\ N_{\mathfrak{A}}\ , & \text{sonst} \end{cases}$

Im Fall von MK ist $\mathfrak{A}$ wahrscheinlich sogar eine Struktur.[25] Bei NBG ist dies wohl nicht notwendigerweise der Fall. Diese Vermutungen zu begründen, könnte ein interessantes Vorhaben sein.

[24]Für eine Definition von NBG und MK siehe man Abschnitt 4.4.

[25]Denn vermutlich sind alle klassenlogisch beschreibbaren Klassen auch in MK beschreibbar, da die Klassenkomprehension in MK wie in der Klassenlogik imprädikativ ist.

2.3. Ein adäquater Beweiskalkül für die Klassenlogik

Thanks to the progress of mathematical logic we have learnt, during the course of recent decades, how to present mathematical disciplines in the shape of formalized deductive theories. In these theories, as is well known, the proof of every theorem reduces to single or repeated application of some simple rules of inference - such as the rules of substitution and detachment. These rules tell us what transformations of a purely structural kind ... are to be performed upon the axioms or theorems already proved in the theory, in order that the sentences obtained as a result of such transformations may themselves be regarded as proved. Logicians thought that these few rules of inference exhausted the content of the concept of consequence. Whenever a sentence follows from others, it can be obtained from them ... by means of the transformations prescribed by the rules.

Alfred Tarski, *On the Concept of Logical Consequence*

Für die Klassenlogik lässt sich ein adäquater Beweiskalkül angeben. Wie in der Prädikatenlogik benötigt man dazu zwei Hilfsabbildungen.

a) Die **freien Variablen** eines Ausdrucks:

$$\mathrm{frei} : L \to \mathcal{P}(\mathcal{V}),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \{\varphi\}, & \varphi \in \mathcal{V} \\ \mathrm{frei}\,\alpha \cup \mathrm{frei}\,\beta, & \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ \mathrm{frei}\,\alpha \setminus u, & \varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GQ}} \end{cases}$$

Offenbar ist $\mathrm{frei}\,\varphi \subseteq \mathrm{var}\,\varphi$ für alle $\varphi \in L$. Wie im Falle von var können wir ferner auch hier wegen $L \cap {}^\star L = \emptyset$ die Abbildung frei fortsetzen auf ${}^\star L$ durch $\vec{\gamma} \mapsto \bigcup_{i \in \mathrm{len}\,\vec{\gamma}} \mathrm{frei}\,\gamma_i$ für $\vec{\gamma} \in {}^\star L$. Für $j \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \in {}^\star L$ sei damit

$$\mathfrak{v}_j^{\mathrm{nfr}}(\Gamma) := \min\nolimits_j(\mathcal{V} \setminus \mathrm{frei}\,\Gamma)$$

die „$(j+1)$-te" Variable, die nicht in Γ frei vorkommt.

Das wichtige Koinzidenzlemma zeigt, dass bei der Interpretation eines Ausdrucks die Belegung der nicht frei vorkommenden Variablen irrelevant ist.

2.3 Lemma (Koinzidenzlemma)

Seien $\varphi \in L$ und $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ Prä-Interpretationen mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}_2}$. Ist $\mathfrak{I}_1{}^\ulcorner v_\lrcorner = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner v_\lrcorner$ für alle $v \in \mathrm{frei}\,\varphi$, so gilt

$$\mathfrak{I}_1{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner\ .$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von φ**:**

SI: Für $\varphi \in \mathcal{V}$ folgt die Behauptung wegen $\mathrm{frei}\,\varphi = \{\varphi\}$ unmittelbar aus den Voraussetzungen.

SII: 1. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$. Unter Beachtung von $\mathrm{frei}\,\alpha, \mathrm{frei}\,\beta \subseteq \mathrm{frei}\,\varphi$ folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner = \mathfrak{I}_1{}^\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle_\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}_1}{}^\ulcorner \mathfrak{I}_1{}^\ulcorner \alpha_\lrcorner, \mathfrak{I}_1{}^\ulcorner \beta_{\lrcorner\lrcorner} \\ \overset{\mathrm{IV}}{=} H_i^{\mathfrak{I}_2}{}^\ulcorner \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner \alpha_\lrcorner, \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner \beta_{\lrcorner\lrcorner} = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle_\lrcorner = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner \end{aligned}$$

2. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$. Wegen $\operatorname{frei}\alpha \subseteq \operatorname{frei}\varphi \cup \{v\}$ gilt auch hier

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1{}^\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}_1{}^\ulcorner\big\langle i, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle\lrcorner &= H_i^{\mathfrak{I}_1\ulcorner}\Big\{b \in U_{\mathfrak{I}_1} \,;\, \mathfrak{I}_1{}^{b}_{v}{}^\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathfrak{I}_1}\Big\}\lrcorner \\ &\overset{\mathrm{IV}}{=} H_i^{\mathfrak{I}_2\ulcorner}\Big\{b \in U_{\mathfrak{I}_2} \,;\, \mathfrak{I}_2{}^{b}_{v}{}^\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathfrak{I}_2}\Big\}\lrcorner = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner\big\langle i, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle\lrcorner = \mathfrak{I}_2{}^\ulcorner\varphi\lrcorner\end{aligned}$$

■

b) Die „intelligente“ **Substitutionsfunktion**:

2.4 Lemma

Es gibt eine Abbildung $\operatorname{sub} : L \sqcap L \sqcap \mathcal{V} \to L,\ \langle\varphi,\gamma,v\rangle \mapsto \varphi{}^{\gamma}_{v}$, *sodass*

$$\varphi{}^{\gamma}_{v} = \begin{cases} \gamma, & \textit{falls } \varphi = v \\ \varphi, & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{V} \setminus v \\ \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha{}^{\gamma}_{v}, \beta{}^{\gamma}_{v}\rangle\big\rangle, & \textit{falls } \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle \textit{ mit } i \in I_{GJ} \\ \varphi, & \textit{falls } \varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \textit{ mit } i \in I_{GQ} \textit{ und } \gamma = v \textit{ oder } v \notin \operatorname{frei}\varphi \\ \big\langle i, \langle\tilde u\rangle, \langle(\alpha{}^{\tilde u}_{u}){}^{\gamma}_{v}\rangle\big\rangle, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$\textit{wobei } \tilde u := \begin{cases} u, & \textit{falls } u \notin \operatorname{frei}\gamma \\ \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \gamma\ \alpha), & \textit{sonst} \end{cases};\qquad \textit{in beiden Fällen ist also } \tilde u \notin \operatorname{frei}(v\ \gamma\ \varphi).$$

Insbesondere ist $\varphi{}^{\gamma}_{v} = \varphi$, *falls* $\gamma = v$ *oder* $v \notin \operatorname{frei}\varphi$. *Weiter ist* $\operatorname{rg}\varphi{}^{w}_{v} = \operatorname{rg}\varphi$ *falls* $w \in \mathcal{V}$.

Beweis:
Wir definieren rekursiv zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$$\operatorname{sub}_n : L^{\le n} \sqcap L \sqcap \mathcal{V} \to L$$

und zeigen parallel, dass

$$\operatorname{rg}\operatorname{sub}_n{}^\ulcorner\varphi, w, v\lrcorner = \operatorname{rg}\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in L^{\le n}, w, v \in \mathcal{V}\ .$$

Fall $n = 0$: Es gilt $L^{\le 0} = \mathcal{V}$. Sei $\operatorname{sub}_0 : \mathcal{V} \sqcap L \sqcap \mathcal{V} \to L$ gegeben durch

$$\langle u,\gamma,v\rangle \mapsto \begin{cases} \gamma, & \text{falls } u = v \\ u, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt natürlich $\operatorname{rg}\operatorname{sub}_0{}^\ulcorner u, w, v\lrcorner = 0 = \operatorname{rg} u$ für $u, w, v \in \mathcal{V}$.

Sei nun $\operatorname{sub}_n : L^{\le n} \sqcap L \sqcap \mathcal{V} \to L$ bereits definiert und gelte

$$(*) \qquad \operatorname{rg}\operatorname{sub}_n{}^\ulcorner\varphi, w, v\lrcorner = \operatorname{rg}\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in L^{\le n}, w, v \in \mathcal{V}\ .$$

Wir erweitern nun sub_n zu $\operatorname{sub}_{n+1} : L^{\le n+1} \sqcap L \sqcap \mathcal{V} \to L$ durch
1. Fall $\varphi \in L^{\le n}$:

$$\langle\varphi,\gamma,v\rangle \mapsto \operatorname{sub}_n{}^\ulcorner\varphi,\gamma,v\lrcorner$$

2. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle \in L^{\le n+1} \setminus L^{\le n}$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$:

$$\langle\varphi,\gamma,v\rangle \mapsto \big\langle i, \langle\rangle, \langle\operatorname{sub}_n{}^\ulcorner\alpha,\gamma,v\lrcorner, \operatorname{sub}_n{}^\ulcorner\beta,\gamma,v\lrcorner\rangle\big\rangle$$

3. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \in L^{\leq n+1} \setminus L^{\leq n}$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$:

$$\langle\varphi,\gamma,v\rangle \mapsto \begin{cases} \varphi, & \text{falls } \gamma = v \text{ oder } v \notin \operatorname{frei}\varphi \\ \big\langle i, \langle\tilde{u}\rangle, \langle \operatorname{sub}_n \ulcorner \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, \tilde{u}, u \lrcorner, \gamma, v \lrcorner\rangle\big\rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{wobei } \tilde{u} := \begin{cases} u, & \text{falls } u \notin \operatorname{frei}\gamma \\ \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \gamma\ \alpha), & \text{sonst} \end{cases}$$

Im dritten Fall beachte man, dass $\operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, \tilde{u}, u \lrcorner \in L^{\leq n}$ wegen $(*)$. Wir wollen nun zeigen, dass auch

$$\operatorname{rg} \operatorname{sub}_{n+1} \ulcorner \varphi, w, v \lrcorner = \operatorname{rg}\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L^{\leq n+1}, w, v \in \mathcal{V}\ .$$

Für $\varphi \in L^{\leq n}$ folgt dies unmittelbar aus $(*)$. Ist $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle \in L^{\leq n+1} \setminus L^{\leq n}$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \operatorname{sub}_{n+1} \ulcorner \varphi, w, v \lrcorner &= \operatorname{rg} \operatorname{sub}_{n+1} \ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle, w, v \lrcorner \\ &= \operatorname{rg} \big\langle i, \langle\rangle, \langle \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, w, v \lrcorner, \operatorname{sub}_n \ulcorner \beta, w, v \lrcorner\rangle\big\rangle \\ &= \max\{\operatorname{rg} \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, w, v \lrcorner, \operatorname{rg} \operatorname{sub}_n \ulcorner \beta, w, v \lrcorner\} + 1 \\ &= \max\{\operatorname{rg}\alpha, \operatorname{rg}\beta\} + 1 && \text{mit } (*) \\ &= \operatorname{rg}\varphi \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \in L^{\leq n+1} \setminus L^{\leq n}$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$. Der Fall $\gamma = v$ oder $v \notin \operatorname{frei}\varphi$ ist trivial. Ist schließlich $\gamma \neq v$ und $v \in \operatorname{frei}\varphi$ so gilt mit $\tilde{u}$ wie oben

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \operatorname{sub}_{n+1} \ulcorner \varphi, w, v \lrcorner &= \operatorname{rg} \operatorname{sub}_{n+1} \ulcorner \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle, w, v \lrcorner \\ &= \operatorname{rg} \big\langle i, \langle\tilde{u}\rangle, \langle \operatorname{sub}_n \ulcorner \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, \tilde{u}, u \lrcorner, w, v \lrcorner\rangle\big\rangle \\ &= \operatorname{rg} \operatorname{sub}_n \ulcorner \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, \tilde{u}, u \lrcorner, w, v \lrcorner + 1 \\ &= \operatorname{rg} \operatorname{sub}_n \ulcorner \alpha, \tilde{u}, u \lrcorner + 1 && \text{mit } (*) \\ &= \operatorname{rg}\alpha + 1 && \text{mit } (*) \\ &= \operatorname{rg}\varphi \end{aligned}$$

Die Abbildung $\operatorname{sub} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sub}_n$ erfüllt damit offenbar die gewünschten Eigenschaften. ■

Das „Wesen“ der Substitution zeigt sich deutlich mit dem folgenden Lemma.

2.5 Lemma (Substitutionslemma)

Für alle Prä-Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\varphi, \gamma \in L$, $v \in \mathcal{V}$ ist

$$\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner\ .$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von φ**:**

SI: Für $\varphi \in \mathcal{V}$ sind zwei Fälle zu untersuchen.

1. Fall $\varphi = v$: Es folgt unmittelbar

$$\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner v\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner\ .$$

2. Fall $\varphi \neq v$: Da hier $v \notin \operatorname{frei}\varphi$ folgt mit dem Koinzidenzlemma

$$\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner\ .$$

SII: 1. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha^{\gamma}_{v}, \beta^{\gamma}_{v}\rangle\big\rangle \lrcorner &= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \mathfrak{I}\ulcorner\alpha^\gamma_v\lrcorner, \mathfrak{I}\ulcorner\beta^\gamma_v\lrcorner\lrcorner \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\alpha\lrcorner, \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\beta\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\big\langle i,\langle\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle\lrcorner = \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\varphi\lrcorner\end{aligned}$$

2. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $\gamma = v$ oder $v \notin \operatorname{frei}\varphi$.

$$\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \varphi \lrcorner = \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\varphi\lrcorner$$

Die letzte Gleichheit ist im Falle $\gamma = v$ trivial. Falls $v \notin \operatorname{frei}\varphi$ folgt sie aus dem Koinzidenzlemma.

3. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $\gamma \neq v$ und $v \in \operatorname{frei}\varphi$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner &= \mathfrak{I}\ulcorner \big\langle i, \langle \tilde{u}\rangle, \langle (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v}\rangle\big\rangle \lrcorner \\ &= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \Big\{ b \in U_{\mathfrak{I}}\,;\ \mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v}\lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \Big\}\lrcorner \\ &= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \Big\{ b \in U_{\mathfrak{I}}\,;\ \big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{u}\ulcorner \alpha\lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \Big\}\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\big\langle i,\langle u\rangle,\langle\alpha\rangle\big\rangle\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\varphi\lrcorner\end{aligned}$$

denn für $u \notin \operatorname{frei}\gamma$ und damit $\tilde{u} = u$ gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v}\lrcorner &= \mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner \alpha^{\gamma}_{v}\lrcorner && \text{Lemma 2.4} \\ &= \big(\mathfrak{I}^{b}_{u}\big)_v^{\mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= \big(\mathfrak{I}^{b}_{u}\big)_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Koinzidenzlemma; } u \notin \operatorname{frei}\gamma \\ &= \big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{u}\ulcorner\alpha\lrcorner && u \neq v \quad (\text{da } v \in \operatorname{frei}\varphi = \operatorname{frei}\alpha \setminus u)\end{aligned}$$

und für $u \in \operatorname{frei}\gamma$ und damit $\tilde{u} = \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \gamma\ \alpha)$ ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v}\lrcorner &= \big(\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\big)_v^{\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\alpha^{\tilde{u}}_{u}\lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung[26]} \\ &= \big(\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}\big)_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner\alpha^{\tilde{u}}_{u}\lrcorner && \text{Koinzidenzlemma; } \tilde{u} \notin \operatorname{frei}\gamma \\ &= \big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner\alpha^{\tilde{u}}_{u}\lrcorner && \tilde{u} \neq v \\ &= \Big(\big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{\tilde{u}}\Big)_u^{\left(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\right)^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner\tilde{u}\lrcorner}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= \Big(\big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{\tilde{u}}\Big)^{b}_{u}\ulcorner\alpha\lrcorner && \\ &= \Big(\big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{u}\Big)^{b}_{\tilde{u}}\ulcorner\alpha\lrcorner && \\ &= \big(\mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}\big)^{b}_{u}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Koinzidenzlemma; } \tilde{u} \notin \operatorname{frei}\alpha\end{aligned}$$

■

[26] Man beachte $\operatorname{rg}\alpha^{\tilde{u}}_{u} = \operatorname{rg}\alpha$.

Bevor wir zur Angabe des Beweiskalküls kommen, wollen wir noch ein kleines semantisches Lemma einschieben.

2.6 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine Prä-Interpretation. Für $\varphi, \gamma \in L$, $u, v \in \mathcal{V}$ gilt

(*i*) $\mathfrak{I} \Vdash \exists^{=1} v\varphi$ *gdw.* $\mathfrak{I}^{\,b}_{\,v} \Vdash \varphi$ *für genau ein* $b \in U_{\mathfrak{I}}$

(*ii*) $\mathfrak{I}^{\,b}_{\,u}\ulcorner\varphi^{\,u}_{\,v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{\,b}_{\,v}\ulcorner\varphi\lrcorner$, *falls* $b \in U_{\mathfrak{I}}$ *und* $u \notin \operatorname{frei}\varphi \setminus v$

(*iii*) *Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, so gilt*

$$\mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \{v; \varphi\} \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \mathbb{D} \textit{ und } \mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$$

Beweis: (i): Sei $w := \mathfrak{v}_0(v\ \varphi)$, also insbesondere $w \neq v$ und $w \notin \operatorname{frei}\varphi$. Mit Lemma 2.2 und Koinzidenzlemma gilt damit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \Vdash \exists^{=1} v\varphi \quad & \text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \exists w \forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)\\
& \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } b \in U_{\mathfrak{I}}\text{, sodass für alle } c \in U_{\mathfrak{I}}\\
& \qquad\quad \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,w}\big)^{\,c}_{\,v} \Vdash \varphi \quad \text{gdw.} \quad \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,w}\big)^{\,c}_{\,v} \Vdash v = w\\
& \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } b \in U_{\mathfrak{I}}\text{, sodass für alle } c \in U_{\mathfrak{I}}\\
& \qquad\quad \big(\mathfrak{I}^{\,c}_{\,v}\big)^{\,b}_{\,w} \Vdash \varphi \quad \text{gdw.} \quad \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,w}\big)^{\,c}_{\,v}\ulcorner v\lrcorner = \big(\mathfrak{I}^{\,c}_{\,v}\big)^{\,b}_{\,w}\ulcorner w\lrcorner\\
& \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } b \in U_{\mathfrak{I}}\text{, sodass für alle } c \in U_{\mathfrak{I}}\\
& \qquad\quad \mathfrak{I}^{\,c}_{\,v} \Vdash \varphi \quad \text{gdw.} \quad c = b\\
& \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{\,v} \Vdash \varphi \text{ für genau ein } b \in U_{\mathfrak{I}}
\end{aligned}$$

(ii): Mit dem Substitutionslemma ist

$$\mathfrak{I}^{\,b}_{\,u}\ulcorner\varphi^{\,u}_{\,v}\lrcorner = \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,u}\big)^{\mathfrak{I}^{\,b}_{\,u}\ulcorner u\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,u}\big)^{\,b}_{\,v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \big(\mathfrak{I}^{\,b}_{\,v}\big)^{\,b}_{\,u}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}^{\,b}_{\,v}\ulcorner\varphi\lrcorner\,.$$

Die letzte Gleichheit folgt im Falle $u \neq v$ (und damit $u \notin \operatorname{frei}\varphi$) aus dem Koinzidenzlemma.

(iii): Mit Lemma 2.2 und Substitutionslemma gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \{v; \varphi\} \quad & \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}\ulcorner\{v; \varphi\}\lrcorner\\
& \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\{v; \varphi\}\lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} \text{ und } \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\{v; \varphi\}\lrcorner\urcorner\\
& \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner A_{\mathfrak{I}}\ulcorner\Big\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ \mathfrak{I}^{\,b}_{\,v}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}\Big\}\lrcorner\urcorner = \Big\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ \mathfrak{I}^{\,b}_{\,v}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}\Big\}\\
& \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in D_{\mathfrak{I}} \text{ und } V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma}_{v}\lrcorner\\
& \text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \mathbb{D} \text{ und } \mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}
\end{aligned}$$

■

Im Folgenden werden wir zumeist keine Verweise auf Koinzidenz- und Substitutionslemma mehr angeben.

Der Beweiskalkül $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$ für die Klassenlogik CL enthalte die folgenden parameterlosen Schlussschemata.[27]

Für alle $\varphi, \psi, \gamma, \gamma' \in L$, alle $\Gamma \in {}^\star L$ und alle $u, v, w \in \mathcal{V}$:

Grund- und Junktorenregeln

Monotonieregel

$MON_{\Gamma,\Gamma',\varphi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma' & \varphi \end{array}$$

für jedes $\Gamma' \in {}^\star L$ mit $\operatorname{im}\Gamma \subseteq \operatorname{im}\Gamma'$

Voraussetzungsregel

$VOR_{\Gamma,\varphi}$:

$$\begin{array}{lll} \hline \Gamma & \varphi & \varphi \end{array}$$

Kettenschlussregel

$KS_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

Fallunterscheidungsregel

$BFU_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \varphi = \bot & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

falls φ boolesch

Frege-Regel

$FRE_{\Gamma,\varphi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \varphi = \top \end{array}$$

Konjunktionsregeln

$KON1_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

$KON2_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

$KON3_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \wedge \psi \end{array}$$

Gleichheitsregeln

Reflexivitätsregel

$REF_{\Gamma,\gamma}$:

$$\begin{array}{ll} \hline \Gamma & \gamma = \gamma \end{array}$$

Substitutionsregel

$SUB_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi^{\gamma}_{v} \\ \Gamma & \gamma' = \gamma \\ \hline \Gamma & \varphi^{\gamma'}_{v} \end{array}$$

[27] Man erinnere sich (Seite 20), dass wir Sequenzen, d.h. Elemente aus ${}^\star L$, zumeist in klammer- und kommafreier Darstellung notieren. Auch das Kalkül $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$ ist also ein Kalkül über $M = \langle\!\langle \mathbb{N} \rangle\!\rangle$.

Allquantorregeln

Generalisierungsregel

$GEN_{\Gamma,\varphi,u,v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi\frac{u}{v} \\ \hline \Gamma & \forall v\varphi \end{array}$$

falls $u \notin \text{frei}\,(\Gamma\ \forall v\varphi)$

Partikularisierungsregel

$PART_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \forall v\varphi \\ \hline \Gamma & \varphi\frac{\gamma}{v} \end{array}$$

Kennzeichnungsregeln

$KZG1_{\Gamma,\varphi,\gamma,v,u}$:

$$\begin{array}{llr} \Gamma & & \varphi\frac{\gamma}{v} \\ \Gamma & \varphi\frac{u}{v} & u = \gamma \\ \hline \Gamma & & \iota v\varphi = \gamma \end{array}$$

falls $u \notin \text{frei}(\Gamma\ \iota v\varphi\ \gamma)$

$KZG2_{\Gamma,\varphi,v}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \forall v\neg\varphi \\ \hline \Gamma & \iota v\varphi = \$ \end{array}$$

$KZG3_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \varphi\frac{\gamma}{v} \\ \Gamma & \varphi\frac{\gamma'}{v} \\ \Gamma & \neg(\gamma = \gamma') \\ \hline \Gamma & \iota v\varphi = \$ \end{array}$$

Klassenregeln

$KLS1_{\Gamma,\gamma,\gamma',v}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \gamma' \in \gamma \\ \hline \Gamma & \gamma = \{v; v \in \gamma\} \end{array}$$

falls $v \notin \text{frei}\,\gamma$

$KLS2_{\Gamma,\gamma,\gamma'}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \gamma' \in \gamma \\ \hline \Gamma & \gamma' \in \mathbb{D} \end{array}$$

$KLS3_{\Gamma,\alpha,v}$:

$$\begin{array}{lr} \hline \Gamma & \neg(\{v; \alpha\} = \$) \end{array}$$

Abstraktionsregeln

$ABS1_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \gamma \in \mathbb{D} \\ \Gamma & \varphi\frac{\gamma}{v} \\ \hline \Gamma & \gamma \in \{v; \varphi\} \end{array}$$

$ABS2_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$:

$$\begin{array}{lr} \Gamma & \gamma \in \{v; \varphi\} \\ \hline \Gamma & \varphi\frac{\gamma}{v} \end{array}$$

Unsinnsregel

$NONS_{\Gamma}$:

$$\begin{array}{lr} \hline \Gamma & \neg(\$ \in \mathbb{D}) \end{array}$$

Extensionalitätsregel

$EXT_{\Gamma,\varphi,\psi,u,v,w}$:

$$\begin{array}{llr} \Gamma & v \in \{u; \varphi\} & v \in \{w; \psi\} \\ \Gamma & v \in \{w; \psi\} & v \in \{u; \varphi\} \\ \hline \Gamma & & \{u; \varphi\} = \{w; \psi\} \end{array}$$

falls $v \notin \text{frei}(\Gamma\ \{u; \varphi\}\ \{w; \psi\})$

2.3.1. Korrektheitssatz

Als erstes zeigen wir die Korrektheit des Beweiskalküls $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$.

2.7 Satz (Korrektheitssatz)

(a) Sind $\Phi \subseteq L$ und $\varphi \in L$ mit $\Phi \vdash_{\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}} \varphi$, so gilt auch $\Phi \models \varphi$.

(b) Alle erfüllbaren Axiomensysteme sind $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$-konsistent.

Beweis:
(a) Gemäß Satz 1.11 reicht es zu zeigen, dass alle $\Gamma \in G_{\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}}$ korrekt[28] sind. Da $G_{\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}}$ die kleinste unter $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$ abgeschlossene Menge von Sequenzen ist, sind wir somit fertig, wenn wir zeigen können, dass auch die Menge aller korrekten Sequenzen abgeschlossen unter $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$ ist, d.h. dass jeder Schluss aus $\overline{\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}}$ korrekte Sequenzen in korrekte Sequenzen überführt. Hierbei werden wir vor allem Lemma 2.2 verwenden.

$MON_{\Gamma,\Gamma',\varphi}$: Sei $\Gamma\,\varphi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma'$.[29] Da $\operatorname{im}\Gamma \subseteq \operatorname{im}\Gamma'$ gilt auch $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$ und damit $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$ nach Voraussetzung. Also ist auch $\Gamma'\,\varphi$ korrekt.

$VOR_{\Gamma,\varphi}$: Sei $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma\,\varphi$. Es gilt insbesondere $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$. Somit ist $\Gamma\,\varphi\,\varphi$ korrekt.

$KS_{\Gamma,\varphi,\psi}$: Seien $\Gamma\,\varphi$ und $\Gamma\,\varphi\,\psi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Nach der ersten Annahme folgt $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$ und damit $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma\,\varphi$, also $\mathfrak{I} \Vdash \psi$ nach der zweiten Annahme.

$BFU_{\Gamma,\varphi,\psi}$: Seien $\Gamma\,\varphi\,\psi$ und $\Gamma\,(\varphi = \bot)\,\psi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Ist zudem $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$, so folgt sofort $\mathfrak{I} \Vdash \psi$ nach der ersten Annahme. Ist $\mathfrak{I} \nVdash \varphi$, d.h. $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner \neq V_{\mathfrak{I}}$, so muss $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = F_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\bot\lrcorner$ gelten, da φ boolesch. Folglich gilt $\mathfrak{I} \Vdash \varphi = \bot$, d.h $\mathfrak{I} \Vdash \psi$ nach der zweiten Annahme.

$FRE_{\Gamma,\varphi}$: Sei $\Gamma\,\varphi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$, d.h. $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\top\lrcorner$ und somit $\mathfrak{I} \Vdash \varphi = \top$.

$KON1_{\Gamma,\varphi,\psi}$ und $KON2_{\Gamma,\varphi,\psi}$: Sei $\Gamma\,(\varphi \wedge \psi)$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \varphi \wedge \psi$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$ und $\mathfrak{I} \Vdash \psi$.

$KON3_{\Gamma,\varphi,\psi}$: Seien $\Gamma\,\varphi$ und $\Gamma\,\psi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$ und $\mathfrak{I} \Vdash \psi$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \varphi \wedge \psi$.

$REF_{\Gamma,\gamma}$: Sei $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Natürlich gilt $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \gamma = \gamma$.

$SUB_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$: Seien $\Gamma\,\varphi^{\gamma}_{v}$ und $\Gamma\,(\gamma' = \gamma)$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Nach Annahme ist $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$ und $\mathfrak{I} \Vdash \gamma' = \gamma$, d.h. $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$. Folglich gilt $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma'}_{v}\lrcorner$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma'}_{v}$.

[28] Zur Erinnerung: $\Gamma \star \langle\varphi\rangle \in {}^{\star}L$ ist korrekt, falls $\operatorname{im}\Gamma \models \varphi$.
[29] Für Sequenzen Γ schreiben wir zumeist einfach $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$ anstatt $\mathfrak{I} \Vdash \operatorname{im}\Gamma$.

$GEN_{\Gamma,\varphi,u,v}$: Sei $\Gamma\,\varphi^{u}_{v}$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Für beliebiges $b \in U_{\mathfrak{I}}$ gilt mit dem Koinzidenzlemma auch $\mathfrak{I}^{b}_{u} \Vdash \Gamma$ (denn $u \notin \mathrm{frei}\,\Gamma$). Also ist $\mathfrak{I}^{b}_{u} \Vdash \varphi^{u}_{v}$, d.h. mit Lemma 2.6 (ii) $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner\varphi^{u}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner$ für alle $b \in U_{\mathfrak{I}}$. Folglich gilt $\mathfrak{I} \Vdash \forall v\varphi$.

$PART_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$: Sei $\Gamma\,\forall v\varphi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Da somit $\mathfrak{I} \Vdash \forall v\varphi$, gilt insbesondere $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma}_{v}\lrcorner$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$.

$KZG1_{\Gamma,\varphi,\gamma,v,u}$: Seien $\Gamma\,\varphi^{\gamma}_{v}$ und $\Gamma\,\varphi^{u}_{v}\,(u = \gamma)$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Mit $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$ gilt $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner$. Sei andererseits $b \in U_{\mathfrak{I}}$ mit $\mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}$ beliebig. Gemäß Koinzidenzlemma ist auch $\mathfrak{I}^{b}_{u} \Vdash \Gamma$ (denn $u \notin \mathrm{frei}\,\Gamma$) und außerdem $\mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner\varphi^{u}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}$ mit Lemma 2.6 (ii), d.h. $\mathfrak{I}^{b}_{u} \Vdash \varphi^{u}_{v}$. Es ist also $\mathfrak{I}^{b}_{u} \Vdash u = \gamma$ und damit $b = \mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner u\lrcorner = \mathfrak{I}^{b}_{u}\ulcorner\gamma\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$ (beachte $u \notin \mathrm{frei}\,\gamma$).

Folglich gilt $\mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}$ gdw. $b = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$ für alle $b \in U_{\mathfrak{I}}$ und somit $\mathfrak{I}\ulcorner\iota v\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \iota v\varphi = \gamma$.

$KZG2_{\Gamma,\varphi,v}$: Sei $\Gamma\,\forall v\neg\varphi$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \forall v\neg\varphi$ und somit $\mathfrak{I}^{b}_{v} \nVdash \varphi$, d.h. $\mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner \neq V_{\mathfrak{I}}$ für alle $b \in U_{\mathfrak{I}}$. Also ist $\mathfrak{I}\ulcorner\iota v\varphi\lrcorner = N_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner$ und damit $\mathfrak{I} \Vdash \iota v\varphi = \$$.

$KZG3_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$: Seien $\Gamma\,\varphi^{\gamma}_{v}$, $\Gamma\,\varphi^{\gamma'}_{v}$ und $\Gamma\,\neg(\gamma = \gamma')$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Es ist also $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner$ und $V_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\varphi^{\gamma'}_{v}\lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner}_{v}\ulcorner\varphi\lrcorner$ sowie $\mathfrak{I} \nVdash \gamma = \gamma'$, d.h. $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \neq \mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner$. Folglich muss $\mathfrak{I}\ulcorner\iota v\varphi\lrcorner = N_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner$ und damit $\mathfrak{I} \Vdash \iota v\varphi = \$$ gelten.

$KLS1_{\Gamma,\gamma,\gamma',v}$: Sei $\Gamma\,(\gamma' \in \gamma)$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \gamma' \in \gamma$ und somit $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}}$ und $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner\urcorner$. Insbesondere existiert also ein $X \subseteq D_{\mathfrak{I}}$ mit $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner X\lrcorner \neq N_{\mathfrak{I}}$. Für $b \in D_{\mathfrak{I}}$ gilt nun $\mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner v \in \gamma\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}$ gdw. $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner = \mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\gamma\lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}}$ und $b = \mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner v\lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner\gamma\lrcorner\urcorner = A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner\urcorner = A_{\mathfrak{I}}\llcorner A_{\mathfrak{I}}\ulcorner X\lrcorner\urcorner = X$ gdw. $b \in X$ (beachte $v \notin \mathrm{frei}\,\gamma$). Folglich ist $\mathfrak{I}\ulcorner\{v; v \in \gamma\}\lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner\left\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ \mathfrak{I}^{b}_{v}\ulcorner v \in \gamma\lrcorner = V_{\mathfrak{I}}\right\}\lrcorner = A_{\mathfrak{I}}\ulcorner X\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \gamma = \{v; v \in \gamma\}$.

$KLS2_{\Gamma,\gamma,\gamma'}$: Sei $\Gamma\,(\gamma' \in \gamma)$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Dann gilt $\mathfrak{I} \Vdash \gamma' \in \gamma$ und somit $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}}$ und $\mathfrak{I}\ulcorner\gamma'\lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\gamma\lrcorner\urcorner \subseteq D_{\mathfrak{I}} = A_{\mathfrak{I}}\llcorner A_{\mathfrak{I}}\ulcorner D_{\mathfrak{I}}\lrcorner\urcorner = A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\mathbb{D}\lrcorner\urcorner$. Folglich ist auch $\mathfrak{I} \Vdash \gamma' \in \mathbb{D}$ (beachte Lemma 2.2 (xii) und (xiii)).

$KLS3_{\Gamma,\varphi,v}$: Sei $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Mit Lemma 2.2 (xiii) gilt $\mathfrak{I}\ulcorner\{v;\varphi\}\lrcorner \neq N_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner$. Also ist $\mathfrak{I} \Vdash \neg(\{v;\varphi\} = \$)$.

$ABS1_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$: Seien $\Gamma\,(\gamma \in \mathbb{D})$ und $\Gamma\,\varphi^{\gamma}_{v}$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Wegen $\mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \mathbb{D}$ und $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$ folgt mit Lemma 2.6 (iii) unmittelbar $\mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \{v;\varphi\}$.

$ABS2_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$: Sei $\Gamma\,(\gamma \in \{v;\varphi\})$ korrekt und $\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Wegen $\mathfrak{I} \Vdash \gamma \in \{v;\varphi\}$ folgt mit Lemma 2.6 (iii) unmittelbar $\mathfrak{I} \Vdash \varphi^{\gamma}_{v}$.

$NONS_{\Gamma}$: Da $\mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner = N_{\mathfrak{I}} \notin D_{\mathfrak{I}} = A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner\mathbb{D}\lrcorner\urcorner$, gilt nicht $\mathfrak{I}\ulcorner\$\lrcorner \,\epsilon_{\mathfrak{I}}\, \mathfrak{I}\ulcorner\mathbb{D}\lrcorner$, d.h. es ist $\mathfrak{I} \Vdash \neg(\$ \in \mathbb{D})$.

$EXT_{\Gamma,\varphi,\psi,u,v,w}$: Seien $\Gamma\,(v \in \{u;\varphi\})\,(v \in \{w;\psi\})$ und $\Gamma\,(v \in \{w;\psi\})\,(v \in \{u;\varphi\})$ korrekt und

$\mathfrak{I} \Vdash \Gamma$. Sei nun $b \in D_\mathfrak{I}$ beliebig. Da $v \notin \operatorname{frei} \Gamma$, ist auch $\mathfrak{I}_v^b \Vdash \Gamma$. Weiter haben wir

$b \in D_\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_u^b \ulcorner \varphi \lrcorner = V_\mathfrak{I}$		
gdw.	$\mathfrak{I}_v^b \ulcorner v \lrcorner \in D_\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_v^b \ulcorner \varphi_u^v \lrcorner = V_\mathfrak{I}$	Lemma 2.6 (ii)
gdw.	$\mathfrak{I}_v^b \Vdash v \in \{u; \varphi\}$	Lemma 2.2 (xiii) und Lemma 2.6 (iii)
gdw.	$\mathfrak{I}_v^b \Vdash v \in \{w; \psi\}$	Voraussetzungen
gdw.	$\mathfrak{I}_v^b \ulcorner v \lrcorner \in D_\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_v^b \ulcorner \psi_w^v \lrcorner = V_\mathfrak{I}$	Lemma 2.2 (xiii) und Lemma 2.6 (iii)
gdw.	$b \in D_\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_w^b \ulcorner \psi \lrcorner = V_\mathfrak{I}$	Lemma 2.6 (ii)

Also ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \ulcorner \{u; \varphi\} \lrcorner &= A_\mathfrak{I} \ulcorner \left\{ b \in D_\mathfrak{I} \, ; \, \mathfrak{I}_u^b \ulcorner \varphi \lrcorner = V_\mathfrak{I} \right\} \lrcorner \\ &= A_\mathfrak{I} \ulcorner \left\{ b \in D_\mathfrak{I} \, ; \, \mathfrak{I}_w^b \ulcorner \psi \lrcorner = V_\mathfrak{I} \right\} \lrcorner \\ &= \mathfrak{I} \ulcorner \{w; \psi\} \lrcorner \, , \end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{I} \Vdash \{u; \varphi\} = \{w; \psi\}$.

(b) Sei $\Phi \subseteq L$ erfüllbar und $\mathfrak{I} \Vdash \Phi$. Angenommen Φ wäre inkonsistent. Insbesondere hätten wir dann $\Phi \vdash \bot$, d.h. auch $\Phi \vDash \bot$ mit (a). Damit müsste $\mathfrak{I} \Vdash \bot$ gelten, im Widerspruch zu Lemma 2.2 (ii). ■

2.3.2. Vollständigkeitssatz

Kommen wir nun zum schwierigeren Teil: der Vollständigkeit unseres Beweiskalküls. Hierzu sind einige abgeleitete Schlussregeln vonnöten. Wir werden daher in diesem Abschnitt immer mal wieder ein paar Ableitungen einstreuen. Dies wird uns auch mit dem Beweiskalkül etwas vertrauter machen. Um dem Leser eine Hilfe zu geben, haben wir in den Ableitungen Zeilennummern hinzugefügt und entsprechende Verweise beim Anwenden von Schlussschemata angegeben. Substitutionsumformungen (S-Umformung) und Abkürzungsumformungen (A-Umformung) werden nicht als eigenständige Zeilen gezählt.

$KS2_{\Gamma,\varphi,\psi,\chi}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & \varphi & \chi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	$\Gamma\ \varphi$	ψ	Praemissio
2.	$\Gamma\ \psi$	χ	Praemissio
3.	$\Gamma\ \varphi\ \psi$	χ	$MON_{\Gamma\,\psi,\Gamma\,\varphi\,\psi,\chi}$ auf 2.
4.	$\Gamma\ \varphi$	χ	$KS_{\Gamma\,\varphi,\psi,\chi}$ auf 1. und 3.

qed.

$SYM_{\Gamma,\alpha,\beta}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \alpha = \beta \\ \hline \Gamma & \beta = \alpha \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\alpha = \beta$	Praemissio
2.	Γ	$\beta = \beta$	$REF_{\Gamma,\beta}$
2.1	Γ	$(\beta = w)\frac{\beta}{w}$	S-Umformung in 2.
3	Γ	$(\beta = w)\frac{\alpha}{w}$	$SUB_{\Gamma,(\beta=w),\beta,\alpha,w}$ auf 2.1 und 1.
3.1	Γ	$\beta = \alpha$	S-Umformung in 3.

qed.

wobei $w := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(\beta)$

$TRAN_{\Gamma,\alpha,\beta,\gamma}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \alpha = \beta \\ \Gamma & \beta = \gamma \\ \hline \Gamma & \alpha = \gamma \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\alpha = \beta$	Praemissio
2.	Γ	$\beta = \gamma$	Praemissio
2.1	Γ	$(w = \gamma)\frac{\beta}{w}$	S-Umformung in 2.
3	Γ	$(w = \gamma)\frac{\alpha}{w}$	$SUB_{\Gamma,(w=\gamma),\beta,\alpha,w}$ auf 2.1 und 1.
3.1	Γ	$\alpha = \gamma$	S-Umformung in 3.

qed.

wobei $w := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(\gamma)$

$SUB2_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi{}^{\gamma}_{v} \\ \Gamma & \gamma = \gamma' \\ \hline \Gamma & \varphi{}^{\gamma'}_{v} \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\varphi{}^{\gamma}_{v}$	Praemissio
2.	Γ	$\gamma = \gamma'$	Praemissio
3.	Γ	$\gamma' = \gamma$	$SYM_{\Gamma,\gamma,\gamma'}$ auf 2.
4	Γ	$\varphi{}^{\gamma'}_{v}$	$SUB_{\Gamma,\varphi,\gamma,\gamma',v}$ auf 1. und 3.

qed.

$SUB3_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi = \varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	Praemissio
2.	Γ	$\psi = \varphi$	Praemissio
1.1	Γ	$v_0{}^{\varphi}_{v_0}$	S-Umformung in 1.
3	Γ	$v_0{}^{\psi}_{v_0}$	$SUB_{\Gamma,v_0,\varphi,\psi,v_0}$ auf 1.1 und 2.
3.1	Γ	ψ	S-Umformung in 3.

qed.

$SUB4_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \varphi = \psi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	Praemissio
2.	Γ	$\varphi = \psi$	Praemissio
3.	Γ	$\psi = \varphi$	$SYM_{\Gamma,\varphi,\psi}$ auf 2.
4.	Γ	ψ	$SUB3_{\Gamma,\varphi,\psi}$ auf 1. und 3.

qed.

VER_{Γ} :

$$\begin{array}{ll} \hline \Gamma & \top \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$w = w$	$REF_{\Gamma,w}$
1.1	Γ	$(v_0 = v_0){}^{w}_{v_0}$	S-Umformung in 1.
2.	Γ	$\forall v_0(v_0 = v_0)$	$GEN_{\Gamma,(v_0=v_0),w,v_0}$ auf 1.1
2.1	Γ	$\top$	A-Umformung in 2.

qed.

wobei $w := \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(\Gamma\ \forall v_0(v_0 = v_0))$

$FRE2_{\Gamma,\alpha}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi = \top \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\varphi = \top$	Praemissio
2.	Γ		$\top$	VER_{Γ}
3.	Γ		φ	$SUB3_{\Gamma,\top,\varphi}$ auf 2. und 1.

qed.

$FU_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	ψ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\varphi$	ψ	Praemissio
2.1	Γ	$(\varphi = \top) = \bot$	ψ	A-Umformung in 2.
3.	Γ	$\varphi = \top$	$\varphi = \top$	$VOR_{\Gamma,(\varphi=\top)}$
4.	Γ	$\varphi = \top$	φ	$FRE2_{\Gamma\,(\varphi=\top),\varphi}$ auf 3.
5.	Γ	$\varphi = \top$	ψ	$KS2_{\Gamma,(\varphi=\top),\varphi,\psi}$ auf 4. und 1.
6.	Γ		ψ	$BFU_{\Gamma,(\varphi=\top),\psi}$ auf 5. und 2.1

qed.

Den Beweis des Vollständigkeitssatzes führen wir wie üblich, indem wir zeigen, dass jedes konsistente Axiomensystem erfüllbar ist. Nehmen wir dies nämlich an und sind $\Phi \subseteq L$ und $\varphi \in L$ mit $\Phi \vDash \varphi$, so können wir folgendermaßen argumentieren:

1. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist inkonsistent:
   Wäre $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent und damit nach Annahme erfüllbar, so gäbe es eine Interpretation $\mathfrak{I} \Vdash \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Mit Lemma 2.2 (iv) würde also $\mathfrak{I} \Vdash \Phi$ und $\mathfrak{I} \nVdash \varphi$ gelten, im Widerspruch zur Annahme $\Phi \vDash \varphi$.

2. $\Phi \vdash \varphi$:
   Mit 1. gilt insbesondere $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, d.h. es existiert ein $\Gamma \in {}^{\star}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$ mit $\Gamma\,\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$. Natürlich gibt es ein $\Gamma' \in {}^{\star}\Phi$ mit $\operatorname{im}\Gamma \subseteq \operatorname{im}(\Gamma'\,\neg\varphi)$. Gemäß $MON_{\Gamma,\Gamma'\neg\varphi,\varphi}$ gilt also $\Gamma'\,\neg\varphi\,\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$. Da mit $VOR_{\Gamma',\varphi}$ auch $\Gamma'\,\varphi\,\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$, folgt mit der allgemeinen Fallunterscheidungregel $FU_{\Gamma',\varphi,\varphi}$, dass $\Gamma'\,\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$ und damit $\Phi \vdash \varphi$.

Wir zeigen nun zuerst, dass konsistente Axiomensysteme mit gewissen Eigenschaften, sogenannte Henkin-Mengen, erfüllbar sind. Im zweiten und abschließenden Schritt beweisen wir dann, dass sich jedes beliebige konsistente Axiomensystem als Teilmenge einer Henkin-Menge auffassen lässt.

Von nun an wollen wir bei Verweisen auf Schlussregeln (im Text oder auch in Ableitungen) auf die entsprechenden Indices verzichten. D.h. wir schreiben z.B. in der nächsten Ableitung (EFQ-Regel) einfach $PART$ für $PART_{\Gamma,v_0,\varphi,v_0}$.[30]

[30] Da immer aus dem Kontext ersichtlich ist, welche Instanz (bzw. Instanzen) einer Regel an den entsprechenden Stellen verwendet wird, stellen die Indices für den Leser keine wirkliche Hilfe dar. Vermutlich sind sie sogar

Ein Axiomensystem $\Phi \subseteq L$

- ist **negationsvollständig**, falls

$$\Phi \vdash \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash \neg\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L$$

- **enthält Beispiele**, falls

$$\text{für alle } \varphi \in L, v \in \mathcal{V} \text{ mit } \ \Phi \vdash \exists v\varphi \ \text{ ein } u \in \mathcal{V} \text{ existiert, sodass } \ \Phi \vdash \varphi\frac{u}{v}$$

Ein konsistentes und negationsvollständiges Axiomensystem $\Phi \subseteq L$, dass Beispiele enthält, nennen wir eine **Henkin-Menge**. Im Folgenden wollen wir für jede Henkin-Menge ein Modell konstruieren, die (zumindest in der Prädikatenlogik) sogenannte **Terminterpretation**[31].

Im folgenden Abschnitt sei nun $\Phi \subseteq L$ eine beliebige feste Henkin-Menge. Auf L erklären wir eine Relation $\sim$ durch

$$\varphi \sim \psi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \vdash \varphi = \psi$$

Wegen der Regeln *REF*, *SYM* und *TRAN* ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation[32]. Wir wollen nun eine Prä-Struktur $\mathfrak{A} = \langle U, D, A, V, F, N\rangle$ definieren und zeigen, dass sie zusammen mit der Belegung $h : \mathcal{V} \to U,\ u \mapsto [u]$ ein Modell von Φ bildet. Hierzu setzen wir

$$U := L/{\sim} = \{[\varphi]\,;\ \varphi \in L\} \quad \text{und} \quad D := \{[\varphi]\,;\ \varphi \in L,\ \Phi \vdash \varphi \in \mathbb{D}\} \subseteq U\ .$$

2.8 Lemma

Ist $\varphi \in L$ mit $[\varphi] \in D$, so gilt $\Phi \vdash \varphi \in \mathbb{D}$.

Beweis: Da $[\varphi] \in D$, gibt es ein $\psi \in L$ mit $\Phi \vdash \psi \in \mathbb{D}$ und $\varphi \sim \psi$, d.h. $\Phi \vdash \varphi = \psi$. Mit *SUB* gilt also auch $\Phi \vdash \varphi \in \mathbb{D}$. ■

„Ex falso sequitur quodlibet“

EFQ$_{\Gamma,\varphi}$:

$$\frac{\Gamma \quad \bot}{\Gamma \quad \varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\bot$	Praemissio
1.1	Γ	$\forall v_0 v_0$	A-Umformung in 1.
2.	Γ	$v_0\frac{\varphi}{v_0}$	*PART* auf 1.1
2.1	Γ	φ	S-Umformung in 2.

qed.

---

eher verwirrend, da durch sie die Sache komplizierter erscheint, als sie eigentlich ist. Nichtsdestotrotz ist die Darstellung mit Indices die exaktere.

[31] Ob diese Bezeichnung auch für die Klassenlogik, in der ja die Unterscheidung Term/Ausdruck wegfällt, passend ist, wollen wir hier nicht diskutieren.

[32] Die Äquivalenzklasse eines Repräsentanten $\varphi \in L$ werde wie üblich durch $[\varphi]$ bezeichnet.

„Ex contradictione sequitur quodlibet“

ECQ$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ		φ	Praemissio
2.	Γ		$\neg\varphi$	Praemissio
2.1	Γ		$(\varphi = \top) = \bot$	A-Umformung in 2.
3.	Γ		$\varphi = \top$	*FRE* auf 1.
4.	Γ		$\bot$	*SUB4* auf 3. und 2.1
5	Γ		ψ	*EFQ* auf 4.1

qed.

Mit *EFQ* und *ECQ* erhalten wir sofort zwei weitere Charakterisierungen für die Inkonsistenz eines Axiomensystems:

2.9 Lemma

(a) Für $\Phi \subseteq L$ sind äquivalent:

(i) Φ ist inkonsistent

(ii) $\Phi \vdash \bot$

(iii) Es gibt ein $\varphi \in L$ mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$

(b) Ein Axiomensystem Φ ist konsistent genau dann, wenn alle endlichen Teilmengen von Φ konsistent sind.

Beweis:
(a) folgt unmittelbar aus der Definition von „inkonsistent“ und mit *EFQ* und *ECQ*.
(b) Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist trivial. Die Rückrichtung beweisen wir per Kontraposition. Sei also Φ inkonsistent angenommen. Nach (a) gilt $\Phi \vdash \bot$, d.h. es gibt ein $\Gamma \in {}^{\star}\Phi$ mit $\Gamma\ \bot \in G_{\mathcal{BK}}$. Damit ist aber (wieder mit (a)) im Γ eine inkonsistente endliche Teilmenge von Φ. ■

WID1$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \Gamma & \varphi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & & \neg\varphi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	ψ	Praemissio
2.	Γ	φ	$\neg\psi$	Praemissio
3.	Γ	φ	$\neg\varphi$	*ECQ* auf 1. und 2.
4.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	*VOR*
5	Γ		$\neg\varphi$	*FU* auf 3. und 4.

qed.

WID2$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ	$\neg\varphi$	ψ
Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
Γ		φ

Demonstratio:

1.	Γ	$\neg\varphi$	ψ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	Praemissio
3.	Γ	$\neg\varphi$	φ	*ECQ* auf 1. und 2.
4.	Γ	φ	φ	*VOR*
5.	Γ		φ	*FU* auf 4. und 3.

qed.

ES$_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$:

Γ	$\varphi\frac{\gamma}{v}$
Γ	$\exists v\varphi$

Demonstratio:

1.	Γ		$\varphi\frac{\gamma}{v}$	Praemissio
2.	Γ	$\forall v\neg\varphi$	$\varphi\frac{\gamma}{v}$	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\forall v\neg\varphi$	$\forall v\neg\varphi$	*VOR*
4.	Γ	$\forall v\neg\varphi$	$(\neg\varphi)\frac{\gamma}{v}$	*PART* auf 3.
4.1	Γ	$\forall v\neg\varphi$	$\neg(\varphi\frac{\gamma}{v})$	S-Umformung in 4.
5.	Γ		$\neg\forall v\neg\varphi$	*WID1* auf 2. und 4.1
6.	Γ		$\exists v\varphi$	A-Umformung in 5.

qed.

2.10 Lemma

Es gibt eine Abbildung $\eta : U \to \mathcal{V},\ a \mapsto \eta_a$ *mit*

(i) $[\eta_a] = a$ *für alle* $a \in U$

(ii) $\Phi \vdash \eta_{[\varphi]} = \varphi$ *für alle* $\varphi \in L$

(iii) $\Phi \vdash \eta_a \in \mathbb{D}$ *für alle* $a \in D$

Beweis:
(i) Seien $a \in U$ und $\varphi \in a$ beliebig. Natürlich gilt $\Phi \vdash \varphi = \varphi$ (gemäß *REF*) und damit $\Phi \vdash (v = \varphi)\frac{\varphi}{v}$ für eine beliebige Variable $v \notin \text{frei}\,\varphi$ (man beachte dazu Lemma 2.4). Mit *ES* folgt $\Phi \vdash \exists v(v = \varphi)$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es ein $u \in \mathcal{V}$ mit $\Phi \vdash (v = \varphi)\frac{u}{v}$, d.h. $\Phi \vdash u = \varphi$. Damit gilt $[u] = [\varphi] = a$. Da a beliebig gewählt war, folgt die Existenz einer Abbildung $\eta : U \to \mathcal{V},\ a \mapsto \eta_a$ mit $[\eta_a] = a$ für alle $a \in U$.
(ii) Sei $\varphi \in L$ beliebig. Mit (i) folgt $[\eta_{[\varphi]}] = [\varphi]$, d.h. $\Phi \vdash \eta_{[\varphi]} = \varphi$.
(iii) Ist $a \in D$, so gilt mit (i) auch $[\eta_a] \in D$. Also ist $\Phi \vdash \eta_a \in \mathbb{D}$ mit Lemma 2.8. ∎

$FNEG_{\Gamma,\varphi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \varphi = \bot}{\Gamma \qquad \neg\varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\varphi = \bot$	Praemissio
2.	Γ	φ	$\varphi = \bot$	*MON* auf 1.
3.	Γ	φ	φ	*VOR*
4.	Γ	φ	$\bot$	*SUB4* auf 3. und 2.
5.	Γ	φ	$\neg\varphi$	*EFQ* auf 4.
6.	Γ		$\neg\varphi$	*WID1* auf 3. und 5.1

qed.

$NEGF_{\Gamma,\varphi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \neg\varphi}{\Gamma \qquad \varphi = \bot}$$

falls φ boolesch

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\varphi$	Praemissio
2.	Γ	φ	$\neg\varphi$	*MON* auf 1.
3.	Γ	φ	φ	*VOR*
4.	Γ	φ	$\varphi = \bot$	*ECQ* auf 3. und 2.
5.	Γ	$\varphi = \bot$	$\varphi = \bot$	*VOR*
6	Γ		$\varphi = \bot$	*BFU* auf 4. und 5.

qed.

$NEG1_{\Gamma,\varphi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \varphi}{\Gamma \qquad \neg\neg\varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ		φ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\varphi$	φ	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	*VOR*
4.	Γ		$\neg\neg\varphi$	*WID1* auf 2. und 3.

qed.

$NEG2_{\Gamma,\varphi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \neg\neg\varphi}{\Gamma \qquad \varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\neg\varphi$	Praemissio
2.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	*VOR*
4.	Γ		φ	*WID2* auf 3. und 2.

qed.

$NEAN_{\Gamma,\varphi,v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \neg\exists v\varphi \\ \hline \Gamma & \forall v\neg\varphi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\exists v\varphi$	Praemissio
1.1	Γ		$\neg\neg\forall v\neg\varphi$	A-Umformung in 1.
2.	Γ		$\forall v\neg\varphi$	*NEG2* auf 1.1

qed.

$NAEN_{\Gamma,\varphi,v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \neg\forall v\varphi \\ \hline \Gamma & \exists v\neg\varphi \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\forall v\varphi$	Praemissio
2.	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$\neg\forall v\varphi$	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$\forall v\neg\neg\varphi$	*VOR*
4.	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$(\neg\neg\varphi)\frac{w}{v}$	*PART* auf 3.
4.1	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$\neg\neg(\varphi\frac{w}{v})$	S-Umformung in 4.
5.	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$\varphi\frac{w}{v}$	*NEG2* auf 4.1
6.	Γ	$\forall v\neg\neg\varphi$	$\forall v\varphi$	*GEN* auf 5.
7.	Γ		$\neg\forall v\neg\neg\varphi$	*WID1* auf 6. und 2.
7.1	Γ		$\exists v\neg\varphi$	A-Umformung in 7.

qed.

wobei $w := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(\Gamma\ \forall v\neg\neg\varphi\ \forall v\varphi)$

2.11 Lemma

Für alle $\varphi \in L$, $v \in \mathcal{V}$ gilt

(a) $\Phi \vdash \exists v\varphi$ *gdw.* $\Phi \vdash \varphi\frac{\eta_a}{v}$ *für mindestens ein $a \in U$*

(b) $\Phi \vdash \forall v\varphi$ *gdw.* $\Phi \vdash \varphi\frac{\eta_a}{v}$ *für alle $a \in U$*

Beweis:
(a) „$\Rightarrow$": Gelte $\Phi \vdash \exists v\varphi$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es ein $u \in \mathcal{V}$ mit $\Phi \vdash \varphi\frac{u}{v}$. Mit $\Phi \vdash \eta_{[u]} = u$ (Lemma 2.10 (ii)) folgt $\Phi \vdash \varphi\frac{\eta_{[u]}}{v}$ gemäß *SUB*.
„$\Leftarrow$" folgt unmittelbar mit *ES*.
(b) „$\Rightarrow$" folgt mit *PART*.
„$\Leftarrow$" mittels Kontraposition: Gelte $\Phi \nvdash \forall v\varphi$, d.h. $\Phi \vdash \neg\forall v\varphi$, da Φ negationsvollständig. Es folgt $\Phi \vdash \exists v\neg\varphi$ gemäß *NAEN*. Also gibt es mit (a) ein $a \in U$, sodass $\Phi \vdash \neg\varphi\frac{\eta_a}{v}$. Wegen der Konsistenz von Φ muss daher $\Phi \nvdash \varphi\frac{\eta_a}{v}$ für dieses a gelten (siehe Lemma 2.9). ■

NVF$_{\Gamma}$:

$$\frac{}{\Gamma \qquad \neg(\top = \bot)}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\top = \bot$	$\top$	*VER*
2.	Γ	$\top = \bot$	$\top = \bot$	*VOR*
3.	Γ	$\top = \bot$	$\bot$	*SUB4* auf 1. und 2.
4.	Γ	$\top = \bot$	$\neg\top$	*EFQ* auf 3.
5.	Γ		$\neg(\top = \bot)$	*WID1* auf 1. und 4.

qed.

Wir definieren nun weiter das Wahrheits-, Falschheits- und Unsinnsobjekt in naheliegender Weise durch

$$V := [\top], \quad F := [\bot] \quad \text{und} \quad N := [\$]\ .$$

Gemäß *NVF* gilt $\Phi \vdash \neg(\top = \bot)$, aufgrund der Konsistenz von Φ also $\Phi \nvdash \top = \bot$. Damit folgt $\top \not\sim \bot$, d.h. $V \neq F$. Wäre $N \in D$, so müsste nach Lemma 2.8 $\Phi \vdash \$ \in \mathbb{D}$ gelten. Dies widerspricht aber wegen der Konsistenz von Φ der Grundschlussregel *NONS*.

Für boolesche Ausdrücke $\varphi \in L$ gilt $[\varphi] \in \{V, F\}$. Ist nämlich $[\varphi] \neq V$, d.h. $\Phi \nvdash \varphi = \top$, so folgt $\Phi \nvdash \varphi$ mit *FRE*. Aus der Negationsvollständigkeit von Φ folgt dann $\Phi \vdash \neg\varphi$ und damit $\Phi \vdash \varphi = \bot$ gemäß *NEGF*, da φ boolesch. Also gilt $[\varphi] = [\bot] = F$.

IMP1$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \psi}{\Gamma \qquad \varphi \rightarrow \psi}$$

Demonstratio:

1.	Γ		ψ	Praemissio
2.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	ψ	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\varphi \wedge \neg\psi$	*VOR*
4.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg\psi$	*KON2* auf 3.
5.	Γ		$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	*WID1* auf 2. und 4.
5.1	Γ		$\varphi \rightarrow \psi$	A-Umformung in 5.

qed.

IMP2$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\frac{\Gamma \qquad \neg\varphi}{\Gamma \qquad \varphi \rightarrow \psi}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\varphi$	Praemissio
2.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg\varphi$	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\varphi \wedge \neg\psi$	*VOR*
4.	Γ	$\varphi \wedge \neg\psi$	φ	*KON1* auf 3.
5.	Γ		$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	*WID1* auf 4. und 2.
5.1	Γ		$\varphi \rightarrow \psi$	A-Umformung in 5.

qed.

$MP_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ	φ
Γ	$\varphi \to \psi$
Γ	ψ

Demonstratio:

1.	Γ		φ	Praemissio
2.	Γ		$\varphi \to \psi$	Praemissio
3.	Γ	$\neg\psi$	φ	*MON* auf 1.
4.	Γ	$\neg\psi$	$\neg\psi$	*VOR*
5.	Γ	$\neg\psi$	$\varphi \wedge \neg\psi$	*KON3* auf 3. und 4.
6.	Γ	$\neg\psi$	$\varphi \to \psi$	*MON* auf 2.
6.1	Γ	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	A-Umformung in 6.
7.	Γ		ψ	*WID2* auf 5. und 6.1

qed.

$AEQ1_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ	φ
Γ	ψ
Γ	$\varphi \leftrightarrow \psi$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	Praemissio
2.	Γ	ψ	Praemissio
3.	Γ	$\varphi \to \psi$	*IMP1* auf 2.
4.	Γ	$\psi \to \varphi$	*IMP1* auf 1.
5.	Γ	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	*KON3* auf 3. und 4.
5.1	Γ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	A-Umformung in 5.

qed.

$AEQ2_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ	$\neg\varphi$
Γ	$\neg\psi$
Γ	$\varphi \leftrightarrow \psi$

Demonstratio:

1.	Γ	$\neg\varphi$	Praemissio
2.	Γ	$\neg\psi$	Praemissio
3.	Γ	$\varphi \to \psi$	*IMP2* auf 1.
4.	Γ	$\psi \to \varphi$	*IMP2* auf 2.
5.	Γ	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	*KON3* auf 3. und 4.
5.1	Γ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	A-Umformung in 5.

qed.

AEQ2.1$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ		$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$
Γ		$\neg\psi$
Γ		φ

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	Praemissio
2.	Γ		$\neg\psi$	Praemissio
3.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	*VOR*
4.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	*MON* auf 2.
5.	Γ	$\neg\varphi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	*AQE2* auf 3. und 4.
6.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	*MON* auf 1.
7.	Γ		φ	*WID2* auf 5. und 6.

qed.

AEQ3$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ		$\varphi \leftrightarrow \psi$
Γ	φ	ψ

Demonstratio:

1.	Γ		$\varphi \leftrightarrow \psi$	Praemissio
1.1	Γ		$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	S-Umformung in 1.
2.	Γ		$\varphi \rightarrow \psi$	*KON1* auf 1.1
3.	Γ	φ	φ	*VOR*
4.	Γ	φ	$\varphi \rightarrow \psi$	*MON* auf 2.
5.	Γ	φ	ψ	*MP* auf 3. und 4.

qed.

AEQ4$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

Γ		$\varphi \leftrightarrow \psi$
Γ	ψ	φ

Demonstratio:

1.	Γ		$\varphi \leftrightarrow \psi$	Praemissio
1.1	Γ		$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	S-Umformung in 1.
2.	Γ		$\psi \rightarrow \varphi$	*KON2* auf 1.1
3.	Γ	ψ	ψ	*VOR*
4.	Γ	ψ	$\psi \rightarrow \varphi$	*MON* auf 2.
5.	Γ	ψ	φ	*MP* auf 3. und 4.

qed.

$EXT2_{\Gamma,\alpha,\beta,v,u,w}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \alpha = \{v; v \in \alpha\} \\ \Gamma & \beta = \{u; u \in \beta\} \\ \Gamma & \forall w(w \in \alpha \leftrightarrow w \in \beta) \\ \hline \Gamma & \alpha = \beta \end{array}$$

falls $v \notin \operatorname{frei} \alpha$, $u \notin \operatorname{frei} \beta$ und $w \notin \operatorname{frei}(\alpha\, \beta)$

Demonstratio:

1.	Γ		$\alpha = \{v; v \in \alpha\}$	Praemissio
2.	Γ		$\beta = \{u; u \in \beta\}$	Praemissio
3.	Γ		$\forall w(w \in \alpha \leftrightarrow w \in \beta)$	Praemissio
4.	Γ		$(w \in \alpha \leftrightarrow w \in \beta)\frac{x}{w}$	*PART* auf 3.
4.1	Γ		$x \in \alpha \leftrightarrow x \in \beta$	S-Umformung in 4.
4.2	Γ		$(x \in y \leftrightarrow x \in \beta)\frac{\alpha}{y}$	S-Umformung in 4.1
5.	Γ		$(x \in y \leftrightarrow x \in \beta)\frac{\{v; v \in \alpha\}}{y}$	*SUB2* auf 1. und 4.2
5.1	Γ		$x \in \{v; v \in \alpha\} \leftrightarrow x \in \beta$	S-Umformung in 5.
5.2	Γ		$(x \in \{v; v \in \alpha\} \leftrightarrow x \in y)\frac{\beta}{y}$	S-Umformung in 5.1
6.	Γ		$(x \in \{v; v \in \alpha\} \leftrightarrow x \in y)\frac{\{u; u \in \beta\}}{y}$	*SUB2* auf 2. und 5.2
6.1	Γ		$x \in \{v; v \in \alpha\} \leftrightarrow x \in \{u; u \in \beta\}$	S-Umformung in 6.
7.	Γ	$x \in \{v; v \in \alpha\}$	$x \in \{u; u \in \beta\}$	*AEQ3* auf 6.1
8.	Γ	$x \in \{u; u \in \beta\}$	$x \in \{v; v \in \alpha\}$	*AEQ4* auf 6.1
9.	Γ		$\{v; v \in \alpha\} = \{u; u \in \beta\}$	*EXT* auf 7. und 8.
10.	Γ		$\alpha = \{u; u \in \beta\}$	*TRAN* auf 1. und 9.
11.	Γ		$\{u; u \in \beta\} = \beta$	*SYM* auf 2.
12.	Γ		$\alpha = \beta$	*TRAN* auf 10. und 11.

qed.

wobei $x := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(\Gamma\ \{v; v \in \alpha\}\ \{u; u \in \beta\})$
$y := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(x\ \{v; v \in \alpha\}\ \beta)$

Den Abstraktor definieren wir durch

$$A : \mathcal{P}(D) \to U,\ X \mapsto \begin{cases} [\alpha], & \text{falls } X = \{b \in D\,;\ \Phi \vdash \eta_b \in \alpha\} \quad \begin{array}{l}\text{für ein } \alpha \in L \text{ mit } \Phi \vdash \alpha = \{v; v \in \alpha\}, \\ \text{wobei } v \in \mathcal{V}, v \notin \operatorname{frei} \alpha\end{array} \\ N, & \text{sonst} \end{cases}$$

Im ersten Fall gilt offenbar $A^{\ulcorner}X_{\lrcorner} = [\alpha] = [\{v; v \in \alpha\}] \neq N$ gemäß *KLS3* (da Φ konsistent).

Wohldefiniertheit von A:

Seien $\alpha, \beta \in L$, $u, v \in \mathcal{V}$, $v \notin \operatorname{frei} \alpha$, $u \notin \operatorname{frei} \beta$ mit $\Phi \vdash \alpha = \{v; v \in \alpha\}$, $\Phi \vdash \beta = \{u; u \in \beta\}$ und $\Phi \vdash \eta_b \in \alpha$ gdw. $\Phi \vdash \eta_b \in \beta$ für alle $b \in D$. Ist $b \in U$ mit $\Phi \vdash \eta_b \in \alpha$, so folgt $\Phi \vdash \eta_b \in \mathbb{D}$ gemäß

KLS2 und damit $b = [\eta_b] \in D$ nach Definition von D. Also gilt $\Phi \nvdash \eta_b \in \alpha$ für alle $b \in U \setminus D$. Analog folgt $\Phi \nvdash \eta_b \in \beta$ für alle $b \in U \setminus D$. Folglich gilt sogar $\Phi \vdash \eta_b \in \alpha$ gdw. $\Phi \vdash \eta_b \in \beta$ für alle $b \in U$. Mit *AEQ1*, *AEQ2* und der Negationsvollständigkeit von Φ erhalten wir somit $\Phi \vdash \eta_b \in \alpha \leftrightarrow \eta_b \in \beta$ bzw. $\Phi \vdash (w \in \alpha \leftrightarrow w \in \beta)\frac{\eta_b}{w}$ mit $w \in \mathcal{V}$, $w \notin \text{frei}(\alpha\,\beta)$ für alle $b \in U$. Gemäß Lemma 2.11 (b) ist also

$$\Phi \vdash \forall w(w \in \alpha \leftrightarrow w \in \beta)$$

Es folgt daher $\Phi \vdash \alpha = \beta$, d.h. $[\alpha] = [\beta]$ mit *EXT2*.

Injektivität von $\{\langle x, y\rangle \in A_{\mathfrak{A}}\,;\ y \neq N_{\mathfrak{A}}\}$:
Seien $X_1, X_2 \subseteq D$ mit $A^\ulcorner X_1{}_\lrcorner = A^\ulcorner X_2{}_\lrcorner \neq N$. Nach Definition von A gibt es $\alpha, \beta \in L$ mit $X_1 = \{b \in D\,;\ \Phi \vdash \eta_b \in \alpha\}$, $X_2 = \{b \in D\,;\ \Phi \vdash \eta_b \in \beta\}$ und $[\alpha] = A^\ulcorner X_1{}_\lrcorner = A^\ulcorner X_2{}_\lrcorner = [\beta]$, d.h. $\Phi \vdash \alpha = \beta$. Mit *SUB* und *SUB2* folgt $\Phi \vdash \eta_b \in \alpha$ gdw. $\Phi \vdash \eta_b \in \beta$ für alle $b \in D$, d.h. $X_1 = X_2$.

Damit ist $\mathfrak{A}$ eine Prä-Struktur, die mit $h : \mathcal{V} \to U,\ v \mapsto [v]$ eine Prä-Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{A}, h\rangle$ bildet. Wir wollen nun zeigen dass $\mathfrak{I}$ sogar eine Interpretation ist und dass $\mathfrak{I} \Vdash \Phi$.

KP1$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\frac{\Gamma \quad \varphi \qquad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \qquad \neg\varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ	φ	ψ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\psi \quad \varphi$	ψ	*MON* auf 1.
3.	Γ	$\neg\psi$	$\neg\psi$	*VOR*
4.	Γ	$\neg\psi \quad \varphi$	$\neg\psi$	*MON* auf 3.
5.	Γ	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	*WID1* auf 2. und 4.

qed.

KP2$_{\Gamma,\varphi,\psi}$:

$$\frac{\Gamma \quad \neg\varphi \qquad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \qquad \varphi}$$

Demonstratio:

1.	Γ	$\neg\varphi$	ψ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\psi$	$\neg\neg\varphi$	*KP1* auf 1.
3.	Γ	$\neg\psi$	φ	*NEG2* auf 2.

qed.

EA$_{\Gamma,\varphi,\psi,u,v}$:

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{u}{v} \qquad \psi}{\Gamma \quad \exists v\varphi \qquad \psi}$$

falls $u \notin \text{frei}(\Gamma\ \exists v\varphi\ \psi)$

Demonstratio:

1.	Γ	$\varphi\frac{u}{v}$	ψ	Praemissio
2.	Γ	$\neg\psi$	$\neg\varphi\frac{u}{v}$	*KP1* auf 1.
2.1	Γ	$\neg\psi$	$(\neg\varphi)\frac{u}{v}$	S-Umformung auf 2.
3.	Γ	$\neg\psi$	$\forall v\neg\varphi$	*GEN* auf 2.1
4.	Γ	$\neg\forall v\neg\varphi$	ψ	*KP2* auf 3.
5.	Γ	$\exists v\varphi$	ψ	A-Umformung in 4.

qed.

E1K$_{\Gamma,\varphi,\gamma,v}$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \exists^{=1} v\varphi \\ \Gamma & \varphi^{\gamma}_{v} \\ \hline \Gamma & \iota v\varphi = \gamma \end{array}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\exists^{=1} v\varphi$	Praemissio
2.	Γ		φ^{γ}_{v}	Praemissio
1.1	Γ		$\exists z \forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)$	A-Umformung in 1.
3.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	*VOR*
4.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$(\varphi \leftrightarrow v = w)^{\gamma}_{v}$	*PART* auf 3.
4.1	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\varphi^{\gamma}_{v} \leftrightarrow \gamma = w$	S-Umformung in 4.
4.2	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$(\varphi^{\gamma}_{v} \rightarrow \gamma = w) \wedge (\gamma = w \rightarrow \varphi^{\gamma}_{v})$	A-Umformung in 4.1
5.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\varphi^{\gamma}_{v} \rightarrow \gamma = w$	*KON1* auf 4.2
6.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	φ^{γ}_{v}	*MON* auf 2.
7.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\gamma = w$	*MP* auf 6. und 5.
8.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$(\varphi \leftrightarrow v = w)^{u}_{v}$	*PART* auf 3.
8.1	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\varphi^{u}_{v} \leftrightarrow u = w$	S-Umformung in 8.
8.2	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$(\varphi^{u}_{v} \rightarrow u = w) \wedge (u = w \rightarrow \varphi^{u}_{v})$	A-Umformung in 8.1
9.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\varphi^{u}_{v} \rightarrow u = w$	*KON1* auf 8.2
10.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	φ^{u}_{v}	*VOR*
11.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	$\varphi^{u}_{v} \rightarrow u = w$	*MON* auf 9.
12.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	$u = w$	*MP* auf 10. und 11.
13.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	$\gamma = w$	*MON* auf 7.
14.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	$w = \gamma$	*SYM* auf 13.
15.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$ φ^{u}_{v}	$u = \gamma$	*TRAN* auf 12. und 14.
16.	Γ	$\forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)$	$\iota v\varphi = \gamma$	*KZG1* auf 6. und 15.
16.1	Γ	$(\forall v(\varphi \leftrightarrow v = z))^{w}_{z}$	$\iota v\varphi = \gamma$	S-Umformung in 16.
17.	Γ	$\exists z \forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)$	$\iota v\varphi = \gamma$	*EA* auf 16.1
18.	Γ		$\iota v\varphi = \gamma$	*KS* auf 1.1 und 17.

qed.

wobei $z := \mathfrak{v}_0(\varphi\ v)$
$w := \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \Gamma\ \exists z \forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)\ (\iota v\varphi = \gamma))$
$u := \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(\Gamma\ \forall v(\varphi \leftrightarrow v = w)\ \iota v\varphi\ \gamma)$

NE1K$_{\Gamma,\varphi,v}$:

$$\frac{\Gamma \quad \neg\exists^{=1} v\varphi}{\Gamma \quad \iota v\varphi = \$}$$

Demonstratio:

1.	Γ		$\neg\exists^{=1} v\varphi$	Praemissio
1.1	Γ		$\neg\exists z \forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)$	A-Umformung in 1.
2.	Γ	$\neg\exists v\varphi$	$\neg\exists v\varphi$	*VOR*
2.1	Γ	$\neg\exists v\varphi$	$\neg\neg\forall v \neg\varphi$	A-Umformung in 2.
3.	Γ	$\neg\exists v\varphi$	$\forall v \neg\varphi$	*NEG2* auf 2.1
4.	Γ	$\neg\exists v\varphi$	$\iota v\varphi = \$$	*KZG2* auf 3.
5.	Γ	φ^u_v	φ^u_v	*VOR*
6.	Γ	φ^u_v	$\neg\exists z \forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)$	*MON* auf 1.1
7.	Γ	φ^u_v	$\forall z \neg\forall v(\varphi \leftrightarrow v = z)$	*NEAN* auf 6.
8.	Γ	φ^u_v	$(\neg\forall v(\varphi \leftrightarrow v = z))^u_z$	*PART* auf 7.
8.1	Γ	φ^u_v	$\neg\forall v(\varphi \leftrightarrow v = u)$	S-Umformung in 8.
9.	Γ	φ^u_v	$\exists v \neg(\varphi \leftrightarrow v = u)$	*NAEN* auf 8.1
10.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	$\neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	*VOR*
11.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u) \quad w = u$	$w = u$	*VOR*
12.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u) \quad w = u$	φ^u_v	*MON* auf 5.
13.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u) \quad w = u$	φ^w_v	*SUB* auf 12. und 11.
14.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u) \quad w = u$	$\varphi^w_v \leftrightarrow w = u$	*AEQ1* auf 13. und 11.
15.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u) \quad w = u$	$\neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	*MON* auf 10.
16.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	$\neg(w = u)$	*WID1* auf 14. und 15.
17.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	φ^w_v	*AEQ2.1* auf 10. und 16.
18.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	φ^u_v	*MON* auf 5.
19.	Γ	$\varphi^u_v \quad \neg(\varphi^w_v \leftrightarrow w = u)$	$\iota v\varphi = \$$	*KZG3* auf 17., 18. und 16.
19.1	Γ	$\varphi^u_v \quad (\neg(\varphi \leftrightarrow v = u))^w_v$	$\iota v\varphi = \$$	S-Umformung in 19.
20.	Γ	$\varphi^u_v \quad \exists v \neg(\varphi \leftrightarrow v = u)$	$\iota v\varphi = \$$	*EA* auf 19.1
21.	Γ	φ^u_v	$\iota v\varphi = \$$	*KS* auf 9. und 20.
22.	Γ	$\exists v\varphi$	$\iota v\varphi = \$$	*EA* auf 21.
23.	Γ		$\iota v\varphi = \$$	*FU* auf 22. und 4.

qed.

wobei $z := \mathfrak{v}_0(\varphi\ v)$
$u := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(v\ \Gamma\ \exists v\varphi\ (\iota v\varphi = \$))$
$w := \mathfrak{v}_0^{\text{nfr}}(\Gamma\ \varphi^u_v\ \exists v \neg(\varphi \leftrightarrow v = u)\ (\iota v\varphi = \$))$

$KLKL_{\Gamma,\varphi,v,u}$:

$$\frac{}{\Gamma \quad \{v;\varphi\} = \{u; u \in \{v;\varphi\}\}}$$

falls $u \notin$ frei$\{v;\varphi\}$

Demonstratio:

1.	Γ	$v \in \{v;\varphi\}$	$v \in \{v;\varphi\}$	*VOR*
1.1	Γ	$v \in \{v;\varphi\}$	$(u \in \{v;\varphi\})^{v}_{u}$	S-Umformung in 1.
2.	Γ	$v \in \{v;\varphi\}$	$v \in \mathbb{D}$	*KLS2* auf 1.
3.	Γ	$v \in \{v;\varphi\}$	$v \in \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	*ABS1* auf 2. und 1.1
4.	Γ	$v \in \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	$v \in \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	*VOR*
5.	Γ	$v \in \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	$(u \in \{v;\varphi\})^{v}_{u}$	*ABS2* auf 4.
5.1	Γ	$v \in \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	$v \in \{v;\varphi\}$	S-Umformung in 5.
6.	Γ		$\{v;\varphi\} = \{u; u \in \{v;\varphi\}\}$	*EXT* auf 3. und 5.1

qed.

2.12 Lemma

(a) Für alle $\varphi \in L$ gilt

$$\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = [\varphi]$$

(b) $\mathfrak{I}\ulcorner\{v;\alpha\}\lrcorner \neq N$ für alle $\alpha \in L$, $v \in \mathcal{V}$

Beweis:

(a) Es bezeichne $A(\varphi)$ die Aussage $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = [\varphi]$. Man beachte im Folgenden, dass wegen *FRE* und *FRE2* offenbar

$$\Phi \vdash \psi \qquad \text{gdw.} \qquad [\psi] = [\top] = V \qquad \text{für alle } \psi \in L.$$

Wir führen nun einen Beweis per Induktion über den Rang von φ.

IA: Ist $\operatorname{rg}\varphi = 0$, d.h. $\varphi \in \mathcal{V}$, so folgt unmittelbar $\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = h\ulcorner\varphi\lrcorner = [\varphi]$.

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L$ mit $\operatorname{rg}\varphi \leq n$.

IS: Wir führen zuerst ein paar Hilfsbetrachtungen. Hierzu sei

$$R := \{\textbf{\textit{Gleich}}, \textbf{\textit{Und}}\} \cup \{\textbf{\textit{Alle}}_u \,;\ u \in \mathcal{V}\} \ .$$

Damit definieren wir den Ausdruckskalkül $\mathcal{K}' := \mathcal{AK}_{L^{\leq n},R}$ und die zugehörige Ausdrucksmenge $L' := L_{L^{\leq n},R}$. Die Menge der atomaren Ausdrücke von L' ist also gerade $L^{\leq n}$. Weiter gilt mit $v \in \mathcal{V}$ und $\varphi, \psi \in L'$ auch $(\varphi = \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\forall v\varphi \in L'$.

Zuerst zeigen wir:

$$(*) \qquad \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'} \varphi^{w}_{v} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'} \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L', v, w \in \mathcal{V}$$

Man beachte, dass $\operatorname{rg}\varphi^{w}_{v} = \operatorname{rg}\varphi$ für alle $\varphi \in L', v, w \in \mathcal{V}$ bereits in Lemma 2.4 gezeigt wurde. Insbesondere gilt damit

$$\varphi \in L^{\leq n} \quad \text{gdw.} \quad \varphi^{w}_{v} \in L^{\leq n} \qquad \text{für alle } \varphi \in L', v, w \in \mathcal{V}$$

Beweis von $(*)$:

SI: Ist $\varphi \in L^{\leq n}$ und damit auch $\varphi^{w}_{v} \in L^{\leq n}$, so gilt $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi^{w}_{v} = 0 = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi$.

SII: Sei $\varphi \in L' \setminus L^{\leq n}$ und gelte $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\psi^{w}_{v} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\psi$ für alle $v, w \in \mathcal{V}$ und alle $\psi \in L'$ mit $\psi \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$. Weiter seien nun $v, w \in \mathcal{V}$ beliebig.

Fall $\varphi = \langle i, \langle\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle\rangle$ mit $i \in \{1, 2\}$, d.h. $\varphi = (\alpha = \beta)$ oder $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$:
Wegen Lemma 1.10 (ii) sind $\alpha, \beta \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$ und weiter

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi^{w}_{v} &= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha^{w}_{v}, \beta^{w}_{v}\rangle\rangle && \text{Lemma 2.4} \\
&= \max\{\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha^{w}_{v}, \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\beta^{w}_{v}\} + 1 && \text{Lemma 1.10 (ii) (beachte } \varphi^{w}_{v} \notin L^{\leq n}) \\
&= \max\{\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha, \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\beta\} + 1 && \text{da } \alpha, \beta \prec_{\mathcal{K}'} \varphi \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle\rangle && \text{Lemma 1.10 (ii) (beachte } \varphi \notin L^{\leq n}) \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi
\end{aligned}$$

Fall $\varphi = \langle 4, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\rangle$, d.h. $\varphi = \forall u\alpha$:
Ist $w = v$ oder $v \notin \operatorname{frei}\varphi$, so gilt $\varphi^{w}_{v} = \varphi$ und es bleibt nichts zu zeigen. Im anderen Falle können wir $\varphi^{w}_{v} = \langle 4, \langle\tilde{u}\rangle, \langle(\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{w}_{v}\rangle\rangle$ für ein $\tilde{u} \in \mathcal{V}$ annehmen (siehe Lemma 2.4). Wegen Lemma 1.10 (ii) ist $\alpha \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$ und damit $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha^{\tilde{u}}_{u} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha < \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi$, d.h. auch $\alpha^{\tilde{u}}_{u} \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$. Folglich gilt $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}(\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{w}_{v} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha^{\tilde{u}}_{u} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi^{w}_{v} &= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\langle 4, \langle\tilde{u}\rangle, \langle(\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{w}_{v}\rangle\rangle \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}(\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{w}_{v} + 1 && \text{Lemma 1.10 (ii) (beachte } \varphi^{w}_{v} \notin L^{\leq n}) \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\alpha + 1 \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\langle 4, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\rangle && \text{Lemma 1.10 (ii) (beachte } \varphi \notin L^{\leq n}) \\
&= \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi
\end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt also $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi^{w}_{v} = \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi$. Dies schließt den Beweis von $(*)$.

Weiter zeigen wir ebenfalls per struktureller Induktion, dass $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L'$ gilt.

$(**)$ Insbesondere gilt dann $A(\varphi)$ für alle Ausdrücke φ der Gestalt $(\alpha = \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $\forall v\alpha$ und $\exists^{=1} v\alpha$, wenn $v \in \mathcal{V}$ und $\alpha, \beta \in L^{\leq n}$.[33]

SI: Für $\varphi \in L^{\leq n}$ folgt $A(\varphi)$ mit **IV**.

SII: Sei nun $\varphi \in L' \setminus L^{\leq n}$ und es gelte $A(\psi)$ für alle $\psi \in L'$ mit $\psi \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$, d.h. mit $\operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\psi < \operatorname{rg}_{\mathcal{K}'}\varphi$.

[33] Im Falle von $\exists^{=1} v\alpha$ vergegenwärtige man sich, dass $\exists^{=1} v\alpha$ eine Abkürzung ist für einen Ausdruck, der ausgehend von α nur mit Hilfe von Variablen und den Operatoren $=, \wedge, \forall$ aufgebaut wurde.

Fall $\varphi = (\alpha = \beta)$:

Nach Lemma 1.10 (ii) sind $\alpha, \beta \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\ulcorner \alpha = \beta \lrcorner &= \begin{cases} V, & \text{falls } \mathfrak{I}\ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \beta \lrcorner \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha] = [\beta] \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \alpha = \beta \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha = \beta] = V \\ F, & \text{falls } [\alpha = \beta] = F \end{cases} \\
&= [\alpha = \beta]
\end{aligned}$$

Fall $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$:

Auch hier gilt $\alpha, \beta \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\ulcorner \alpha \wedge \beta \lrcorner &= \begin{cases} V, & \text{falls } \mathfrak{I}\ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \beta \lrcorner = V \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha] = [\beta] = V \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \alpha \text{ und } \Phi \vdash \beta \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \alpha \wedge \beta \\ F, & \text{sonst} \end{cases} && \text{mit } \textit{KON1}, \textit{KON2} \text{ und } \textit{KON3} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha \wedge \beta] = V \\ F, & \text{falls } [\alpha \wedge \beta] = F \end{cases} \\
&= [\alpha \wedge \beta]
\end{aligned}$$

Fall $\varphi = \forall v \alpha$:

Mit $\alpha \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$ gilt wegen $(*)$ auch $\alpha_v^{\eta_b} \prec_{\mathcal{K}'} \varphi$ für alle $b \in U$. Da $\eta_b \in \mathcal{V} \subseteq L^{\leq n}$ folgt mit **SI**

$$\mathfrak{I}_v^b \ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}_v^{[\eta_b]} \ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}_v^{\mathfrak{I}\ulcorner \eta_b \lrcorner} \ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \alpha_v^{\eta_b} \lrcorner = [\alpha_v^{\eta_b}] \qquad \text{für alle } b \in U.$$

Für alle $b \in U$ ist somit

$$\mathfrak{I}_v^b \ulcorner \alpha \lrcorner = V \quad \text{gdw.} \quad [\alpha_v^{\eta_b}] = V \quad \text{gdw.} \quad \Phi \vdash \alpha_v^{\eta_b} \ .$$

Folglich gilt mit Lemma 2.11 (b)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}\ulcorner \forall v\alpha \lrcorner &= \begin{cases} V, & \text{falls } \mathfrak{I}^{\,b}_{v}\ulcorner \alpha \lrcorner = V \text{ für alle } b \in U \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \alpha^{\eta_b}_{v} \text{ für alle } b \in U \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \forall v\alpha \\ F, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} V, & \text{falls } [\forall v\alpha] = V \\ F, & \text{falls } [\forall v\alpha] = F \end{cases} \\
&= [\forall v\alpha]
\end{aligned}
$$

Damit ist $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L'$ gezeigt. Kommen wir nun zu unserem Hauptbeweis zurück. Sei dazu $\varphi \in L$ mit $\operatorname{rg}\varphi = n+1$.

Fall $\varphi = (\alpha = \beta),\ (\alpha \wedge \beta),\ \forall v\alpha$:
Da in diesen Fällen $\alpha, \beta \in L^{\leq n}$, folgt hier $A(\varphi)$ unmittelbar mit $(**)$.

Fall $\varphi = (\alpha \in \beta)$:
Es ist

$$
\mathfrak{I}\ulcorner \alpha \in \beta \lrcorner = \begin{cases} V, & \text{falls } \mathfrak{I}\ulcorner \alpha \lrcorner \in_{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}\ulcorner \beta \lrcorner \\ F, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha] \in_{\mathfrak{I}} [\beta] \\ F, & \text{sonst} \end{cases}
$$

Mit *SUB*, *SUB2*, *KLS1*, *KLS2*, *REF* und Lemma 2.10 (ii) gilt[34]

$$
\begin{aligned}
[\alpha] \in_{\mathfrak{I}} [\beta] \quad &\text{gdw.} \quad [\beta] \in \operatorname{im} A \setminus N \text{ und } [\alpha] \in A_{\llcorner}[\beta]^{\urcorner} \\
&\text{gdw.} \quad \text{es gibt } \psi \in L \text{ und } v \in \mathcal{V} \setminus \operatorname{frei}\psi \text{ mit } \Phi \vdash \psi = \{v; v \in \psi\} \\
&\qquad\quad [\beta] = [\psi] \text{ und } [\alpha] \in \{b \in D;\ \Phi \vdash \eta_b \in \psi\} \\
&\text{gdw.} \quad \text{es gibt } \psi \in L \text{ und } v \in \mathcal{V} \setminus \operatorname{frei}\psi \text{ mit } \Phi \vdash \psi = \{v; v \in \psi\} \\
&\qquad\quad \Phi \vdash \beta = \psi,\ [\alpha] \in D \text{ und } \Phi \vdash \eta_{[\alpha]} \in \psi \\
&\text{gdw.} \quad \text{es gibt } \psi \in L \text{ und } v \in \mathcal{V} \setminus \operatorname{frei}\psi \text{ mit } \Phi \vdash \psi = \{v; v \in \psi\} \\
&\qquad\quad \Phi \vdash \beta = \psi \text{ und } \Phi \vdash \alpha \in \psi \\
&\text{gdw.} \quad \Phi \vdash \alpha \in \beta
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$
\mathfrak{I}\ulcorner \alpha \in \beta \lrcorner = \begin{cases} V, & \text{falls } \Phi \vdash \alpha \in \beta \\ F, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} V, & \text{falls } [\alpha \in \beta] = V \\ F, & \text{falls } [\alpha \in \beta] = F \end{cases} = [\alpha \in \beta]
$$

In beiden noch fehlenden Fällen $\varphi = \iota v\alpha, \{v; \alpha\}$ gilt wegen $\alpha \in L^{\leq n}$ mit **IV**

$$
\mathfrak{I}^{\,b}_{v}\ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}^{[\eta_b]}_{v}\ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner \eta_b \lrcorner}_{v}\ulcorner \alpha \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \alpha^{\eta_b}_{v} \lrcorner = [\alpha^{\eta_b}_{v}] \qquad \text{für alle } b \in U.
$$

[34] Für die Rückrichtung der letzten Äquivalenz setze man $\psi = \beta$.

Fall $\varphi = \iota v\alpha$:

(a) Sei zuerst $\Phi \vdash \exists^{=1} v\alpha$ angenommen. Mit (**) gilt dann $\mathfrak{I}^\ulcorner \exists^{=1} v\alpha^\lrcorner = [\exists^{=1} v\alpha] = V$. Also gibt es nach Lemma 2.6 (i) ein $c \in U$ mit $\{c\} = \left\{b \in U\,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v}{}^\ulcorner\alpha^\lrcorner = V\right\} = \left\{b \in U\,;\, [\alpha^{\eta_b}_v] = V\right\} = \left\{b \in U\,;\, \Phi \vdash \alpha^{\eta_b}_v\right\}$ und $\mathfrak{I}^\ulcorner \iota v\alpha^\lrcorner = c$. Wegen $\Phi \vdash \alpha^{\eta_c}_v$ gilt weiter $\Phi \vdash \iota v\alpha = \eta_c$ gemäß *E1K*. Folglich ist

$$\mathfrak{I}^\ulcorner \iota v\alpha^\lrcorner = c = [\eta_c] = [\iota v\alpha]\ .$$

(b) Nun gelte $\Phi \nvdash \exists^{=1} v\alpha$, d.h. $\Phi \vdash \neg\exists^{=1} v\alpha$. Mit *NE1K* folgt $\Phi \vdash \iota v\alpha = \$$. Weiter gilt auch $\Phi \vdash \exists^{=1} v\alpha = \bot$ gemäß *NEGF*. Wieder mit (**) ist somit $\mathfrak{I}^\ulcorner \exists^{=1} v\alpha^\lrcorner = [\exists^{=1} v\alpha] = F$, d.h. gemäß Lemma 2.6 (i) ist $\left|\left\{b \in U\,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v}{}^\ulcorner\alpha^\lrcorner = V\right\}\right| \neq 1$. Folglich ist auch hier

$$\mathfrak{I}^\ulcorner \iota v\alpha^\lrcorner = N = [\$] = [\iota v\alpha]\ .$$

Fall $\varphi = \{v; \alpha\}$:

Für alle $b \in D$ gilt $\Phi \vdash \eta_b \in \mathbb{D}$ (Lemma 2.10 (iii)) und somit

$$\mathfrak{I}^{\,b}_{v}{}^\ulcorner\alpha^\lrcorner = V \quad \text{gdw.} \quad [\alpha^{\eta_b}_v] = V \quad \text{gdw.} \quad \Phi \vdash \alpha^{\eta_b}_v \quad \text{gdw.} \quad \Phi \vdash \eta_b \in \{v; \alpha\}$$

gemäß *ABS1* und *ABS2*. Unter Beachtung von *KLKL* folgt somit

$$\mathfrak{I}^\ulcorner \{v;\alpha\}^\lrcorner = A^\ulcorner \left\{b \in U\,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v}{}^\ulcorner\alpha^\lrcorner = V\right\}^\lrcorner = A^\ulcorner \{b \in U\,;\, \Phi \vdash \eta_b \in \{v;\alpha\}\}^\lrcorner = [\{v;\alpha\}].$$

Hiermit ist $\mathfrak{I}^\ulcorner \varphi^\lrcorner = [\varphi]$ für alle $\varphi \in L$ gezeigt.

(b) Da nach (a) $\mathfrak{I}^\ulcorner \{v;\alpha\}^\lrcorner = [\{v;\alpha\}]$, folgt $\mathfrak{I}^\ulcorner \{v;\alpha\}^\lrcorner \neq N$ wegen der Konsistenz von Φ unmittelbar aus *KLS3*.

■

Zeigen wir nun noch, dass $\mathfrak{I}$ sogar eine Interpretation ist. Seien dazu $\tilde{h} \in \mathrm{Bel}_{\mathfrak{A}}$ beliebig und $\tilde{\mathfrak{I}} := \langle \mathfrak{A}, \tilde{h}\rangle$ die zugehörige Prä-Interpretation. Es zeigt sich nun, dass sich jedem $\varphi \in L$ ein Ausdruck $\tilde{\varphi} \in L$ zuordnen lässt, sodass $\tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner \varphi^\lrcorner = \mathfrak{I}^\ulcorner \tilde{\varphi}^\lrcorner$.

Ist $u \in \mathcal{V}$, so sei $\tilde{u} := \eta_{\tilde{h}^\ulcorner u^\lrcorner}$. Mit dem gerade gezeigten Lemma 2.12 (und mit Lemma 2.10) gilt

$$(*) \quad \mathfrak{I}^\ulcorner \tilde{u}^\lrcorner = \mathfrak{I}^\ulcorner \eta_{\tilde{h}^\ulcorner u^\lrcorner}{}^\lrcorner = [\eta_{\tilde{h}^\ulcorner u^\lrcorner}] = \tilde{h}^\ulcorner u^\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner u^\lrcorner\ .$$

Sei nun $\varphi \in L$. Sind $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{V}$ genau die freien Variablen von φ[35], so setzen wir

$$w_i := \mathfrak{v}^{\mathrm{nfr}}_i(\varphi\ u_1\ \ldots\ u_n\ \tilde{u}_1\ \ldots\ \tilde{u}_n) \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und damit

$$\tilde{\varphi} := \left(\ldots\left(\left(\ldots\varphi^{w_1}_{u_1}\ldots\right)^{w_n}_{u_n}\right)^{\tilde{u}_1}_{w_1}\ldots\right)^{\tilde{u}_n}_{w_n}\ .$$

[35] D.h. $\mathrm{frei}\,\varphi = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $u_1, \ldots, u_n$ paarweise verschieden.

Mit mehrmaligem Anwenden von Substitutions- und Koinzidenzlemma folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\ulcorner\tilde\varphi\lrcorner &= \mathfrak{I}\ulcorner\big(\dots\big(\big(\dots\varphi\tfrac{w_1}{u_1}\dots\big)\tfrac{w_n}{u_n}\big)\tfrac{\tilde u_1}{w_1}\dots\big)\tfrac{\tilde u_n}{w_n}\lrcorner \\
&= \big(\dots\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_n\lrcorner}{w_n}\dots\big)\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_1\lrcorner}{w_1}\ulcorner\big(\dots\varphi\tfrac{w_1}{u_1}\dots\big)\tfrac{w_n}{u_n}\lrcorner && \text{beachte } w_i\notin\operatorname{frei}(\tilde u_1\ \dots\ \tilde u_n)\\
&= \big(\dots\big(\big(\dots\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_n\lrcorner}{w_n}\dots\big)\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_1\lrcorner}{w_1}\big)\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_n\lrcorner}{u_n}\dots\big)\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_1\lrcorner}{u_1}\ulcorner\varphi\lrcorner && \text{beachte } w_i\notin\{u_1\ \dots\ u_n\}\\
&= \big(\dots\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_n\lrcorner}{u_n}\dots\big)\tfrac{\mathfrak{I}\ulcorner\tilde u_1\lrcorner}{u_1}\ulcorner\varphi\lrcorner && \text{beachte } w_i\notin\operatorname{frei}\varphi\\
&= \big(\dots\mathfrak{I}\tfrac{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner u_n\lrcorner}{u_n}\dots\big)\tfrac{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner u_1\lrcorner}{u_1}\ulcorner\varphi\lrcorner && \text{mit } (*)\\
&= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi\lrcorner && \text{beachte } \operatorname{frei}\varphi=\{u_1,\dots,u_n\}
\end{aligned}$$

Ist $\varphi = \{v;\alpha\}$ mit $v\in\mathcal{V}$, $\alpha\in L$, so folgt aus der Definition der Substitution, dass $v'\in\mathcal{V}$, $\alpha'\in L$ existieren, sodass $\tilde\varphi=\{v';\alpha'\}$. Wegen Lemma 2.12 (b) ist somit

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\{v;\alpha\}\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\{v';\alpha'\}\lrcorner \neq N\ ,$$

Es ist also gezeigt, dass $\mathfrak{A}$ eine Struktur und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation ist.

Für ein beliebiges $\varphi\in\Phi$ gilt natürlich $\Phi\vdash\varphi=\top$ mit *VOR* und *FRE*. Gemäß Lemma 2.12 (a) ist damit

$$\mathfrak{I}\ulcorner\varphi\lrcorner = [\varphi] = [\top] = V\ .$$

Es ist also endlich $\mathfrak{I}\Vdash\Phi$ gezeigt und damit der folgende Satz bewiesen.

2.13 Satz

Jede Henkin-Menge ist erfüllbar.

Wir wollen nun diesen Satz auf beliebige konsistente Axiomensysteme erweitern. Hierzu ist jedoch ein weiterer Zwischenschritt nötig.

2.14 Lemma

Sei $\Phi_0\subseteq\Phi_1\subseteq\dots$ eine aufsteigende unendliche Kette von Axiomensystemen und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\Phi_i$ inkonsistent. Dann gibt es ein $i\in\mathbb{N}$, sodass bereits Φ_i inkonsistent ist.

Beweis: Dies folgt leicht, da sich die Ableitungsbeziehung auf *endliche* Sequenzen bezieht. ■

2.15 Satz

Ist $\Phi\subseteq L$ konsistent und $\mathcal{V}\setminus\operatorname{frei}\Phi$ unendlich, so gibt es eine Henkin-Menge $\Theta\subseteq L$ mit $\Phi\subseteq\Theta$. Insbesondere ist Φ somit erfüllbar (gemäß Satz 2.13).

Beweis:
Schritt 1: Beispiele hinzufügen
Mit $\mathcal{V}$ und L ist auch $\mathcal{V}\sqcap L$ abzählbar. Sei nun $\langle\alpha_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ eine injektive Abzählung von $\mathcal{V}\sqcap L$.[36] Wir schreiben im Folgenden x_i für $\operatorname{pr}_0\alpha_i$ und φ_i für $\operatorname{pr}_1\alpha_i$, d.h. es ist $\alpha_i=\langle x_i,\varphi_i\rangle$ für alle $i\in\mathbb{N}$. Damit definieren wir induktiv für $n\in\mathbb{N}$

$$\psi_n := \exists x_n\varphi_n \to \varphi_n\tfrac{y_n}{x_n}\ ,$$

wobei y_n die kleinste Variable aus $\mathcal{V}\setminus\operatorname{frei}\Phi$ sei mit

$$y_n\notin\operatorname{frei}\{\psi_i\,;\ i\in n\}\qquad\text{und}\qquad y_n\notin\operatorname{frei}\forall x_n\neg\varphi_n\ .$$

[36] D.h. es ist $\{\alpha_i\,;\ i\in\mathbb{N}\}=\mathcal{V}\sqcap L$.

Da nach Voraussetzung $\mathcal{V} \setminus \operatorname{frei} \Phi$ unendlich, ist y_n wohldefiniert.[37]

Setzen wir $\Phi_n := \Phi \cup \{\psi_i\,;\ i \in n\}$, so gilt offenbar

$$(*) \quad y_n \notin \operatorname{frei}(\Phi_n \cup \{\forall x_n \neg \varphi_n\}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\Psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ konsistent ist. Angenommen Ψ ist inkonsistent. Gemäß Lemma 2.14 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit Φ_n inkonsistent. Wir wählen n minimal mit dieser Eigenschaft. Da $\Phi_0 = \Phi$ konsistent ist, ist $k := n-1 \in \mathbb{N}$. Aus der Inkonsistenz von $\Phi_n := \Phi_k \cup \{\psi_k\}$ folgt insbesondere $\Phi_n \vdash \exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$. Unter Beachtung von *MON* gibt es somit ein $\Gamma \in {}^\star\Phi_k$, sodass $\Gamma\ \psi_k\ (\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}) \in G_{\mathcal{BK}}$. Weiter können wir damit ableiten:

1.	Γ	$\exists x_n \varphi_n \to {\varphi_n}^{y_n}_{x_n}$	$\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	Definition von ψ_k
1.1	Γ	$\neg(\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k})$	$\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	A-Umformung in 1.
2.	Γ	$\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	$\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	*VOR*
3.	Γ		$\exists x_k \varphi_k \wedge \neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	*FU* auf 2. und 1.1
4.	Γ		$\exists x_k \varphi_k$	*KON1* auf 3.
4.1	Γ		$\neg \forall x_k \neg \varphi_k$	A-Umformung in 4.
5.	Γ		$\neg {\varphi_k}^{y_k}_{x_k}$	*KON2* auf 3.
6.	Γ		$\forall x_k \neg \varphi_k$	*GEN* auf 5., beachte $(*)$

Wegen 6. und 4.1 ist daher im Γ und damit Φ_k inkonsistent im Widerspruch zur Wahl von n. Folglich ist Ψ konsistent.

Schritt 2: negationsvollständig machen
Sei $\langle \beta_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ ein Abzählung von L. Wir definieren rekursiv $\Psi_0 := \Psi$ und

$$\Psi_{n+1} := \begin{cases} \Psi_n \cup \{\beta_n\}, & \text{falls } \Psi_n \cup \{\beta_n\} \text{ konsistent} \\ \Psi, & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen damit $\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$. Da nach Definition alle Ψ_n konsistent sind, ist mit Lemma 2.14 auch Θ konsistent.

Θ ist negationsvollständig:

Sei $\varphi \in L$ mit $\Theta \nvdash \neg\varphi$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\beta_k = \varphi$. Wäre $\Psi_k \cup \{\varphi\}$ inkonsistent, so gäbe es insbesondere ein $\Gamma \in {}^\star\Psi_k \subseteq {}^\star\Theta$ mit $\Gamma\ \varphi\ \neg\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$. Mit *VOR* und *FU* folgte somit $\Gamma\ \neg\varphi \in G_{\mathcal{BK}}$ im Widerspruch zur Annahme $\Theta \nvdash \neg\varphi$. Also ist $\Psi_k \cup \{\varphi\}$ konsistent und folglich $\Psi_k \cup \{\varphi\} = \Psi_k \cup \{\beta_k\} = \Psi_{k+1} \subseteq \Theta$. Damit gilt natürlich $\Theta \vdash \varphi$.

Θ enthält Beispiele:

Seien $v \in \mathcal{V}$, $\varphi \in L$ mit $\Theta \vdash \exists v \varphi$. Da $\langle v, \varphi \rangle = \alpha_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\exists v \varphi \to \varphi^{y_n}_{v} = \exists x_n \varphi_n \to {\varphi_n}^{y_n}_{x_n} = \psi_k \in \Psi \subseteq \Theta$$

und damit $\Theta \vdash \exists v \varphi \to \varphi^{y_n}_{v}$. Mit *MP* folgt $\Theta \vdash \varphi^{y_n}_{v}$.

■

[37] Genauer ist $y_n := \min_0 \{v \in \mathcal{V}\,;\ v \notin \operatorname{frei}\Phi,\ v \notin \operatorname{frei}\{\psi_i\,;\ i \in n\},\ v \notin \operatorname{frei} \forall x_n \neg\varphi_n\}$.

2.16 Satz

Jedes konsistente Axiomensystem ist erfüllbar.

Beweis:
Wir führen zuerst ein Hilfsabbildung ein:

$$T : L \to L,\ \varphi \mapsto \begin{cases} v_{2j+1}, & \text{falls } \varphi = v_j \in \mathcal{V} \\ \big\langle i, \langle\rangle, \langle T\ulcorner\alpha\lrcorner, T\ulcorner\beta\lrcorner\rangle\big\rangle, & \text{falls } \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle \text{ und } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ \big\langle i, \langle T\ulcorner v\lrcorner\rangle, \langle T\ulcorner\alpha\lrcorner\rangle\big\rangle, & \text{falls } \varphi = \big\langle i, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \text{ und } i \in I_{\mathrm{GQ}} \end{cases}$$

Für beliebige Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle\mathfrak{A}, h\rangle$ gilt

$$(*)\quad \mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}_T\ulcorner\varphi\lrcorner \quad \text{für alle } \varphi \in L\ ,$$

wobei $\mathfrak{I}_T := \langle\mathfrak{A}, h \triangleleft T\rangle$. Wir beweisen $(*)$ per struktureller Induktion.

SI: Für $\varphi \in \mathcal{V}$ folgt

$$\mathfrak{I}_T\ulcorner\varphi\lrcorner = (h \triangleleft T)\ulcorner\varphi\lrcorner = h\ulcorner T\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner\ .$$

SII: Fall $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle$ und $i \in I_{\mathrm{GJ}}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_T\ulcorner\varphi\lrcorner &= H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner\mathfrak{I}_T\ulcorner\alpha\lrcorner, \mathfrak{I}_T\ulcorner\beta\lrcorner\lrcorner \\ &= H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner\mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\alpha\lrcorner\lrcorner, \mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\beta\lrcorner\lrcorner\lrcorner && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \mathfrak{I}\ulcorner\big\langle i, \langle\rangle, \langle T\ulcorner\alpha\lrcorner, T\ulcorner\beta\lrcorner\rangle\big\rangle\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner\ . \end{aligned}$$

Fall $\varphi = \big\langle i, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle$ und $i \in I_{\mathrm{GQ}}$:
Für alle $b \in U$ gilt

$$\begin{aligned} {\mathfrak{I}_T}_v^b\ulcorner\alpha\lrcorner &= \langle\mathfrak{A}, (h \triangleleft T)_v^b\rangle\ulcorner\alpha\lrcorner \\ &= \langle\mathfrak{A}, h^b_{T\ulcorner v\lrcorner} \triangleleft T\rangle\ulcorner\alpha\lrcorner \\ &= (\mathfrak{I}^b_{T\ulcorner v\lrcorner})_T\ulcorner\alpha\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}^b_{T\ulcorner v\lrcorner}\ulcorner T\ulcorner\alpha\lrcorner\lrcorner && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_T\ulcorner\varphi\lrcorner &= H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner\Big\{b \in U\ ;\ {\mathfrak{I}_T}_v^b\ulcorner\alpha\lrcorner = V_{\mathfrak{A}}\Big\}\lrcorner \\ &= H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner\Big\{b \in U\ ;\ \mathfrak{I}^b_{T\ulcorner v\lrcorner}\ulcorner T\ulcorner\alpha\lrcorner\lrcorner = V_{\mathfrak{A}}\Big\}\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}\ulcorner\big\langle i, \langle T\ulcorner v\lrcorner\rangle, \langle T\ulcorner\alpha\lrcorner\rangle\big\rangle\lrcorner \\ &= \mathfrak{I}\ulcorner T\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner\ . \end{aligned}$$

Weiter definieren wir zu jeder Interpretation $\mathfrak{I} = \langle\mathfrak{A}, h\rangle$ noch eine weitere Interpretation $\mathfrak{I}^T := \langle\mathfrak{A}, h^T\rangle$, wobei

$$h^T : \mathcal{V} \to U_{\mathfrak{A}},\ v \mapsto \begin{cases} h\ulcorner T_\llcorner v^\urcorner\lrcorner, & \text{falls } v \in \operatorname{im} T \\ h\ulcorner v\lrcorner, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da

$$(h^T \lhd T)^\ulcorner v_\lrcorner = h^{T\ulcorner} T^\ulcorner v_{\lrcorner\lrcorner} = h^\ulcorner T_\llcorner T^\ulcorner v_\lrcorner{}^\urcorner{}_\lrcorner = h^\ulcorner v_\lrcorner \quad \text{für alle } v \in \mathcal{V} \ ,$$

gilt

$$(\mathfrak{I}^T)_T = (\langle \mathfrak{A}, h^T \rangle)_T = \langle \mathfrak{A}, h^T \lhd T \rangle = \langle \mathfrak{A}, h \rangle = \mathfrak{I}$$

und damit

$$\mathfrak{I}^{T\ulcorner} T^\ulcorner \varphi_{\lrcorner\lrcorner} \overset{(*)}{=} (\mathfrak{I}^T)_T{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner = \mathfrak{I}^\ulcorner \varphi_\lrcorner \quad \text{für alle } \varphi \in L \ .$$

Zusammen mit $(*)$ gilt also für alle $\Phi \subseteq L$

$$(**) \quad \Phi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad T\lceil\Phi\rfloor \text{ erfüllbar} \ .$$

Ist nämlich $\mathfrak{I} \Vdash \Phi$, so gilt $\mathfrak{I}^{T\ulcorner} T^\ulcorner \varphi_{\lrcorner\lrcorner} = \mathfrak{I}^\ulcorner \varphi_\lrcorner = V_\mathfrak{I} = V_{\mathfrak{I}^T}$ für alle $\varphi \in L$, d.h. $\mathfrak{I}^T \Vdash T\lceil\Phi\rfloor$. Und ist andererseits $\mathfrak{I} \Vdash T\lceil\Phi\rfloor$, so gilt $\mathfrak{I}_T{}^\ulcorner \varphi_\lrcorner = \mathfrak{I}^\ulcorner T^\ulcorner \varphi_{\lrcorner\lrcorner} = V_\mathfrak{I} = V_{\mathfrak{I}_T}$ für alle $\varphi \in L$, d.h. $\mathfrak{I}_T \Vdash \Phi$.

Offenbar erfüllen endliche Axiomensysteme die Bedingung aus Satz 2.15. Zusammen mit Satz 2.7 (b) sind also endliche Axiomensysteme konsistent genau dann, wenn erfüllbar. Unter Beachtung von Lemma 2.9 (b) und $(**)$ gilt somit für alle $\Phi \subseteq L$

Φ konsistent	gdw.	alle endlichen Teilmengen von Φ sind konsistent
	gdw.	alle endlichen Teilmengen von Φ sind erfüllbar
	gdw.	alle endlichen Teilmengen von $T\lceil\Phi\rfloor$ sind erfüllbar
	gdw.	alle endlichen Teilmengen von $T\lceil\Phi\rfloor$ sind konsistent
	gdw.	$T\lceil\Phi\rfloor$ konsistent

Sei nun $\Phi \subseteq L$ ein beliebiges konsistentes Axiomensystem. Nach dem gerade gezeigten ist auch $T\lceil\Phi\rfloor$ konsistent. Weiter ist offenbar $\mathcal{V} \setminus \operatorname{frei} T\lceil\Phi\rfloor$ unendlich.[38] Also ist $T\lceil\Phi\rfloor$ erfüllbar mit Satz 2.15. Mit $(**)$ ist damit auch Φ erfüllbar. ■

Zusammen mit dem Korrektheitssatz ist also der Adäquatheitssatz bewiesen:

2.17 Theorem

$\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$ ist ein adäquater Beweiskalkül für die Klassenlogik.

[38] Es ist nämlich $\{v_{2j}\ ;\ j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V} \setminus \operatorname{frei} T\lceil\Phi\rfloor$.

2.4. Unterschiede zur Oberschelp'schen Klassenlogik

Wir wollen nun die gerade vorgestellte Klassenlogik (CL) mit der ursprünglichen, von Glubrecht, Oberschelp und Todt entwickelten Version vergleichen. Hierbei beziehen wir uns auf das in [GOT83, Kapitel 5] vorgestellte, *Ausdruckslogik* (LA) genannte, klassenlogische System.

a) **Abweichende Benennungen**

Zunächst sei erwähnt, dass wir in CL ein paar abweichende Benennungen verwendet haben:

LA	**CL**
Objektbereich	Universum
Individuenbereich	Domäne
Objekt	Gegenstand, Objekt
Individuum, reales Objekt	Gegenstand 1. Stufe
virtuelles Objekt	Gegenstand 2. Stufe
eigentliche Klasse	echte Klasse
Ersatzobjekt, Joker	Unsinnsobjekt
Bewertungsbasis	Interpretation
Bewertung	Interpretationsfunktion

Meiner Meinung nach sollten in einer *Klassen*logik auch die echten Klassen die Bezeichnung „real" verdienen.

b) **Keine Sorten**

LA ist als eine mehrsortige Logik angelegt. Zu jeder Sorte gibt es eine eigene Variablenmenge und jede Struktur enthält eine Abbildung, die jeder Sorte eine Teilgesamtheit der Domäne, den sogenannten *Bereich der Sorte*, zuordnet. Variablen dürfen nur durch Objekte aus dem Bereich der zugehörigen Sorte belegt werden.

In CL haben wir vollständig auf Sorten verzichtet. Dies vereinfacht Semantik und Syntax. Außerdem glaube ich, dass sich in der praktischen Verwendung der Klassenlogik Sorten in flexiblerer Art und Weise durch geeignete Konventionen und Schreibweisen auf höherer Ebene simulieren lassen.

c) **Keine nicht-logischen Symbole**[39]

In klassenlogischen Systemen lassen sich (auf der Domäne definierte) Relationen und Funktionen durch die zur Verfügung stehenden Klassen als Gegenstände des Universums (genauer als Klassen von Paaren) auffassen. In LA können daher die Konstantensymbole auch die Rolle der Relations- und Funktionssymbole übernehmen, d.h. es wird nur eine Art von nicht-logischen Symbolen benötigt.

Wir gehen in CL noch einen Schritt weiter und verzichten ganz auf nicht-logische Sym-

[39]Wir verwenden hier die heute üblichen Bezeichnungen. In [GOT83] werden nicht-logische Symbole als (nicht-logische) Konstanten bezeichnet und dementsprechend Relations-, Funktions- und Konstantensymbole als Relations-, Funktions- bzw. Individuenkonstanten.

bole.[40] Dadurch werden natürlich die Semantik und die Syntax weiter vereinfacht. Insbesondere wird der in LA formulierte Begriff des *Rahmens* überflüssig.[41]

Auch in ZFC werden (bis auf das Relationssymbol $\in$) zunächst keine nicht-logischen Symbole benötigt. Sehr bald wird man jedoch in der Praxis einige Symbole durch prädikatenlogische Definitionserweiterungen hinzufügen wollen. In Kapitel 3 werden wir eine neue und mächtigere Art der Syntaxerweiterung vorstellen, durch die keine neuen nicht-logischen Symbole, sondern neue (logische) Operatoren eingeführt werden.

Wie gehen wir nun aber vor, wenn wir prädikatenlogische Systeme, die ganz wesentlich auf Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen aufbauen, in CL erfassen wollen? Im Anhang C (Einbettung der Prädikatenlogik) werden wir Variablen als Ersatz für die nicht vorhandenen (nicht-logischen) Symbole benutzen. Eigentlich sind Konstantensymbole nichts anderes als Variablen, die nicht gebunden werden dürfen. Da wir nur abzählbar viele Variablen zur Verfügung haben, müssen wir uns allerdings auf die Einbettung prädikatenlogischer Systeme mit abzählbaren Symbolmengen beschränken.[42]

Der eigentliche Grund für den Verzicht auf nicht-logische Symbole ist jedoch, dass es mir so scheint, als ob in der Praxis in vielen Fällen, in denen man üblicherweise nicht-logische Symbole verwendet, Meta-Variablen (in Kombination mit dem Ansatz „Theoreme sind Schlussschemata“) einen besseren Job machen. Wir werden darauf in Abschnitt 3.2 etwas genauer eingehen.

Ich glaube, dass (in der Klassenlogik) durch Syntaxerweiterungen, Variablen und Meta-Variablen alle Funktionen der nicht-logischen Symbole abgedeckt werden können, mehr noch, dass durch diese „Arbeitsteilung“ natürlichere Ausdrucksmöglichkeiten vorliegen.[43]

Anmerkung:

> Meiner Meinung nach hängt damit auch der von Frege und Hilbert geführte „Definitions-Streit“ zusammen. In [Fre03] kritisiert Frege Hilberts Verwendung des Wortes „definieren“.[44] Hilbert spricht davon, dass die geometrischen Axiome in seinen *Grundlagen der Geometrie* die geometrischen Grundbegriffe (wie „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“, etc.) *definieren.* Für Frege ist aber *Definieren* die „Festsetzung der Bedeutung eines Wortes oder Zeichens“; „keine Definition erweitert die Erkenntnis, sondern sie ist nur ein Mittel, einen mannigfachen Inhalt in einem knappen Worte oder Zeichen zusammenzufassen und ihn uns dadurch handlicher zu machen.“ Genau diesen Vorgang des Definierens werden wir mit den Syntaxerweiterungen zu erfassen versuchen. Offenbar kann das Wort „Punkt“ in Hilberts Axiomen nicht in diesem Sinne als eine abkürzende Erweiterung der Syntax aufgefasst werden. Nach modernem Verständnis (und Hilbert war sicher-

[40] Eine Variante von CL mit Konstantensymbolen ist aber durchaus möglich, ja sogar Relations- und Funktionssymbole für Relationen und Funktionen auf dem ganzen Universum könnte man hinzufügen. Einbettungen der Prädikatenlogik wären dann trivial.

[41] Unseren Strukturen entsprechen in LA die Rahmen. Eine Struktur ist dort ein Rahmen mit einer Konstanteninterpretation, d.h. einer Abbildung, die jedem Konstantensymbol ein Individuum zuordnet.

[42] Im Übrigen kann durch die gesicherte Abzählbarkeit der Ausdrucksmenge von CL (wie für die prädikatenlogischen Systeme mit abzählbarer Symbolmenge) der Vollständigkeitssatz ohne das Auswahlaxiom bewiesen werden.

[43] Auch an dieser Stelle sei noch einmal betont, dass damit in keiner Weise die Bedeutsamkeit der Prädikatenlogik (in der nicht-logische Symbole unverzichtbar sind) angezweifelt werden soll.

[44] In ihrer Auseinandersetzung geht es auch noch um andere Begrifflichkeiten wie etwa die Widerspruchsfreiheit, auf die ich hier nicht eingehen werde. Man vergleiche dazu auch [Bla18].

lich der gleichen Ansicht) sagt ein Axiomensystem Φ für sich genommen weder etwas aus, noch bestimmt es eine einzelne, konkrete Struktur. Vielmehr wird durch Φ eine (eventuell auch leere) Klasse von Strukturen, die Klasse aller Modelle von Φ, charakterisiert. Wird nun eine Schlussfolgerung φ aus Φ gezogen, so bedeutet das semantisch, dass in allen Strukturen dieser Modellklasse auch die Aussage φ gilt. Kommen in Φ die unbestimmten Grundbegriffe/Symbole $c_1, c_2 \ldots$ vor, so können wir das auch folgendermaßen formulieren: „Wenn $c_1, c_2 \ldots$ so gewählt werden, dass Φ gilt, dann gilt auch φ." Durch die letzte Formulierung wird deutlich, dass es sich auch bei nicht-logischen Symbolen um „Variablen" handelt. Quantifiziert wird hier auf der Meta-Ebene und der Skopus des Allquantors erstreckt sich über den gesamten Schluss, d.h. über die Axiome (Prämissen) Φ *und* die Konklusion φ. Vollkommen analog verhalten sich unsere Meta-Variablen in unseren Schlussschemata. Frege beschreibt das in [Fre03] folgendermaßen:

> „Die Wörter ‚Punkt', ‚Ebene', usw. sollen also dazu dienen, dem Lehrsatze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen wie die Buchstaben in der Algebra. ... Wir sehen auch bestätigt, daß diese sogenannten Definitionen keine Definitionen sind, ebensowenig wie in dem Satze ‚Wenn $a > 1$ ist, so ist $a^2 > 1$' der uneigentliche Satz ‚$a > 1$' eine Definition ist. Buchstaben, die einem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen sollen, werden nicht erklärt; denn sie sollen nichts bezeichnen, sondern nur andeuten. ... Die Wörter ‚Punkt', ‚Ebene', usw. werden hier wie Buchstaben gebraucht. Was wie eine Erklärung solcher Wörter aussieht, ist ein uneigentlicher Bedingungssatz. ... Da das Wort ‚Bedingungssatz' vollkommen genügt, so ist nicht einzusehen, warum dafür die irreführenden Wörter ‚Definition' und ‚Axiom' gebraucht werden sollen, die von alters her eine andere Gebrauchsweise haben. Was Herr Hilbert Definition nennt, wird in den meisten Fällen ein uneigentlicher Bedingungssatz, ein unselbständiger Teil eines allgemeinen Lehrsatzes sein."

Letztendlich handelt es sich wohl bei dem „Definitions-Streit" zwischen Hilbert und Frege um einen „Streit um Worte"; schließlich versteht man in der modernen Mathematik insbesondere durch Hilberts Bemühungen unter einem „Axiom" in den meisten Fällen nichts anderes als einen Bedingungssatz. Nichtsdestotrotz scheint mir Freges Kritik nicht unwichtig zu sein, da sie vermutlich auch ihren Teil zu dieser Entwicklung beigetragen hat und außerdem auf einen wichtigen Unterschied in der Verwendung von Symbolen/Namen hinweist.[45]

Angemerkt sei noch, dass Hilbert ein kategorisches Axiomensystem angibt, d.h. ein (erfüllbares) Axiomensystem dessen Modelle alle isomorph zueinander sind. Es lässt sich daher in gewissem Sinne doch der Standpunkt vertreten, dass durch dieses Axiomensystem im Wesentlichen *eine* Struktur bestimmt/definiert wird.

d) **Konjunktion statt Ur-Paar**

In LA ist ein Paar-Begriff als Grundbegriff gegeben. Syntaktisch steht uns dort also die Paarbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Grundoperator zur Verfügung und jede LA-Struktur enthält eine (auf dem ganzen Universum U definierte) injektive Paar-Funktion $P : U \sqcap U \to U$, sodass das

[45] Undefinierte Namen für die Grundbegriffe auf der einen und definierte, abkürzende Namen auf der anderen Seite.

Paar von Gegenständen 1. Stufe wieder ein Gegenstand 1. Stufe ist. Fassen wir Relationen und Funktionen (auf der Domäne) als Klassen von solchen Paaren auf, ist also in LA die Existenz aller (beschreibbaren) Relationen und Funktionen von vornherein gesichert. Allerdings erzwingt die Injektivität der Paar-Funktion, dass alle LA-Strukturen eine unendliche Domäne besitzen.[46]

Mir scheint es nicht angemessen zu sein, dass ein logisches System allgemein die Existenz von unendlich vielen Gegenständen fordert. Ich hatte daher in einer früheren Version von CL zunächst mit einem partiellen Paar-Begriff herumexperimentiert. Man musste durch Zusatzaxiome fordern, dass Gegenstände „paarbar“ sind. Wenngleich sich durch dieses System sowohl endliche als auch unendliche Strukturen beschreiben ließen, erschien es mir zunehmend unnatürlich und ablenkend über die Paarbarkeit von Gegenständen nachzudenken. Daraufhin habe ich mich dazu entschlossen, den Urpaar-Begriff komplett über Bord zu werfen und den Paarbegriff durch Kuratowskis berühmte Definition auf den Klassenbegriff zurückzuführen. Damit wird der Struktur-Begriff um ein weiteres Bestimmungsstück erleichtert. Allerdings ist natürlich dadurch das Paarbarkeits-Problem eigentlich nur verschoben, da sich das Kuratowski-Paar nur dann wie ein sinnvolles Paar verhält, wenn entsprechende Paar*klassen* Gegenstände 1. Stufe sind. Da wir jedoch so oder so darüber nachdenken werden, welche Klassen Gegenstände 1. Stufe sein sollen, erschien mir diese Vereinfachung trotzdem sinnvoll. Möchte man wie in LA ohne Bedenken Relationen und Funktionen bilden können, so bietet es sich an zu fordern, dass alle endlichen Klassen Gegenstände 1. Stufe sind. Dadurch stehen einem dann auch schon die natürlichen Zahlen (im von-Neumann'schen Sinne) zur Verfügung.[47] Wir werden in Kapitel 4 genau so vorgehen.

Allerdings hat der Verzicht auf den Urpaar-Begriff die harmlose Folge, dass wir anders als in LA die Konjunktion als eigenständigen Grundjunktor fordern müssen. Demgegenüber kann man in LA mithilfe des Urpaars die Konjunktion zweier Ausdrücke φ und ψ definieren durch den Ausdruck $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \top, \top \rangle$.

e) **Wahrheitswerte müssen keine Gegenstände erster Stufe sein**

Anders als in LA wollen wir nicht fordern, dass die beiden Wahrheitswerte Gegenstände 1. Stufe sein müssen. Dadurch sind in CL auch ganz triviale Strukturen mit einer leeren Domäne möglich.

f) **Keine Klasse ist Unsinn**

Auch in LA wird zunächst ein Prä-Struktur-Begriff eingeführt. Allerdings wird dort der Abstraktor als partielle Abbildung $\mathcal{P}(D) \rightharpoonup U$ realisiert. Dadurch wird die Definition der Interpretationsfunktion für Prä-Strukturen etwas komplizierter.[48] Wie wir in Fußnote 19 auf Seite 54 angemerkt hatten, gehen wir mithilfe des Unsinnsobjekts leicht anders vor. Dies hat zur Folge, dass in CL das Unsinnsobjekt niemals eine Klasse ist.

g) **Einfachere Elementbeziehung**

[46] Man beachte, dass in LA die beiden Wahrheitswerte Gegenstände 1. Stufe sind und somit die Domäne mindestens zwei Elemente enthalten muss.

[47] Damit haben wir natürlich auch die Unendlichkeit der Domäne erzwungen. Allerdings durch ein Zusatzaxiom. Wenngleich die Beschreibung von unendlichen (Großteile der Mathematik umfassenden) Universen die große Stärke von klassenlogischen Systemen ist, ist es in CL grundsätzlich auch möglich, endliche Strukturen zu beschreiben.

[48] Siehe [GOT83, S. 345].

Anders als in CL ist in LA die Elementbeziehung nicht durch den Abstraktor bestimmt. In [GOT83, S. 162] finden wir:

> „Als nächstes muss in den logischen Rahmen eine *Elementbeziehung* aufgenommen werden. Dabei ist wieder die Wahl zwischen einer engen und einer weiten Auffassung zu treffen. Nach der engen Auffassung handelt es sich um eine Beziehung zwischen Individuen und Klassen von Individuen, nämlich die Beziehung zwischen den jeweiligen Elementen einer Klasse und dieser Klasse selbst. Nach der weiten Auffassung können auch Nichtklassen Elemente haben. Es handelt sich dann um eine Beziehung, die die spezielle Elementbeziehung zwischen Individuen und Klassen umfaßt. Wieder macht es keine Mühe, die Elementbeziehung in diesem allgemeinen Sinne aufzufassen.“

Mir scheint die weitere Auffassung keinen Vorteil zu bieten. Vielmehr verkompliziert sie die Semantik unnötig und ist nicht sehr intuitiv. In CL habe ich mich dehalb für die engere Auffassung entschieden. Dies führt dazu, dass Elementrelation und Abstraktor gegenseitig aufeinander zurückführbar sind.[49]

Und wenn einem doch einmal die Struktur der „engeren“ Elementbeziehung zu klein erscheint, lässt sie sich ohne Probleme leicht anreichern. So kann man etwa in einer klassenlogisch formulierten ZFC-Mengenlehre die Existenz eines Grothendieck-Universums fordern, wodurch man in gewisser Weise eine „Allmenge“ zur Verfügung hat.[50]

h) **Stärkerer Allquantor**

Wie schon in der Einleitung angesprochen, quantifiziert der Allquantor (und der Kennzeichnungsoperator) in LA nur über Gegenstände 1. Stufe. Konsequenterweise werden auch Variablen nur mit Gegenständen 1. Stufe belegt. Durch diese Beschränkung des Allquantors auf die Domäne ist der Allquantor als Grundoperator entbehrlich; es lässt sich dann nämlich $\forall v \varphi$ definieren durch $\{v; \varphi\} = \{v; v = v\}$.

Ich glaube jedoch, dass eine Erweiterung des Allquantors auf das ganze Universum einen großen Gewinn darstellt.[51] Wir können dann insbesondere über alle Klassen quantifizieren. In Kapitel 4 werden wir sehen, dass sich dadurch viele Begrifflichkeiten sehr natürlich und ohne Axiomenschemata formulieren lassen.[52]

In [Obe94, S. 22] kritisiert Oberschelp die Systeme NBG und MK, die wie CL eine Quantifizierung über Klassen zulassen, folgendermaßen:

> „Das heißt aber, daß man in diesen Systemen den logischen Individuenbegriff (worauf man sich mit gebundenen Variablen beziehen kann) nicht mit dem Elementbegriff (was Element eines Individuums sein kann) gleichsetzen kann. Die realen eigentlichen Klassen sind gewissermaßen unterprivilegierte Individuen, da

[49] In LA sind Elementrelation und Abstraktor unabhängige Bestimmungsstücke einer Struktur.

[50] Anstatt also *über* der Domäne zusätzliche Struktur hinzuzufügen, „schiebt“ man die Domäne einfach eine Etage *tiefer*, indem man sie zum Gegenstand 1. Stufe macht. (Natürlich ist die „verschobene Domäne“ dann nicht mehr die Domäne der Struktur.)

[51] Dass wir dadurch den Allquantor als einen selbständigen Grundoperator fordern müssen, nehmen wir gerne in Kauf.

[52] Man vergleiche insbesondere unsere Definition der natürlichen Zahlen auf Seite 126 mit der entsprechenden Definition in [Obe94, S. 135]. Auch die Morse-Kelley Mengenlehre lässt sich anders als in LA endlich axiomatisieren.

> sie nicht, wie andere Individuen, für die Mengenbildung herangezogen werden dürfen. So gibt es nicht für beliebige Individuen x, y die Menge mit genau diesen beiden Elementen, vielmehr müssen x, y Mengen (in NGB und MK) bzw. Mengen oder Urelemente (in NBGU und MKU) sein. Die Einführung eigentlicher Klassen im Sinne von Neumanns führt also dazu, daß nicht alle Individuen gleichberechtigt sind.“

Meiner Meinung nach ist diese Kritik entweder eine reine Bezeichnungs-Kritik oder aber nur die Feststellung einer (aufgrund der Russel'schen Antinomie unausweichlichen) Eigenschaft von mengentheoretischen Systemen. In LA haben wir zwar keine unterprivilegierten Individuen, dafür aber mit den virtuellen Objekten unterprivilegierte Objekte. Um die Zweistufigkeit

Gegenstände 1. Stufe	–	Gegenstände 2. Stufe
Mengen	–	echte Klassen
reale Objekte	–	virtuelle Objekte

kommen wir einfach nicht drum herum.

Auch den Kennzeichnungsoperator lassen wir in CL über das ganze Universum quantifizieren. Allerdings hat das nicht so große Folgen wie die Verallgemeinerung des Allquantors.

* * *

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass CL durch den erweiterten Allquantor ein ausdrucksstärkeres System als LA darstellt, welches noch immer eine sehr simple Syntax aufweist[53] und sogar eine einfachere Semantik besitzt.[54]

[53] In CL haben wir 3 Grundjunktoren $(=, \wedge, \in)$ und 3 Grundquantoren $(\forall, \iota, \{\cdot;\cdot\})$; in LA 3 Grundjunktoren $(=, \langle\cdot,\cdot\rangle, \in)$ und 2 Grundquantoren $(\iota, \{\cdot;\cdot\})$.

[54] Eine CL-Struktur ist bestimmt durch die 6 Bestimmungstücke Universum, Domäne, Abstraktor, Unsinnsobjekt, Wahrheitsobjekt und Falschheitsobjekt; wobei die eigentliche „Struktur“ gänzlich im Abstraktor steckt. Demgegenüber enthält selbst eine „sortenlose“ LA-Struktur die 9 Bestimmungstücke Universum, Domäne, Elementbeziehung, Abstraktor, Paarbegriff, Unsinnsobjekt, Wahrheitsobjekt, Falschheitsobjekt und Konstanteninterpretation; wobei Elementbeziehung, Abstraktor und Paarbegriff strukturgebend sind.

3. Syntaxerweiterungen

> *Es kommt hier darauf an, sich klar zu machen, was Definiren ist und was dadurch erreicht werden kann. Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als dass etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird. Wie der Geograph kein Meer schafft, wenn er Grenzlinien zieht und sagt: den von diesen Linien begrenzten Theil der Wasserfläche will ich Gelbes Meer nennen, so kann auch der Mathematiker durch sein Definiren nichts eigentlich schaffen. Man kann auch nicht einem Dinge durch blosse Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heissen, wie man es etwa benannt hat.*
>
> Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*

Schon bei der Formulierung des klassenlogischen Beweiskalküls und noch deutlicher im Beweis des Vollständigkeitssatzes haben wir gesehen, dass es sehr hilfreich, wenn nicht sogar unumgänglich ist, aufbauend auf den sechs Grundoperatoren die üblichen logischen Operatoren wie $\top$, $\bot$, $\neg$, $\vee$, $\exists$ etc. als Abkürzungen einzuführen und mit ihnen in üblicher Art und Weise zu hantieren. Anders als in der Prädikatenlogik lassen sich aber in der Klassenlogik nicht nur logische Operatoren als Abkürzungen realisieren. So werden wir im nächsten Kapitel über klassenlogische Mengenlehre andeuten, dass sich auch mathematisch-mengentheoretische Begriffe als Abkürzungen klassenlogischer Ausdrücke auffassen lassen. Dies hat zur Folge, dass wir auf Definitionserweiterungen im Sinne der Prädikatenlogik[1] verzichten können. Wir haben nur eine Art der Spracherweiterung, die sogenannten **Syntaxerweiterungen**.

Weiter wollen wir nun dazu übergehen solche Syntaxerweiterungen nicht mehr nur als reine meta-sprachlichen Abkürzungen zu sehen, sondern vielmehr, wie der Name schon sagt, als eine echte Erweiterung der klassenlogischen Syntax. Die so entstehenden erweiterten klassenlogischen Systeme sind alle äquivalent zur Klassenlogik ohne Syntaxerweiterungen, d.h. es lassen sich in ihnen letztendlich genau dieselben Gedanken ausdrücken.

Um unsere späteren Festlegungen zu motivieren, wollen wir uns hier exemplarisch eine mögliche klassenlogische Definition des Kreuzprodukts anschauen. Gewöhnlich, d.h. in der naiven, inhaltlichen Mathematik, definiert man für zwei Mengen A und B das Kreuzprodukt durch

$$A \sqcap B := \{\langle a, b\rangle\ ;\ a \in A \wedge b \in B\}$$

[1] Hierbei wird die prädikatenlogische Signatur erweitert und in Zusatzaxiomen die Bedeutung der neuen Relations- und Funktionssymbole festgelegt. Z.B. denkt man sich die ZFC-Axiome zumeist formuliert in der Prädikatenlogik mit nur einem Relationssymbol (dem Elementsymbol). Wenn man dann jedoch etwa das Durchschnittssymbol benutzen möchte, so fügt man ein Zusatzaxiom hinzu, welches eben gerade die Bedeutung des Durchschnittssymbols festlegt. Ein entscheidender Unterschied zu den Abkürzungs-Erweiterungen wie $\neg$ oder $\exists$ ist nun, dass das Durchschnittssymbol nicht als reine Abkürzung aufgefasst werden kann, d.h. die Regel, wie eingeführte Symbole eliminiert werden können, ist komplizierter. So würde man etwa den Ausdruck „$a \cap b = c$“ übersetzen in „$\forall z(z \in c \leftrightarrow (z \in a) \wedge (z \in b))$“, d.h. wir können nicht einfach den Term $a \cap b$ durch einen gleichwertigen ersetzen, sondern müssen den gesamten Ausdruck ändern. Siehe etwa Ebbinghaus etc.

Wegen
$$\{\langle a,b\rangle\,;\ a\in A\wedge b\in B\}=\{z\,;\ \exists a\exists b(a\in A\wedge b\in B\wedge z=\langle a,b\rangle)\}$$
lässt sich also das Kreuzprodukt rein klassenlogisch definieren; vorausgesetzt eine klassenlogische Definition des Paares $\langle a,b\rangle$ ist gegeben. Zu beachten ist, dass paarweise verschiedene Variablen z,a,b zu wählen sind, die nicht in A oder B frei vorkommen. Anstatt nun $A\sqcap B$ als Abkürzung für
$$\{z\,;\ \exists a\exists b(a\in A\wedge b\in B\wedge\langle a,b\rangle=z)\}$$
aufzufassen, können wir jedoch auch zunächst für beliebige Variablen x_1, x_2 und beliebige Ausdrücke α, φ die „2-Ersetzungsklasse“
$$\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\ \varphi\}:=\{z\,;\ \exists x_1\exists x_2(\varphi\ \wedge\ z=\alpha)\}\qquad\text{mit } z \text{ nicht frei in } x_1\,x_2\,\alpha\,\varphi$$
definieren, um dann
$$A\sqcap B:=\{\langle a,b\rangle\,;_{a,b}\ a\in A\wedge b\in B\}\qquad\text{mit } a,b \text{ verschieden und nicht frei in } A\,B$$
zu setzen. Dieser Weg ist sogar zu bevorzugen, da die Ersetzungsklassen-Notation in der alltäglichen Mathematik ein weitverbreitetes Darstellungsmittel ist und daher an vielen Stellen auf natürliche Art und Weise genutzt werden kann.[2] Zudem ist die Definition des Operators $\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\ \varphi\}$ ein sehr gutes Beispiel, um sich allgemeine Prinzipien der Syntaxerweiterungen klarzumachen:[3]

1. Es handelt sich um einen Operator mit zwei Bindungsvariablen x_1,x_2 und zwei Parametern α,φ. Um unsere Syntax zu erweitern wählen wir daher einen beliebigen noch nicht genutzten Operator-Index $i_{2\text{Ers}}$, fassen $\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\varphi\}$ als Schreibweise für $\big\langle i_{2\text{Ers}},\langle x_1,x_2\rangle,\langle\alpha,\varphi\rangle\big\rangle$ auf und fügen die Regeln
$$\textit{2ErsetzungsKlasse}_{x_1,x_2}(\mathbf{a},\mathbf{b}):\quad\frac{\begin{array}{c}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{array}}{\{\mathbf{a}\,;_{x_1,x_2}\mathbf{b}\}}\qquad\text{für } x_1,x_2\in\mathcal{V}$$
zu den Ausdrucksbildungsregeln hinzu. Allgemeiner fügt man für einen einzuführenden Operator mit m Bindungsvariablen und n Operanden nach Wahl eines geeigneten Operator-Indexes i die Schlussschemata
$$\boldsymbol{\mathit{Operator}}^{\vec{u}}_{i,m,n}\qquad\text{für } \vec{u}\in{}^m\mathcal{V}$$
zum Ausdruckskalkül hinzu. Durch eine oder mehrere solcher Syntaxerweiterungen erhalten wir also eine erweiterte Ausdrucksmenge $L_D\supseteq L_{\text{CL}}$.

2. Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, so werden wir die Interpretationsfunktion $\overline{\mathfrak{I}}$ so auf L_D erweitern, dass
$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\varphi\}\lrcorner=\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\{z;\exists x_1\exists x_2(\varphi\wedge(z=\alpha))\}\lrcorner$$
gilt, falls z nicht frei in $x_1\,x_2\,\alpha\,\varphi$ vorkommt. Genauer werden wir eine „Entpackungsfunktion“ $\text{Red}_D:L_D\to L_{\text{CL}}$ definieren, mit der wir dann
$$\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi\lrcorner:=\overline{\mathfrak{I}}\ulcorner\,\text{Red}_D\,\varphi\lrcorner\qquad\text{für }\varphi\in L_D\setminus L_{\text{CL}}$$

[2] Es sollte klar sein, wie die „n-Ersetzungsklassen“ $\{\alpha\,;_{x_1,\ldots,x_n}\ \varphi\}$ zu definieren sind. Bei konkreten derartigen Ersetzungsklassen ist meist (wie bei der Definition des Kreuzprodukts) aus dem Zusammenhange klar, welche Variablen $x_1,\ldots,x_n$ gemeint sind; dann lässt man den Index $_{x_1,\ldots,x_n}$ auch weg.

[3] Der Einfachheit halber gehen wir hierbei davon aus, dass $\exists$ zu den Grundoperatoren gehört.

setzen können. Der Rekursionsschritt für den Operator $\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\,\varphi\}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Red}_D\,\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\,\varphi\} := \{z; \exists x_1 \exists x_2(\mathrm{Red}_D\,\varphi \wedge (z = \mathrm{Red}_D\,\alpha))\}$$

mit

$$z := \mathfrak{v}_0(x_1\,x_2\,\alpha\,\varphi), \quad \text{d.h. insbesondere } z \text{ nicht frei in } x_1\,x_2\,\alpha\,\varphi\;.$$

Neben den beiden „sichtbaren“ Bindungsvariablen x_1, x_2 und den zwei Operanden α, φ „steckt“ also in $\{\alpha\,;_{x_1,x_2}\,\varphi\}$ noch eine „unsichtbare“ Bindungsvariable z, die beim „Entpacken“ immer so zu wählen ist, dass sie nicht mit den freien Variablen in $x_1\,x_2\,\alpha\,\varphi$ kollidiert.

Sei nun wieder allgemeiner ein Operator mit Index i einzuführen. Wir werden ihm drei Zahlen zuordnen:

k_i, die Anzahl der unsichtbaren Bindungsvariablen

m_i, die Anzahl der sichtbaren Bindungsvariablen

n_i, die Anzahl der Operanden

Zudem ist eine „Definition“ des Operators anzugeben. Hierbei handelt es sich um einen Ausdruck δ_i mit dem wir dann für beliebige $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$ und $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ einen einfachen Entpackunsschritt angeben können durch:

$$\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \rightsquigarrow \delta_i \frac{z_0\ z_1\ \dots\ z_{k_i-1} \qquad \vec{u} \qquad \vec{\alpha}}{v_0\ v_3\ \dots\ v_{3(k_i-1)}\ v_1\ v_4\ \dots\ v_{3(m_i-1)+1}\ v_2\ v_5\ \dots\ v_{3(n_i-1)+2}}$$

wobei

$$z_l := \mathfrak{v}_l(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \quad \text{für alle } l \in k_i\;.$$

Insbesondere sind also die gewählten unsichtbaren Bindungsvariablen paarweise verschieden voneinander, verschieden von allen sichtbaren Bindungsvariablen und kommen nicht in den Operanden vor. Dass wir im „Definitionskern“ δ_i gerade die Variablen $v_0, v_3, \ldots$ als Platzhalter für die unsichtbaren Bindungsvariablen, die Variablen $v_1, v_4, \ldots$ als Platzhalter für die sichtbaren Bindungsvariablen und die Variablen $v_2, v_5, \ldots$ als Platzhalter für die Operanden gewählt haben, ist natürlich eine willkürliche Festlegung, die wir aber in diesem Dokument stets treffen wollen. Werden mehrere neue Operatoren hintereinander eingeführt, darf der Definitionskern eines Operators auch bereits eingeführte Operatoren beinhalten. Wichtig ist hierbei allerdings, dass die Operatoren diesbezüglich in einer wohlfundierten Relation zueinander stehen.

Angewendet auf unserer konkretes Beispiel erhalten wir $k_{i_{2\mathrm{Ers}}} = 1$, $m_{i_{2\mathrm{Ers}}} = 2$, $n_{i_{s\mathrm{Ers}}} = 2$ und $\delta_{i_{2\mathrm{Ers}}} = \{v_0; \exists v_1 \exists v_4(v_5 \wedge (v_0 = v_2))\}$, denn es ist offenbar

$$\{z; \exists x_1 \exists x_2(\varphi \wedge (z = \alpha))\} = \{v_0; \exists v_1 \exists v_4(v_5 \wedge (v_0 = v_2))\} \frac{z\ \ x_1\, x_2\ \ \alpha\ \ \varphi}{v_0\ v_1\ v_4\ v_2\ v_5}$$

Bevor wir zu den exakten Definitionen kommen, geben wir nun noch ein paar Beispiele an.[4]

$\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$	**Darstellung**	k_i	m_i	n_i	δ_i
$\big\langle 7, \langle\rangle, \langle\rangle \big\rangle$	$\top$	1	0	0	$\forall v_0 (v_0 = v_0)$
$\big\langle 8, \langle\rangle, \langle\rangle \big\rangle$	$\bot$	1	0	0	$\forall v_0 v_0$
$\big\langle 9, \langle\rangle, \langle\alpha\rangle \big\rangle$	$\neg\alpha$	0	0	1	$(v_2 = \top) = \bot$
$\big\langle 10, \langle\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle \big\rangle$	$(\alpha \to \beta)$	0	0	2	$\neg(v_2 \wedge \neg v_5)$
$\big\langle 11, \langle\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle \big\rangle$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	0	0	2	$(v_2 \to v_5) \wedge (v_5 \to v_2)$
$\big\langle 12, \langle v\rangle, \langle\varphi\rangle \big\rangle$	$\exists v \varphi$	0	1	1	$\neg\forall v_1 \neg v_2$
$\big\langle 13, \langle v\rangle, \langle\varphi\rangle \big\rangle$	$\exists^{=1} v \varphi$	1	1	1	$\exists v_0 \forall v_1 (v_2 \leftrightarrow v_1 = v_0)$
$\big\langle 14, \langle x_1, x_2\rangle, \langle\alpha, \varphi\rangle \big\rangle$	$\{\alpha ;_{x_1, x_2} \varphi\}$	1	2	2	$\{v_0 ; \exists v_1 \exists v_4 (v_5 \wedge (v_0 = v_2))\}$

Als erstes wollen wir nun unsere Variablenmenge in drei Bereiche zerlegen:

$$\mathcal{V}' := \{v_{3j} \,;\, j \in \mathbb{N}\} \qquad \mathcal{V}'' := \{v_{3j+1} \,;\, j \in \mathbb{N}\} \qquad \mathcal{V}''' := \{v_{3j+2} \,;\, j \in \mathbb{N}\}$$

Wie oben bereits angesprochen, fungieren die Variablen in $\mathcal{V}' = \{v_0, v_3, \dots\}$ als Platzhalter für unsichtbare Bindungsvariablen, die Variablen in $\mathcal{V}'' = \{v_1, v_4, \dots\}$ als Platzhalter für sichtbare Bindungsvariablen und die Variablen in $\mathcal{V}''' = \{v_2, v_5, \dots\}$ als Platzhalter für Operanden. Weiter setzen wir für $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{V}'_k := \{v_{3j} \,;\, j \in k\} \qquad \mathcal{V}''_k := \{v_{3j+1} \,;\, j \in k\} \qquad \mathcal{V}'''_k := \{v_{3j+2} \,;\, j \in k\}$$

Jedem $\varphi \in L_{\text{sup}}$ lassen sich drei Zahlen zuordnen:

$$\begin{aligned} k_\varphi &:= \min\big\{k \in \mathbb{N} \,;\, (\operatorname{var}\varphi \cup \operatorname{bind}\varphi) \cap \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}'_k\big\} \\ m_\varphi &:= \min\big\{m \in \mathbb{N} \,;\, (\operatorname{var}\varphi \cup \operatorname{bind}\varphi) \cap \mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{V}''_m\big\} \\ n_\varphi &:= \min\big\{n \in \mathbb{N} \,;\, (\operatorname{var}\varphi \cup \operatorname{bind}\varphi) \cap \mathcal{V}''' \subseteq \mathcal{V}'''_n\big\} \end{aligned}$$

Ist beispielsweise $m_\varphi = 3$, so bedeutet dies, dass $v_7 = v_{3\cdot(3-1)+1}$ die „größte“ Variable aus $\mathcal{V}''$ ist, die in φ vorkommt. Gilt $n_\varphi = 0$, so kommen in φ keine Variablen aus $\mathcal{V}'''$ vor.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_{k_\varphi} &= \{v_{3j} \,;\, j \in k_\varphi\} = \{v_0, v_3, \dots, v_{3(k_\varphi - 1)}\} \\ \mathcal{V}''_{m_\varphi} &= \{v_{3j+1} \,;\, j \in m_\varphi\} = \{v_1, v_4, \dots, v_{3(m_\varphi - 1)+1}\} \\ \mathcal{V}'''_{n_\varphi} &= \{v_{3j+2} \,;\, j \in n_\varphi\} = \{v_2, v_5, \dots, v_{3(n_\varphi - 1)+2}\} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{var}\varphi \cup \operatorname{bind}\varphi \subseteq \mathcal{V}'_{k_\varphi} \cup \mathcal{V}''_{m_\varphi} \cup \mathcal{V}'''_{n_\varphi}$$

Ein **potentieller Definiens** ist ein $\varphi \in L_{\text{sup}}$ mit

$$\operatorname{bind}\varphi = \mathcal{V}'_{k_\varphi} \cup \mathcal{V}''_{m_\varphi} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{V}'''_{n_\varphi} \subseteq \operatorname{var}\varphi \;.$$

D.h. in einem potentiellen Definiens φ sind die Bindungsvariablen gerade die ersten k_φ Platzhalter für unsichtbare Bindungsvariablen und die ersten m_φ Platzhalter für sichtbare Bindungsvariablen. Weiter enthalten die Operanden-Variablen die ersten n_φ Platzhalter für Operanden. Insbesondere kommen also die Platzhalter für Operanden nicht als Bindungsvariablen vor.

[4]Man beachte auch das nächste Kapitel, in dem viele Syntaxerweiterungen getätigt werden.

Ist φ ein potentieller Definiens und $\vec{w} \in {}^{k_\varphi}\mathcal{V}$, $\vec{u} \in {}^{m_\varphi}\mathcal{V}$ und $\vec{\alpha} \in {}^{n_\varphi}L_{\text{sup}}$ so schreiben wir anstatt[5]

$$\varphi\frac{\vec{w} \qquad\qquad \vec{u} \qquad\qquad \vec{\alpha}}{v_0\ v_3\ \ldots\ v_{3(k_\varphi-1)}\ v_1\ v_4\ \ldots\ v_{3(m_\varphi-1)+1}\ v_2\ v_5\ \ldots\ v_{3(n_\varphi-1)+2}}$$

auch kürzer

$$\varphi\frac{\vec{w}\ \vec{u}\ \vec{\alpha}}{v_0\ v_1\ v_2} .$$

Damit setzen wir:

$$\varphi(\vec{u},\vec{\alpha}) := \varphi\frac{\vec{\mathfrak{v}}_\varphi(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \vec{u}\ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad v_1\ v_2}$$

wobei $\vec{\mathfrak{v}}_\varphi(\vec{u}\ \vec{\alpha}) := \big\langle \mathfrak{v}_0(\vec{u}\ \vec{\alpha}),\ \ldots\ , \mathfrak{v}_{k_\varphi-1}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\big\rangle$.

Sei L_{def} die Menge aller potentiellen Definientia und $D : I_D \to L_{\text{def}}$ eine Abbildung mit $I_D \subseteq \mathbb{N} \setminus 7$. Wir setzen $\delta_i := D\ulcorner i \lrcorner$ für $i \in I_D$ und $\overline{I}_D := I_{\text{GO}} \cup I_D$. Wir nennen D eine **Prä-Syntaxerweiterung**, falls die durch

$$i \prec_D j \qquad \text{:gdw.} \qquad j \in I_D \text{ und } i \in \operatorname{opi} \delta_j$$

auf $\overline{I}_D \sqcap \overline{I}_D$ definierte Relation $\prec_D$ wohlfundiert ist.[6]

Wir setzen dann weiter $k_i := k_{\delta_i}$, $m_i := m_{\delta_i}$, $n_i := n_{\delta_i}$ für $i \in I_D$ sowie $m_i := 0$ und $n_i := 2$ für die Grundjunktoren (d.h. für $i \in I_{\text{GJ}}$) und $m_i := 1$ und $n_i := 1$ für die Grundquantoren (d.h. für $i \in I_{\text{GQ}}$).

Durch eine Prä-Syntaxerweiterung D ist ein Ausdruckskalkül bestimmt:

$$\mathcal{AK}_D := \Big\{ \boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,m_i,n_i}\ ;\ i \in \overline{I}_D, \vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V} \Big\} = \mathcal{AK}_{\text{CL}} \cup \Big\{ \boldsymbol{Operator}^{\vec{u}}_{i,m_i,n_i}\ ;\ i \in I_D, \vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V} \Big\} .$$

Wir erhalten also eine erweiterte klassenlogische Ausdrucksmenge

$$L_D := G_{\mathcal{AK}_D} .$$

Um die Interpretation der erweiterten Ausdrücke festzulegen, wollen wir eine Abbildung definieren, die einen Ausdruck mit Syntaxerweiterungen in einen Ausdruck ohne Syntaxerweiterungen übersetzt. Dazu definieren wir zuerst eine „1-Step-Reduktion“

$$\mathrm{R}_D : L_D \to L_D,\ \varphi \mapsto \begin{cases} \varphi, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \text{ mit } i \in I_{\text{GO}} \\ \delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}), & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \text{ mit } i \in I_D \end{cases}$$

Der entscheidende Fall ist natürlich der letzte: ein Ausdruck $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ mit $i \in I_D$ wird „ausgepackt“ indem die Parameter $\vec{u}$ und $\vec{a}$ in das „Definiens“ δ_i eingesetzt werden. Der folgende Satz besagt, dass nach endlichmaligem Anwenden der „1-Step-Reduktion“ alle Definitionen ausgepackt sind und ein Ausdruck der Klassenlogik ohne Syntaxerweiterungen vorliegt.

[5] Man vergewissere sich, dass eine für die starre Substitution notwendige „Substitutions-Konstellation“ vorliegt.

[6] Diese Wohlfundiertheitsbedingung verhindert zirkelhafte Operatordefinitionen. Man erinnere sich daran, dass $\operatorname{opi} \varphi$ die Menge aller in φ vorkommenden Operatorindices ist.

3.1 Satz

i) Für alle $\varphi \in L_D$ gilt

$$\mathrm{R}_D\,\varphi = \varphi \quad \textit{gdw.} \quad \varphi \in L_{\mathrm{CL}}\ .$$

ii) Für alle $\varphi \in L_D$ existiert ein $d \in \mathbb{N}$ mit[7]

$$(\mathrm{R}_D)^{d}\ulcorner\varphi\lrcorner \in L_{\mathrm{CL}}\ .$$

Beweis: Siehe Satz B.1 im Anhang. ■

Es ist also die folgende „Übersetzungs"-Abbildung wohldefiniert:

$$\mathrm{Red}_D : L_D \to L_{\mathrm{CL}},\ \varphi \mapsto (\mathrm{R}_D)^{d_\varphi}\ulcorner\varphi\lrcorner \qquad \text{wobei } d_\varphi := \min\left\{d \in \mathbb{N}\,;\ (\mathrm{R}_D)^{d}\ulcorner\varphi\lrcorner \in L_{\mathrm{CL}}\right\}$$

Nun können wir mit $\mathrm{frei}_D := \mathrm{frei} \lhd \mathrm{Red}_D$ den Begriff des „freien Vorkommens" auf die erweiterte Klassenlogik übertragen.[8]

Eine Prä-Syntaxerweiterung D mit

$$\mathrm{frei}_D\,\delta_i \subseteq \mathcal{V}''' \qquad \text{für alle } i \in I_D$$

ist eine **Syntaxerweiterung** (der Klassenlogik). In einer Syntaxerweiterung wird also gefordert, dass in allen „Definitionskernen" δ_i die Platzhalter für unsichtbare und sichtbare Bindungsvariablen nur gebunden vorkommen.

Durch eine Syntaxerweiterung D ist mit

$$L_{\mathrm{CL}_D} := L_D\ , \quad \mathscr{M}_{\mathrm{CL}_D} := \mathscr{M}_{\mathrm{CL}}\ , \quad \mathrm{VER}_{\mathrm{CL}_D} := \mathrm{VER}_{\mathrm{CL}}$$

und

$$\mathrm{INT}_{\mathrm{CL}_D} : \mathscr{M}_{\mathrm{CL}_D} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}},\ \mathfrak{I} \mapsto \mathrm{INT}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner\ \lhd\ \mathrm{Red}$$

ein logisches System CL_D bestimmt. Für $\mathrm{INT}_{\mathrm{CL}_D}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$ schreiben wir im Folgenden $\tilde{\mathfrak{I}}$. Unter $\overline{\mathfrak{I}}$ verstehen wir noch immer $\mathrm{INT}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\mathfrak{I}\lrcorner$.

3.2 Theorem

CL *und* CL_D *sind äquivalente logische Systeme.*

Beweis:
(i) CL_D ist eine konservative Erweiterung von CL:

Wir wählen

$$A : L_{\mathrm{CL}} \to L_D,\ \varphi \mapsto \varphi \qquad \text{und} \qquad \Psi := \emptyset\ .$$

Zu zeigen ist also

$$\Phi \vDash_{\mathrm{CL}} \varphi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \vDash_{\mathrm{CL}_D} \varphi \qquad \text{für alle } \Phi \subseteq L_{\mathrm{CL}},\ \varphi \in L_{\mathrm{CL}}\ .$$

[7] $(\mathrm{R}_D)^d$ bezeichne die d-fache Komposition $\mathrm{R}_D \lhd \ldots \lhd \mathrm{R}_D$.
[8] Auch frei_D wollen wir durch $\vec{\gamma} \mapsto \bigcup_{i \in \mathrm{len}\,\vec{\gamma}} \mathrm{frei}_D\,\gamma_i$ auf Sequenzen (aus ${}^\star L_D$) fortsetzen.

Dies ist aber klar, da für alle $\mathfrak{I} \in \mathscr{M}_{\mathrm{CL}_D} = \mathscr{M}_{\mathrm{CL}}$ wegen $\tilde{\mathfrak{I}} \restriction L_{\mathrm{CL}} = (\overline{\mathfrak{I}} \triangleleft \mathrm{Red}_D) \restriction L_{\mathrm{CL}} = \overline{\mathfrak{I}}$ insbesondere

$$\mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{CL}} \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{CL}_D} \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L_{\mathrm{CL}} \ .$$

(ii) CL ist eine konservative Erweiterung von CL_D:

Wir wählen

$$A := \mathrm{Red}_D : L_D \to L_{\mathrm{CL}} \qquad \text{und} \qquad \Psi := \emptyset \ .$$

Zu zeigen ist also

$$\Phi \vDash_{\mathrm{CL}_D} \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{Red}_D \lceil \Phi \rfloor \vDash_{\mathrm{CL}} \mathrm{Red}_D\, \varphi \qquad \text{für alle } \Phi \subseteq L_D,\ \varphi \in L_D \ .$$

Aber auch das ist klar, da für alle $\mathfrak{I} \in \mathscr{M}_{\mathrm{CL}_D} = \mathscr{M}_{\mathrm{CL}}$ insbesondere

$$\mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{CL}_D} \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{CL}} \mathrm{Red}_D\, \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L_D \ ,$$

wegen $\tilde{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}} \triangleleft \mathrm{Red}_D$. ■

Auch für die erweiterte Klassenlogik CL_D lässt sich ein adäquater Beweiskalkül angeben. Hierzu erweitern wir zuerst die Substitution. Vollkommen analog zu Lemma 2.4 (Wohldefiniertheit der Substitution in CL) zeigt man das folgende Lemma.

3.3 Lemma

Es gibt eine Abbildung $\mathrm{sub}' : L_{\mathrm{CL}} \sqcap L_D \sqcap \mathcal{V} \to L_D,\ \langle \varphi, \gamma, v \rangle \mapsto \varphi^{\gamma}_{v}$, *sodass*

$$\varphi^{\gamma}_{v} = \begin{cases} \gamma, & \textit{falls } \varphi = v \\ \varphi, & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{V} \setminus v \\ \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha^{\gamma}_{v}, \beta^{\gamma}_{v} \rangle \rangle, & \textit{falls } \varphi = \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle \textit{ mit } i \in I_{GJ} \\ \varphi, & \textit{falls } \varphi = \langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \rangle \textit{ mit } i \in I_{GQ} \ \textit{und } \gamma = v \textit{ oder } v \notin \mathrm{frei}\, \varphi \\ \langle i, \langle \tilde{u} \rangle, \langle (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v} \rangle \rangle, & \phantom{\textit{falls } \varphi = \langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \rangle \textit{ mit } i \in I_{GQ}}\ \textit{sonst} \end{cases}$$

$$\textit{wobei } \tilde{u} := \begin{cases} u, & \textit{falls } u \notin \mathrm{frei}_D\, \gamma \\ \mathfrak{v}^{\mathrm{nfr}}_0(v\ \gamma\ \alpha), & \textit{sonst}^{9} \end{cases} ; \qquad \textit{in beiden Fällen ist also } \tilde{u} \notin \mathrm{frei}_D(v\ \gamma\ \varphi).$$

Insbesondere ist $\varphi^{\gamma}_{v} = \varphi$, *falls* $\gamma = v$ *oder* $v \notin \mathrm{frei}\, \varphi$.

Durch

$$\mathrm{sub}_D : L_D \sqcap L_D \sqcap \mathcal{V} \to L_D,\ \langle \varphi, \gamma, v \rangle \mapsto \mathrm{sub}' \ulcorner \langle \mathrm{Red}_D\, \varphi, \gamma, v \rangle \lrcorner$$

erhalten wir damit die gewünschte Substitutionsabbildung. Offenbar gilt $\mathrm{sub} \subseteq \mathrm{sub}_D$.[10] Wieder schreiben wir einfach φ^{γ}_{v} für $\mathrm{sub}_D \ulcorner \varphi, \gamma, v \lrcorner$.

Auch der Begriff des booleschen Ausdrucks lässt sich leicht erweitern: Ein Ausdruck $\varphi \in L_D$ ist **boolesch**, wenn $\mathrm{Red}_D\, \varphi$ boolesch ist.

Folglich lassen sich alle Schlussregeln des klassenlogischen Kalküls auf Ausdrücke aus L_D verallgemeinern. Um einen vollständigen Beweiskalkül für CL_D anzugeben, benötigen wir jedoch noch

[9] Es ist klar wie $\mathfrak{v}^{\mathrm{nfr}}_0(\cdot)$ mit frei_D auf ${}^{\star}L_D$ erweitert werden kann.
[10] Siehe Lemma 2.4.

weitere Regeln, die es uns erlauben „Definitionsumformungen“ zu tätigen. Hierzu führen wir den Begriff der **syntaktischen Äquivalenz** $=_S$ ein:

Es sei $=_S$ die kleinste Äquivalenzrelationen auf L_D mit[11]

(i) Wenn $\alpha =_S \gamma$ und $\beta =_S \delta$ dann auch $\big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle\rangle, \langle \gamma, \delta\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\mathrm{GJ}}$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in L_D$

(ii) Wenn $\alpha =_S \beta$ dann auch $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle u\rangle, \langle \beta\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\mathrm{GQ}}$, $\alpha, \beta \in L_D$, $u \in \mathcal{V}$

(iii) $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle w\rangle, \langle \alpha\frac{w}{u}\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\mathrm{GQ}}$, $\alpha \in L_D$, $u, w \in \mathcal{V}$ mit $w \notin \mathrm{frei}_D\, \alpha \setminus u$

(iv) Wenn $\alpha =_S \beta$ und $\gamma =_S \delta$ dann auch $\alpha\frac{\gamma}{u} =_S \beta\frac{\delta}{u}$, für alle $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in L_D$, $u \in \mathcal{V}$

(v) $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle =_S \delta_i \frac{\vec{w}\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0\ \ v_1\ \ v_2}$ für alle $i \in I_D$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$ und alle injektiven $\vec{w} \in {}^{k_i}\mathcal{V}$, sodass $w_j \notin \mathrm{frei}_D(\vec{u}\ \vec{\alpha})$ für alle $j \in \mathrm{len}\, \vec{w}$

Die Bedingung (v) wird es uns ermöglichen, in syntaktischen Beweisen von Definiens zu Definiendum (und umgekehrt) überzugehen. Die Bedingungen (iii) und (iv) sind eigentlich nicht unbedingt nötig, erlauben es uns aber in manchen Situationen einfachere formale Beweise zu führen.[12] Die Bedingung (iii) wird manchmal auch Alpha-Äquivalenz genannt.

Leicht lässt sich die syntaktische Äquivalenz auf ${}^\star L_D$ erweitern:

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle =_S \langle \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \qquad \text{:gdw.} \qquad \alpha_j =_S \beta_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Der Beweiskalkül $\mathcal{BK}_D$ für die durch D erweiterte Klassenlogik CL_D bestehe aus allen Schlussschemata aus $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$, wobei hierbei natürlich an entsprechenden Stellen beliebige Ausdrücke aus L_D zugelassen sind,[13] und den zusätzlichen Regeln:[14]

$$SEQ_{\Gamma,\Gamma'}: \quad \frac{\Gamma}{\Gamma'} \qquad \text{für alle } \Gamma, \Gamma' \in {}^\star L_D \setminus \langle\rangle \text{ mit } \Gamma =_S \Gamma'$$

3.4 Satz

$\mathcal{BK}_D$ ist ein adäquater Beweiskalkül für CL_D.

Beweis: Siehe Unterabschnitt B.2 im Anhang. ■

Nach dem Einsehen des Adäquatheitssatzes, würde sich die durch die folgende zusätzliche Bedingung gegebene Erweiterung der syntaktischen Äquivalenz anbieten:

(vi) $\alpha =_S \beta$ für alle $\alpha, \beta \in L_D$ mit $\emptyset \vdash_D \alpha = \beta$

[11] D.h. der Durchschnitt aller Äquivalenzrelationen mit den genannten Eigenschaften.
[12] Zudem stellen sie im großen Kalkül in Kapitel 5, in dem die Substitution nicht nur ein Meta-Bestandteil der Syntax ist, eine echte Erweiterung dar, wenn wir nicht nur an parameterlosen Schlussschemata interessiert sind.
[13] Daher müssen wir natürlich auch die erweiterten Abbildungen frei_D und sub_D verwenden.
[14] Wir schreiben im Folgenden $\vdash_D$ für $\vdash_{\mathcal{BK}_D}$.

Die dadurch ebenfalls erweiterte Regel *SEQ* ermöglicht uns dann insbesondere tautologische Äquivalenzumformungen auch in unter Quantoren stehenden Teilausdrücken in übersichtlicher Art und Weise vorzunehmen.

Dem aufmerksamen Leser ist sicherlich aufgefallen, dass es durch diese Änderung jedoch zu einer zirkulären Abhängigkeit von $\vdash_D$ und $=_S$ kommt. In anderen Worten: die beiden Relationen müssen gemeinsam definiert werden. Genau das werden wir in Kapitel 5 tun.[15]

Mit der Korrektheit von $\vdash_D$ folgt unmittelbar aus der Bedingung (vi), dass es sich bei der so erweiterten Relation $=_S$ dann um keine geringere, als die im Anhang verwendete „Interpretations-Äquivalenz" $=_I$ handelt.[16]

3.1. Operator-Darstellungen

Im bisherigen Teil dieses Kapitels haben wir dargestellt, wie sich aufbauend auf den sechs Grundoperatoren weitere Operatoren einführen lassen. Auch alle dadurch hinzukommenden Ausdrucksbildungsregeln haben die Gestalt

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{array}}{\big\langle i, \vec{u}, \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\rangle\big\rangle}\ .$$

Für systematische Untersuchungen ist die Tupel-Gestalt $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$ von großem Vorteil, wie man hoffentlich in den letzten beiden Kapiteln (und insbesondere im Anhang) sehen konnte. Nichtsdestotrotz würde man in der praktischen Verwendung bei derartig dargestellten Ausdrücken sehr schnell Schwierigkeiten bekommen, die Bedeutung der Ausdrücke zu erfassen. Genau aus diesem Grunde haben wir ja auch für alle bisher betrachteten konkreten Operatoren die üblichen spezifischen Darstellungen (wie z.B. $(\alpha = \beta)$ für $\big\langle 1, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle\big\rangle$ oder $\forall v\alpha$ für $\big\langle 4, \langle v\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle$) als lesbare *Schreibweisen* mit angegeben.

Da jedoch derartige Schreibweisen zumeist keinen systematischen Charakter haben, sondern vielmehr rein historischen Ursprungs sind und es zudem vielen Operatoren an einer symbolischen Darstellung mangelt, sodass man für gewöhnlich eine wort-sprachliche Bezeichnung (wie zum Beispiel bei „$\langle G, \circ\rangle$ ist eine Gruppe") verwendet, wollen wir nun eine lesbare *und* systematische Darstellung vorstellen, die im Übrigen auch die Grundlage für den in Kapitel 6 angekündigten Proof-Checker ist:

Für jeden Operator (mit Operatorindex i) ist ein **Name** zu wählen, mit dem wir dann den Ausdruck $\big\langle i, \langle u_1, \dots, u_m\rangle, \langle a_1, \dots, a_n\rangle\big\rangle$ (hierbei sei $m := m_i$ und $n := n_i$) auch folgendermaßen angeben können:

[15] Genau genommen muss dann auch der Beweis des Korrektheitssatzes angepasst werden. Es wäre wohl besser gleich von Anfang an $\alpha =_S \beta$ als Abkürzung für $\emptyset \vdash_D \alpha = \beta$ aufzufassen. Manche der Forderungen (i) - (iv) ließen sich dann vermutlich sogar beweisen.

[16] $\alpha =_I \beta$: gdw. $\mathfrak{I}\ulcorner\alpha\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\beta\lrcorner$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$. Wir zeigen im Anhang, dass $=_S \subseteq =_I$, wobei hier $=_S$ die noch nicht erweiterte syntaktische Äquivalenz bezeichnet.

a) im Falle eines booleschen Operators[17]

$$[u_1, \dots, u_m; a_1, \dots, a_n]\mathbf{Name}$$

b) im anderen Fall

$$\mathbf{Name}[u_1, \dots, u_m; a_1, \dots, a_n]$$

Falls $m = 0$, so schreiben wir

$$[a_1, \dots, a_n]\mathbf{Name} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Name}[a_1, \dots, a_n]$$

und wenn auch $n = 0$ zumeist sogar einfach $\mathbf{Name}$ anstatt $[]\mathbf{Name}$ bzw. $\mathbf{Name}[]$.

Auf etwaige spezifische Schreibweisen wollen wir jedoch im Folgenden keineswegs verzichten; sie sind einfach als optional anzugebende Aliase aufzufassen. Es seien dabei keinerlei stilistische Vorgaben gemacht. Zudem können auch mehrere spezifische Schreibweisen angegeben werden und situationsabhängig Klammern weggelassen werden. Selbst prinzipiell uneindeutige Schreibweisen werden sicherlich vorkommen. Wichtig ist nur, dass in der jeweiligen konkreten Verwendung aus dem Kontext ersichtlich ist, welchen Operator man gerade bezeichnen möchte.

Für die Grundoperatoren setzen wir:

eigentliche mathematische Repräsentation	systematische lesbare Darstellung	optionale spezifische Darstellung
$\langle 1, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle$	$[\alpha, \beta]\mathbf{Equal}$	$(\alpha = \beta)$
$\langle 2, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle$	$[\alpha, \beta]\mathbf{And}$	$(\alpha \wedge \beta)$
$\langle 3, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle$	$[\alpha, \beta]\mathbf{Element}$	$(\alpha \in \beta)$
$\langle 4, \langle v \rangle, \langle \alpha \rangle \rangle$	$[v; \alpha]\mathbf{All}$	$\forall v \alpha$
$\langle 5, \langle v \rangle, \langle \alpha \rangle \rangle$	$\mathbf{The}[v; \alpha]$	$\iota v \alpha$
$\langle 6, \langle v \rangle, \langle \alpha \rangle \rangle$	$\mathbf{Class}[v; \alpha]$	$\{v; \alpha\}$

Da die konkrete Wahl der Operatorindices vollkommen irrelevant ist, wollen wir von nun an, bei der Definition neuer Operatoren, auf die Angabe der eigentlichen mathematischen Repräsentation verzichten; d.h. die noch folgenden Operator-Definitionen haben die Gestalt:

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
$[u_1, \dots, u_m; a_1, \dots, a_n]\mathbf{Name}$ bzw. $\mathbf{Name}[u_1, \dots, u_m; a_1, \dots, a_n]$	der definierende Ausdruck δ	(optional)

Wie sich derartige Definitionen als Syntaxerweiterungen im exakten Sinne auffassen lassen, sollte in jedem konkreten Falle klar sein. Insbesondere sind alle von $u_1, \dots, u_m, a_1, \dots, a_n$ verschiedenen in δ vorkommenden Variablen als unsichtbare Bindungsvariablen aufzufassen.

[17] D.h. wenn der zugehörige definierende Ausdruck δ_i boolesch ist.

3.2. Theoreme als Schlussschemata

Für gewöhnlich versteht man unter einem Theorem in prädikatenlogischen Systemen eine Behauptung der Form $\Phi \vdash \varphi$ samt einem Nachweis dieser Beziehung. So würde man etwa die Aussage „Alle Gruppen mit ausschließlich selbstinversen Elementen sind abelsch." exakt ausdrücken durch

$$\text{Theorem A:} \qquad \underbrace{\Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\forall x(x \circ x = e)\}}_{\Phi_0} \quad \vdash \quad \underbrace{\forall x \forall y(x \circ y = y \circ x)}_{\varphi_{\mathrm{abelsch}}}$$

Hierbei sei Φ_{Gr} etwa $\{\forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)), \forall x \exists y(x \circ y = e), \forall x(x \circ e = x)\}$

Nun ist es aber so, dass die meisten Theoreme dazu bestimmt sind, in einem anderen Kontext *angewendet* zu werden. So können wir mit Theorem A leicht feststellen, dass die Permutations-Gruppe

$$H := \{(), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

(mit der Komposition[18] $\lhd$ als Verknüpfung und der Identität () als neutralem Element) abelsch ist.

Wie lässt sich ein derartiges Anwenden von Theoremen in einem exakten axiomatischen Rahmen beschreiben?

Zunächst ist ein formales System X notwendig, in dem wir die Gruppe $\langle H, \lhd, ()\rangle$ definieren und untersuchen können. Ein naheliegender Kandidat hierfür ist die Prädikatenlogik erster Stufe mit dem ZFC-Axiomensystem. Für den weiteren Anwendungsverlauf gibt es dann mindestens zwei Möglichkeiten:

(A) Da ZFC stark genug ist die Syntax und Semantik der Prädikatenlogik zu fassen, können wir $\Phi_0 \vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$ als eine mengentheoretische Aussage auffassen und beweisen, d.h. wir können ZFC $\vdash$ „$\Phi_0 \vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$" zeigen, wobei die Aussage $\Phi_0 \vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$ in die ZFC-Sprache „hineincodiert" werden muss. Mit dem internen Korrektheitssatz erhalten wir dann weiter ZFC $\vdash$ „$\Phi_0 \vDash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$". Da sich ZFC $\vdash$ „$\langle H, \lhd, ()\rangle \Vdash \Phi_0$" zeigen lässt, gilt somit auch ZFC $\vdash$ „$\langle H, \lhd, ()\rangle \Vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$". Mit Hilfe der internen Modellbeziehungs-Definition erhalten wir schließlich die gewünschte Aussage ZFC $\vdash$ „$\forall a, b \in H.\ a \lhd b = b \lhd a$".

   Diese Herangehensweise entspricht wohl in etwa einem intuitiven Anwenden von Theorem A. Die vielen Zwischenschritte sind einem nur deshalb nicht bewusst, da sie einem einheitlichen sich immer wiederholenden Prinzip folgen und zudem das die Argumentation tragende System X üblicherweise nicht als ein formales System aufgefasst wird, sondern dem über viele Jahre angereicherten, intuitiven, inhaltlichen mathematischen Denken entspricht.

(B) Alternativ lässt sich der formale Beweis für $\Phi_0 \vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$ als eine schematische Konstruktionsanweisung lesen, aus der wir für die konkrete Gruppe $\langle H, \lhd, ()\rangle$ einen konkreten Beweis für $\forall a, b \in H.\ a \lhd b = b \lhd a$ gewinnen können.

   Der hieraus entstehende formale Beweis für ZFC $\vdash$ „$\forall a, b \in H.\ a \lhd b = b \lhd a$" wird ohne Frage kürzer sein als das entsprechende Analogon gemäß (A). Nur entspricht dieses Wiederholen des Beweises von $\Phi_0 \vdash \varphi_{\mathrm{abelsch}}$ für jeden konkreten Fall nicht dem Modularisierungsprinzip der modernen Mathematik.

[18] In gruppentheoretischen Zusammenhängen wird das Symbol $\lhd$ oft für die Normalteiler-Beziehung verwendet. Wir verstehen in dieser Arbeit unter $\lhd$ *immer* die Komposition von Korrespondenzen. Vielleicht wäre es aufgrund dieser Doppeldeutigkeit angebracht das Kompositionssymbol noch etwas anzupassen.

Bei der oben gestellten Frage handelt es sich allgemeiner um die Frage, wie sich formale Beweise bzgl. eines Axiomensystems in formalen Beweisen bzgl. eines anderen Axiomensystems nutzen lassen.

Wir wollen nun darauf eingehen, wie wir in der Klassenlogik mit diesem „Problem“ umgehen werden. Die entscheidenden Ausgangspunkte sind hierbei, dass wir von Anfang an in *einem* formalen System arbeiten und zudem den Ansatz „Theoreme sind Schlussschemata“ verfolgen wollen. Anstatt also einen absoluten Beweis für $\Phi_0 \vdash \varphi_{\text{abelsch}}$ zu führen, würden wir die Ableitbarkeit des Schlussschemas[19]

$$\mathit{TheoremA}(\boldsymbol{G}, \circ, \boldsymbol{e}) : \quad \frac{\begin{array}{ll} \Gamma & [\boldsymbol{G}, \circ, \boldsymbol{e}]\mathbf{Gruppe} \\ \Gamma & \forall a \in \boldsymbol{G}\,.\ (a \circ a = \boldsymbol{e}) \end{array}}{\begin{array}{ll} \Gamma & \forall a, b \in \boldsymbol{G}\,.\ (a \circ b = b \circ a) \end{array}}$$

zeigen.[20] Der Vorteil dabei ist nämlich, dass Schlussschemata dafür gemacht sind, angewendet zu werden. Durch jedes in der Klassenlogik als Schlussschema abgeleitete Theorem erweitern wir also unseren Schlussapparat und ermöglichen uns dadurch ein unmittelbares Anwenden der bereits gewonnen Resultate. Um ***TheoremA*** im Beweise des klassenlogischen Analogons von ZFC $\vdash$ „$\forall a, b \in H.\ a \triangleleft b = b \triangleleft a$“ zu verwenden, sind zunächst die klassenlogische Operatoren (oder zumindest Terme) $\mathbf{ZFC}$, H, $\triangleleft$ und $()$ zu definieren, mit denen sich dann die folgende Ableitung tätigen lässt:

$$\begin{array}{rlll}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n. & \mathbf{ZFC} & [H, \triangleleft, ()]\mathbf{Gruppe} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m. & \mathbf{ZFC} & \forall a \in H\,.\ (a \triangleleft a = e) & \ldots \\
(m+1). & \mathbf{ZFC} & \forall a, b \in H\,.\ (a \triangleleft b = b \triangleleft a) & \mathit{TheoremA}(H, \triangleleft, ())\text{ auf } n. \text{ und } m.
\end{array}$$

Der Theoremanwendung entspricht ein einziger Schritt in unserer Ableitung. Wie die hier nur angedeutete Herangehensweise exakt durchgeführt werden kann, sollte nach dem Lesen des nächsten Kapitels klar sein.

Ein weiterer Vorteil dieser Herangehensweise ergibt sich daraus, dass zumeist keine rein prädikatenlogischen Theoreme vorliegen.[21] So beschäftigt sich die Gruppentheorie in den seltensten Fällen mit rein prädikatenlogischen Schlussfolgerungen aus den Gruppenaxiomen. Beispielsweise wird in dem noch sehr einfachen 1. Sylow-Satz neben den Gruppenelementen auch über natürliche Zahlen und Untergruppen gesprochen. In der Klassenlogik können wir jedoch leicht ein

[19] Mit entsprechend einzuführenden Operatoren und Schreibweisen wie $[\cdot,\cdot,\cdot]\mathbf{Gruppe}$, $\forall x_1, \ldots, x_n\,.\ \varphi$ bzw. $a \circ b$. Nach dem Lesen des nächsten Kapitels sollte klar sein, wie diese Operatoren zu definieren sind. Es ist entscheidend, dass es sich bei $\boldsymbol{G}$,$\circ$ und $\boldsymbol{e}$ um Metavariablen handelt.

[20] Da wir Relationen und Funktionen als Klassen von Paaren auffassen, müssen wir allerdings dafür sorgen, dass gewisse Klassen Mengen sind. Dies kann man in die Definition des Operators $[\cdot,\cdot,\cdot]\mathbf{Gruppe}$ einbauen, oder man fordert in einer zusätzlichen Prämisse, dass endliche Klassen Mengen sind. Wir werden das Zweitere tun. Es bietet sich an, die endliche Mengenlehre als Standard-Prämisse zu betrachten, da durch sie alle Relationen und Funktionen auf der Domäne gebildet werden können und die natürlichen Zahlen zur Verfügung stehen.

[21] Von der grundsätzlichen Zurückführbarkeit auf ZFC abgesehen.

entsprechendes Schlussschema formulieren:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma & \mathbf{ZFC} \\
\Gamma & [\boldsymbol{G}, \circ, \boldsymbol{e}]\mathbf{Gruppe} \\
\Gamma & [\boldsymbol{p}]\mathbf{Primzahl} \\
\Gamma & \boldsymbol{r}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \\
\Gamma & [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}]\mathbf{Teilerfremd} \\
\Gamma & |\boldsymbol{G}| = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{m} \\
\hline
\Gamma & \forall \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{r} + 1 \,.\, \exists U \subseteq \boldsymbol{G} \,.\, ([\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G}, \circ, \boldsymbol{e}]\mathbf{Untergruppe} \wedge |H| = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{s}})
\end{array}
$$

Es unterscheidet sich nicht grundsätzlich von unserem ***TheoremA***. Wir haben einfach ZFC zu unseren Prämissen hinzugefügt und schon können wir mengentheoretische Beweise führen.

Durch den Ansatz „Theoreme sind Schlussschemata“ haben wir nicht nur die beiden Ableitungskategorien „Schlussschemata“[22] und „Theoreme“ zu einer einzigen Kategorie vereinigt, sondern uns auch ein dem natürlichen Denken sehr nahekommendes „Arbeiten auf einem Tisch“ ermöglicht.

* * *

Wir wollen nun noch zwei praktische Ableitungsschreibweisen einführen.

a) Sich wiederholende Antezedenzen lassen Ableitungen unnötig kompliziert erscheinen. Sie sollen daher durch vertikale Striche symbolisiert werden. Die Ableitung

$$
\begin{array}{rllll}
1. & \Gamma & \varphi & \varphi & \text{VOR} \\
2. & \Gamma & \varphi \ \chi & \chi & \text{VOR} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n. & \Gamma & \varphi \ \chi & \psi & \ldots \\
(n+1). & \Gamma & \varphi \ \neg\chi & \neg\chi & \text{VOR} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m. & \Gamma & \varphi \ \neg\chi & \psi & \ldots \\
(m+1). & \Gamma & \varphi & \psi & \text{FU auf } n. \text{ und } m. \\
(m+2). & \Gamma & & \varphi \rightarrow \psi & \text{DED auf } (m+1).
\end{array}
$$

stellen wir also auch dar durch

[22] Im Übrigen kommt man auch in der Prädikatenlogik um abgeleitete Schlussregeln/Schlussschemata nicht herum.

1.	Γ	φ	VOR
2.		χ	VOR
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n.		ψ	$\ldots$
$(n+1)$.		$\neg\chi$	VOR
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m.		ψ	$\ldots$
$(m+1)$.		ψ	FU auf n. und m.
$(m+2)$.		$\varphi \to \psi$	DED auf $(m+1)$.

Insbesondere die „Annahmen-Winkel“ sind eine große Lesehilfe.

b) Manchmal möchte man einen nur lokal genutzten Namen X als abkürzende Schreibweise für einen Ausdruck φ einführen. Es wäre unangemessen einen eigenen Operator zu definieren. Auch die Zusatzannahme $X = \varphi$ zu treffen würde die Sache unnötig verkomplizieren.[23] Wir wollen X einfach als eine rein meta-sprachliche Abkürzung auffassen. Derartige Abkürzungen werden in formalen Ableitungen durch eingeschobene Zeilen der Gestalt

$$X := \varphi$$

getätigt.

[23]So müsste die Annahme in der Ableitung ja später auch wieder eliminiert werden. Weiter würden wir hin und und her substituieren müssen, wenn einerseits die Gestalt von φ und andererseits die Kompaktheit der Darstellung X genutzt werden sollte. Außerdem wäre darauf zu achten, dass X eine ungenutzte Variable bezeichnet.

4. Klassenlogische Mengenlehre

Die Mengenlehre hat mich seit meiner Studienzeit in besonderer Weise angezogen, doch hat mich die Diskrepanz zwischen der in der Logik üblichen prädikatenlogischen Sprache und Semantik und der tatsächlich verwendeten mathematisch-mengentheoretischen Sprache stets gestört.

Eine klassenlogische Sprache entspricht der tatsächlich verwendeten mathematischen Sprache weit besser als eine prädikatenlogische Sprache.

Arnold Oberschelp, *Allgemeine Mengenlehre*

Bis hierhin haben wir vor allem allgemeine Betrachtungen *über* die Klassenlogik angestellt. Wir wollen nun endlich dazu übergehen, das Arbeiten *in* der Klassenlogik vorzustellen. Um den Rahmen dieses Dokuments nicht zu sprengen, werden wir auf reine „Fleiß-Beweise“ verzichten bzw. nur Beweisskizzen angeben. Im Ganzen hat dieses Kapitel eher einen skizzenhaften Charakter. Zudem wollen wir uns im Wesentlichen auf drei Aspekte beschränken:

a) Ohne Zusatzaxiome ist in der Klassenlogik die Existenz keines einzigen Gegenstandes erster Stufe gesichert, d.h. die Domäne kann leer sein.[1] Weiter ist auch nicht gesichert, dass die Paarklasse zweier Gegenstände erster Stufe wieder ein Gegenstand erster Stufe ist. Dies bedeutet insbesondere, dass das Kuratowski-Paar $\{\{a, b\}, \{b\}\}$ die leere Klasse ergeben kann, selbst wenn a und b Gegenstände erster Stufe sind, d.h. das Kuratowski-Paar, welches rein syntaktisch immer gebildet werden kann, verhält sich nicht immer als ein solches. Mit der Forderung, dass endliche Klassen Gegenstände erster Stufe sind, lassen sich diese beiden Unannehmlichkeiten aus dem Wege räumen. Man kann den Standpunkt vertreten, dass es sich bei dieser Forderung um ein logisches Axiom handelt.[2]

b) Für die Einbettung von prädikatenlogischen Systemen in die Klassenlogik (siehe Anhang C) ist es notwendig einen Relations- und Funktionsbegriff in der Klassenlogik zur Verfügung zu haben. Wir werden daher in diesem Kapitel ebensolche Begriffe einführen und zeigen, dass sie sich auch semantisch entsprechend verhalten.[3] Damit schaffen wir einerseits die Grundlagen für den Anhang C, andererseits sind Relationen und Funktionen von solch grundlegender Natur, dass sie wohl in fast allen interessanten klassenlogisch formulierten Theorien vonnöten sind.

c) Wie schon mehrfach angesprochen, eignet sich die Klassenlogik insbesondere als eine Hintergrundlogik für einen mengentheoretischen Aufbau der Mathematik. Es liegt also nahe

[1] Siehe Unterabschnitt 2.2.1.

[2] In einem schwächeren Sinne nimmt Oberschelp mit seinem logischen Urpaar-Begriff diesen Standpunkt ein. Vgl. dazu auch Abschnitt 2.4.

[3] Die Auswahl der in diesem Kapitel gezeigten Lemmata ist wesentlich bestimmt durch die im Anhang C benötigten Aussagen.

darzustellen, wie sich die ZFC-Axiome in der Klassenlogik formulieren lassen und welche Vorteile eine solche Formulierung mit sich bringt. Hierbei werden wir nicht versuchen eine einfachstmögliche Formulierung zu finden. Vielmehr werden wir viele eingeführte Operatoren verwenden, sodass sich die Axiome fast wie eine umgangssprachliche Formulierung lesen lassen.

In Kapitel 2 hatten wir bereits einen Großteil der folgenden Operatoren eingeführt:[4]

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
True	$\forall v(v = v)$	$\top$
False	$\forall v v$	$\bot$
Nonsense	$\iota v \bot$	\$
Domain	$\{v; \top\}$	$\mathbb{D}$
Void	$\{v; \bot\}$	$\varnothing$, $\{\}$
$[a]$**Not**	$(a = \top) = \bot$	$\neg a$
$[a, b]$**Or**	$\neg(\neg a \wedge \neg b)$	$(a \vee b)$
$[a, b]$**Implies**	$\neg(a \wedge \neg b)$	$(a \to b)$
$[a, b]$**Iff**	$(a \to b) \wedge (b \to a)$	$(a \leftrightarrow b)$
$[v; a]$**Exists**	$\neg \forall v \neg a$	$\exists v a$
$[v; a]$**ExistsExactlyOne**	$\exists w \forall v(a \leftrightarrow v = w)$	$\exists^{=1} v a$
$[a, b]$**Inequal**	$\neg(a = b)$	$(a \neq b)$
$[a, b]$**NotElement**	$\neg(a \in b)$	$(a \notin b)$

Es ist sehr praktisch ein paar mehrstellige Versionen der schon eingeführten Operatoren zur Verfügung zu haben:

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
$[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$**And**	$(\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \ldots \wedge \varphi_n)$	$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$
$[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$**Or**	$(\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \ldots \vee \varphi_n)$	$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$
$[a_1, \ldots, a_n, b]$**Element**	$a_1 \in b \wedge \ldots \wedge a_n \in b$	$(a_1, \ldots, a_n \in b)$
$[v_1, \ldots, v_n; \varphi]$**All**	$\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi$	$\forall v_1, \ldots, v_n\ \varphi$
$[v_1, \ldots, v_n; \varphi]$**Exists**	$\exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi$	$\exists v_1, \ldots, v_n\ \varphi$

Es handelt sich offenbar um schematische Definitionen (für $n \geq 2$). Zudem betreiben wir hier zum ersten Mal ein „Namen-Overloading“.[5] Wir werden dieses bei Existenz- und Allquantor

[4]Dort haben wir sie jedoch noch als metasprachliche Abkürzungen aufgefasst. In diesem Kapitel werden wir es dagegen mit einer kontinuierlich wachsenden Syntaxerweiterung zu tun haben. Wir verzichten dabei natürlich auf entsprechende Indices, d.h. wir schreiben einfach L, $\mathfrak{I} \Vdash \varphi$, frei φ, $\mathfrak{I}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner}$, etc.

[5]Dies ist vollkommen unproblematisch, da sich aus den angegebenen Namen zusammen mit den

noch weiter ausreizen, indem wir auch die beschränkten Quantifikationen mit demselben Namen bezeichnen:

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$[v_1, \ldots, v_n; A, \varphi]$**All**	$\forall v_1, \ldots, v_n \, (v_1, \ldots, v_n \in A \to \varphi)$	$\forall v_1, \ldots, v_n \in A \,.\, \varphi$ oder $\forall_A \, v_1, \ldots, v_n \; \varphi$
$[v_1, \ldots, v_n; A, \varphi]$**Exists**	$\exists v_1, \ldots, v_n \, (v_1, \ldots, v_n \in A \wedge \varphi)$	$\exists v_1, \ldots, v_n \in A \,.\, \varphi$ oder $\exists_A \, v_1, \ldots, v_n \; \varphi$

4.1. Klassen und Mengen

Klassen und Mengen sind ohne Frage die wichtigsten Begriffsbildungen der Klassenlogik. Wir wollen nun die entsprechenden syntaktischen Operatoren angeben.

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$[A]$**Class**	$A = \{v; v \in A\}$	
$[A]$**Set**	$[A]$**Class** $\wedge A \in \mathbb{D}$	
Sets	$\{x; [x]$**Set**$\}$	
$[A]$**Inhabited**	$\exists x(x \in A)$	

Auf Seite 87 haben wir nichts anderes gezeigt, als dass Klassenterme Klassen bilden, d.h. wir haben die Regel

$$\frac{}{\Gamma \qquad [\{v; \alpha\}]\mathbf{Class}}$$

abgeleitet. **Sets** ist die Klasse aller Mengen. Man kann zeigen, dass[6]

$$[A]\mathbf{Inhabited} \quad \text{gdw.} \quad A \neq \varnothing \text{ und } [A]\mathbf{Class} \; .$$

Die eingeführten Operatoren sind so definiert, dass sie in einer konkreten Struktur die entsprechenden semantischen Objekte bzw. Sachverhalte adäquat beschreiben. Wir werden dies im Folgenden für einige Operatoren exemplarisch genauer begründen. Dabei beschränken wir uns jedoch an manchen Stellen darauf, zu zeigen, wie sich die Operatoren unter natürlichen Interpretationen verhalten.[7]

Bindungsvariablen- und Operanden-Stelligkeiten leicht ein eindeutiger Operator-Index wählen lässt.

[6]Hier beginnen wir langsam damit, die formale Ebene inhaltlich aufzufassen. Die exakte Formulierung dieser Aussage wäre: Für $A \in L$ ist die Regel

$$\frac{}{\Gamma \qquad [A]\mathbf{Inhabited} \leftrightarrow A \neq \varnothing \wedge [A]\mathbf{Class}}$$

zulässig (ja sogar ableitbar). Wir werden uns im Folgenden zunehmend liberaler ausdrücken. Es sollte jedoch immer aus dem Kontext ersichtlich sein, wie die entsprechenden Aussagen letztendlich im exakten Sinne aufzufassen wären.

[7]Man erinnere sich daran, dass in natürlichen Interpretationen (siehe Unterabschnitt 2.2.1) der Abstraktor im

4.1 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation.

(i) *Für $A \in L$ gilt:*

$$\mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class} \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}}$$

und

$$\mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Set} \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \in \mathrm{Set}_{\mathfrak{I}}$$

(ii) *Für $B, \varphi \in L$ und $v \in \mathcal{V}$ mit $v \notin \mathrm{frei}\, B$ und $\mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class}$ gilt:*

$$\mathfrak{I} \Vdash \forall v \in B \,.\, \varphi \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash \varphi \textit{ für alle } b \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner \urcorner$$

(iii) *Für $\varphi \in L$ und $x, y \in \mathcal{V}$ mit $x \neq y$ gilt:*

$$\mathfrak{I} \Vdash \forall x, y \in \mathbb{D} \,.\, \varphi \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,a\,b}_{x\,y} \Vdash \varphi \textit{ für alle } a, b \in D_{\mathfrak{I}}$$

Beweis:
(i): Sei $v \notin \mathrm{frei}\, A$ beliebig. Gelte $\mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}$, d.h. $\mathfrak{I} \Vdash A = \{v; v \in A\}$. Es folgt

$$\mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \{v; v \in A\} \lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} \ .$$

Gelte umgekehrt $\mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}}$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\ulcorner \{v; v \in A\} \lrcorner &= A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash v \in A \right\} \lrcorner \\
&= A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, b \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I}^{\,b}_{v}\ulcorner A \lrcorner \urcorner \right\} \lrcorner \\
&= A_{\mathfrak{I}}\ulcorner \{ b \in D_{\mathfrak{I}} \,;\, b \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \urcorner \} \lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt leicht.

(ii): Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \Vdash \forall v \in B \,.\, \varphi \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \forall v (v \in B \rightarrow \varphi) \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash v \in B \rightarrow \varphi \text{ für alle } b \in U_{\mathfrak{I}} \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash \varphi \text{ für alle } b \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash v \in B \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash \varphi \text{ für alle } b \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner \urcorner
\end{aligned}$$

(iii): Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \Vdash \forall x, y \in \mathbb{D} \,.\, \varphi \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \forall x, y (x, y \in \mathbb{D} \rightarrow \varphi) \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \forall x \forall y (x \in \mathbb{D} \wedge y \in \mathbb{D} \rightarrow \varphi) \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,a\,b}_{x\,y} \Vdash (x \in \mathbb{D} \wedge y \in \mathbb{D} \rightarrow \varphi) \text{ für alle } a, b \in U_{\mathfrak{I}} \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}^{\,a\,b}_{x\,y} \Vdash \varphi \text{ für alle } a, b \in D_{\mathfrak{I}}
\end{aligned}$$

Wesentlichen der Identität entspricht, d.h. Klassen- und Element-Begriff der Interpretation stimmen mit den entsprechenden meta-sprachlichen Begriffen überein.

■

Mit den folgenden Operatoren steht uns die übliche Klassenalgebra zur Verfügung.

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
$[A,B]$**Subclass**	$[A]$**Class** $\wedge$ $[B]$**Class** $\wedge\, \forall a \in A \,.\, a \in B$	$(A \subseteq B)$
$[A_1,\dots,A_n,B]$**Subclass**	$A_1 \subseteq B \wedge \dots \wedge A_n \subseteq B$	$(A_1,\dots,A_n \subseteq B)$
Union$[A_1,\dots,A_n]$	$\{z; z \in A_1 \vee \dots \vee z \in A_n\}$	$(A_1 \cup \dots \cup A_n)$
Intersection$[A_1,\dots,A_n]$	$\{z; z \in A_1 \wedge \dots \wedge z \in A_n\}$	$(A_1 \cap \dots \cap A_n)$
Complement$[A,B]$	$\{z; z \in A \wedge z \notin B\}$	$(A \setminus B)$
Complement$[A]$	$\{z; z \notin A\}$	A^c
Union$[i; I, A]$	$\{z; \exists i \in I \,.\, z \in A\}$	$\bigcup_{i \in I} A$
Intersection$[i; I, A]$	$\{z; \forall i \in I \,.\, z \in A\}$	$\bigcap_{i \in I} A$
HugeIntersection$[i; \varphi, A]$	$\{z; \forall i(\varphi \to z \in A)\}$	$\bigcap_{\varphi}^{i} A$, $\bigcap_{\varphi} A$ [8]

Es ließe sich etwa das De-Morgan'sche Gesetz

$$\left(\bigcap_{i \in I} A\right)^c = \bigcup_{i \in I} A^c$$

beweisen.

4.2 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine natürliche Interpretation.

(i) *Für alle $A, B \in L$ mit $\mathfrak{I} \Vdash [A]$***Class** *und $\mathfrak{I} \Vdash [B]$***Class** *gilt:*

$$\mathfrak{I} \Vdash A \subseteq B \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \subseteq \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner$$

(ii) *Für alle $A, B \in L$ gilt:*

$$\mathfrak{I}\ulcorner A \cup B \lrcorner = \begin{cases} \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \cup \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner, & \textit{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\ \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner, & \textit{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class} \\ \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner, & \textit{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\ \emptyset, & \textit{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class} \end{cases}$$

Beweis:
(i): Sei $v \notin \text{frei}(A\ B)$. Mit den Annahmen gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \Vdash A \subseteq B \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash \forall v \in A \,.\, v \in B \\ &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}_v^b \Vdash v \in B \text{ für alle } b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner\urcorner = \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \\ &\text{gdw.} \quad b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner\urcorner = \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner \text{ für alle } b \in \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \\ &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \subseteq \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner \end{aligned}$$

[8]Wenn sich die Variable i aus dem Kontext ergibt.

(ii): Sei $v \notin \mathrm{frei}(A\ B)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^\ulcorner A \cup B_\lrcorner &= \mathfrak{I}^\ulcorner\{v; v \in A \vee v \in B\}_\lrcorner \\
&= A_{\mathfrak{I}}{}^\ulcorner \left\{ b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash v \in A \text{ oder } \mathfrak{I}^{\,b}_{v} \Vdash v \in B \right\}{}_\lrcorner \\
&= \begin{cases}
\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}^\ulcorner A_\lrcorner{}^\urcorner \text{ oder } b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}^\ulcorner B_\lrcorner{}^\urcorner\}\,, & \text{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\
\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}^\ulcorner A_\lrcorner{}^\urcorner\}\,, & \text{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class} \\
\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\ b \in A_{\mathfrak{I}\llcorner}\mathfrak{I}^\ulcorner B_\lrcorner{}^\urcorner\}\,, & \text{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\
\emptyset, & \text{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class}
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\mathfrak{I}^\ulcorner A_\lrcorner \cup \mathfrak{I}^\ulcorner B_\lrcorner, & \text{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\
\mathfrak{I}^\ulcorner A_\lrcorner, & \text{falls } \mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class} \\
\mathfrak{I}^\ulcorner B_\lrcorner, & \text{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class} \\
\emptyset, & \text{falls } \mathfrak{I} \nVdash [A]\mathbf{Class}, \mathfrak{I} \nVdash [B]\mathbf{Class}
\end{cases}
\end{aligned}$$

■

Um über alle Teilklassen einer gegebenen Klasse zu quantifizieren, führen wir die folgenden Quantoren ein:

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$[X_1, \ldots, X_n; A, \varphi]\mathbf{AllClass}$	$\forall X_1, \ldots, X_n(X_1, \ldots, X_n \subseteq A \rightarrow \varphi)$	$\forall X_1, \ldots, X_n \subseteq A\,.\,\varphi$
$[X_1, \ldots, X_n; A, \varphi]\mathbf{ExistsClass}$	$\exists X_1, \ldots, X_n(X_1, \ldots, X_n \subseteq A \wedge \varphi)$	$\exists X_1, \ldots, X_n \subseteq A\,.\,\varphi$

Ist A die Domäne $\mathbb{D}$, so quantifizieren wir gerade über alle Klassen.

Zwei viel genutzte Varianten des Klassenbildungsoperators sind die beschränkte Klassenkomprehension $\{v \in A; \varphi\}$ und die Term-Klassenkomprehension $\{a; \varphi\}$ bei der a einen beliebigen Term (und nicht nur eine beliebige Variable) bezeichnet.

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$\mathbf{Class}[v; A, \varphi]$	$\{v; v \in A \wedge \varphi\}$	$\{v \in A; \varphi\}$
$\mathbf{ReplacementClass}[x_1, \ldots, x_n; a, \varphi]$	$\{v; \exists x_1, \ldots, x_n(\varphi \wedge z = a)\}$	$\{a\,;_{x_1,\ldots,x_n}\varphi\}$, $\{a; \varphi\}$ [9]

Für eine natürliche Interpretation gilt offenbar

$$\mathfrak{I}^\ulcorner\{a\,;_{x_1,\ldots,x_n}\varphi\}_\lrcorner = \left\{ \mathfrak{I}^{c_1 \ldots c_n}_{x_1 \ldots x_n}{}^\ulcorner a_\lrcorner\,;\ c_1, \ldots, c_n \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{c_1 \ldots c_n}_{x_1 \ldots x_n} \Vdash \varphi \right\} \cap D_{\mathfrak{I}}$$

[9] Der Index $_{x_1,\ldots,x_n}$ darf nur dann weggelassen werden, wenn der Bezug auf die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ aus dem Kontext ersichtlich ist.

4.2. Erblich endliche Mengen

Wie oben angekündigt, wollen wir nun fordern, dass alle endlichen Klassen Mengen sind. Zumindest die Existenz aller erblich endlichen Mengen[10] ist dadurch gesichert. Zudem steht uns damit bereits die Peano-Arithmetik zur Verfügung.[11] Alle konkreten endlichen Klassen kann man durch die folgenden Operatoren konstruieren:

Definiendum	Definiens	Schreibweise
FiniteClass[]	$\varnothing$	$\{\}$
FiniteClass[a]	$\{z; z = a\}$	$\{a\}$
FiniteClass[$a_1, \ldots, a_n$]	$\{z; z = a_1 \vee \ldots \vee z = a_n\}$	$\{a_1, \ldots, a_n\}$

Es lassen sich leicht Aussagen zeigen wie

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{D} \,.\, (\{a, b\} = \{c, d\} \to (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c))$$

Unter natürlichen Interpretationen entspricht **FiniteClass**[. . .] seinem meta-sprachlichen Analogon:

4.3 Lemma

Für alle natürlichen Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in L$ gilt

$$\mathfrak{I}^\ulcorner \{a_1, \ldots, a_n\}_\lrcorner = \{\mathfrak{I}^\ulcorner a_{1\lrcorner}, \ldots, \mathfrak{I}^\ulcorner a_{n\lrcorner}\} \cap D_\mathfrak{I}$$

Beweis: Sei $z \notin \text{frei}(a_1 \ldots a_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^\ulcorner \{a_1, \ldots, a_n\}_\lrcorner &= \{z; z = a_1 \vee \ldots \vee z = a_n\} \\ &= A_\mathfrak{I}{}^\ulcorner \{b \in D_\mathfrak{I}\,;\; b = \mathfrak{I}^\ulcorner a_{1\lrcorner} \text{ oder } \ldots \text{ oder } b = \mathfrak{I}^\ulcorner a_{1\lrcorner}\}\,_\lrcorner \\ &= \{\mathfrak{I}^\ulcorner a_{1\lrcorner}, \ldots, \mathfrak{I}^\ulcorner a_{n\lrcorner}\} \cap D_\mathfrak{I}\end{aligned}$$

■

Da es sich bei **FiniteClass**[. . .] um eine unendliche Familie von Operatoren handelt, können wir leider keinen Operator definieren, der unmittelbar aussagt, dass die Domäne abgeschlossen unter allen durch **FiniteClass**[. . .] bestimmten Klassenkonstruktionen ist. Üblicherweise geht man daher so vor, dass man die Abgeschlossenheit unter der Adjunktion fordert, d.h. man fordert dass mit a, b auch $a \cup \{b\}$ in der Domäne liegt. Um einen Konstruktionsanfang zu haben, muss man zudem noch $\varnothing \in \mathbb{D}$ annehmen.

[10] In der naiven Mengenlehre charakterisiert man die erblich endlichen Mengen als endliche Mengen, deren Elemente wiederum erblich endliche Mengen sind. Man beachte, dass die leere Menge in diesem Sinne offenbar erblich endlich ist.

[11] Es lässt sich sogar zeigen, dass die Theorie der erblich endlichen Mengen äquivalent ist zur Peano-Arithmetik. Siehe [KW07].

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$[A]$**AdjunctionClosed**	$\varnothing \in A \wedge \forall a, b \in A\,.\; a \cup \{b\} \in A$	
FiniteSetTheory	$[\mathbb{D}]$**AdjunctionClosed**	**FIN**
HereditarilyFiniteSets	$\bigcap_{[X]\mathbf{AdjunctionClosed}} X$	**HF**

Es lässt sich zeigen, dass unter der Annahme von **FIN** die Klasse der erblich endlichen Mengen **HF** alle ZFC-Axiome außer dem Unendlichkeits-Axiom erfüllt.[12] Wir wollen hier aber nur zeigen, dass mit **FIN** auch wirklich alle endlichen Klassen Mengen sind.

4.4 Lemma

Sei **FIN** *angenommen. Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $a_1, \ldots, a_n \in L$ *gilt dann* $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{Sets}$*, d.h. alle endlichen Klassen sind Mengen.*

Beweis: Wir zeigen die Ableitbarkeit von

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \mathbf{FIN} \\ \hline \Gamma & \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{D} \end{array}$$

per Induktion über n.

IA: Beweisskizze:

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$\{\} \in \mathbb{D}$	aus 1.

IS: Beweisskizze:

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$\forall a, b \in \mathbb{D}\,.\; a \cup \{b\} \in \mathbb{D}$	mit 1.
3.		$\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{D}$	Induktionsvoraussetzung
4.		$a_{n+1} \in \mathbb{D}$	Annahme
5.		$\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} \in \mathbb{D}$	mit 3., 4. und 2.
6.		$a_{n+1} \notin \mathbb{D}$	Annahme
7.		$\{a_{n+1}\} = \varnothing$	mit 6.
8.		$\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} \in \mathbb{D}$	mit 3. und 7.
9.		$\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} \in \mathbb{D}$	Fallunterscheidung 5. und 8.
10.		$\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \in \mathbb{D}$	mit 9.

■

[12] D.h. man kann einen Operator $[A]$**FiniteMK** einführen, der besagt, dass die Klasse A alle MK-Axiome (und damit insbesondere alle ZFC-Axiome) außer dem Unendlichkeits-Axiom erfüllt und dann die folgende Regel ableiten:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \mathbf{FIN} \\ \hline \Gamma & [\mathbf{HF}]\mathbf{FiniteMK} \end{array}$$

Wie ein solcher Operator definiert werden kann, sollte spätestens nach dem Lesen des Abschnitts über ZFC und MK klar werden.

Wenden wir uns nun den Kuratowski-Paaren zu.

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
KuratowskiPair$[a, b]$	$\{\{a, b\}, \{b\}\}$	$\langle a, b\rangle_K$
KuratowskiProduct$[A, B]$	$\{\langle a, b\rangle_K ; a \in A \wedge b \in B\}$	$(A \times_K B)$

Mit **FIN** handelt es sich offenbar bei allen Kuratowski-Paaren $\langle a, b\rangle_K$ um Mengen. Natürlich ist das Kuratowski-Paar nur für Gegenstände 1. Stufe nutzbar. Werden Gegenstände zweiter Stufe eingesetzt verhalten sich die beiden Komponenten des Kuratowski-Paares unterschiedlich.

4.5 Lemma

(a) *Gelte* **FIN**.

(i) *Sind* $a, b, c, d \in \mathbb{D}$ *mit* $\langle a, b\rangle_K = \langle c, d\rangle_K$, *so folgt* $a = c$ *und* $b = d$.

(ii) *Ist* $\langle a, b\rangle_K \in \mathbb{D} \times_K \mathbb{D}$, *so folgt* $b \in \mathbb{D}$. *Auf* $a \in \mathbb{D}$ *lässt sich jedoch leider nicht allgemein schließen.*[13] *Es gilt nämlich* $\langle a, b\rangle_K = \langle b, b\rangle_K$ *falls* $a \notin \mathbb{D}$.

(b) *Sei* $\mathfrak{I}$ *eine natürliche Interpretation mit* $\mathfrak{I} \Vdash$ **FIN**. *Für alle* $a, b \in L$ *mit* $\mathfrak{I} \Vdash a, b \in \mathbb{D}$ *gilt:*

$$\mathfrak{I}^{\ulcorner}\langle a, b\rangle_K{}_{\lrcorner} = \langle \mathfrak{I}^{\ulcorner} a_{\lrcorner}, \mathfrak{I}^{\ulcorner} b_{\lrcorner}\rangle_K$$

Beweis: (a) (i):

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$a, b, c, d \in \mathbb{D}$	Prämisse
3.		$\langle a, b\rangle_K = \langle c, d\rangle_K$	Prämisse
4.		$\{\{a, b\}, \{b\}\} = \{\{c, d\}, \{d\}\}$	mit 3.
5.		$\{a, b\}, \{b\}, \{c, d\}, \{d\} \in \mathbb{D}$	mit 2. und 1.
6.		$(\{a, b\} = \{c, d\} \wedge \{b\} = \{d\})$ $\vee(\{a, b\} = \{d\} \wedge \{b\} = \{c, d\})$	mit 5. und 4.
7.		$\{a, b\} = \{c, d\} \wedge \{b\} = \{d\}$	Annahme
8.		$b = d$	mit 2. und 7.
9.		$\{a, b\} = \{c, b\}$	mit 7. und 8.
10.		$a = c \vee a = b$	mit 2. und 9.
11.		$a = c$	Annahme
12.		$a = c \wedge b = d$	mit 11. und 8.
13.		$a = b$	Annahme
14.		$\{a, a\} = \{c, b\}$	mit 7. und 13.
15.		$c = a$	mit 2. und 14.
16.		$a = c \wedge b = d$	mit 15. und 8.
17.		$a = c \wedge b = d$	mit 10., 12. und 16.
18.		$\{a, b\} = \{d\} \wedge \{b\} = \{c, d\}$	Annahme
19.		$a = d$	mit 2. und 18.
20.		$b = d$	mit 2. und 18.
21.		$c = b$	mit 2. und 18.
22.		$a = c \wedge b = d$	mit 19., 20. und 21.
23.		$a = c \wedge b = d$	mit 6., 17. und 22.

[13] Dies ist ein weiterer Grund, warum wir unsere 2-Tupel von den Kuratowski-Paaren unterscheiden wollen.

(a) (ii):

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$\langle a, b\rangle_K \in \mathbb{D} \times_K \mathbb{D}$	Prämisse
3.		$\exists c, d \in \mathbb{D}\,.\ \langle a, b\rangle_K = \langle c, d\rangle_K$	mit 2.
4.		$c, d \in \mathbb{D} \wedge \langle a, b\rangle_K = \langle c, d\rangle_K$	Annahme
5.		$\{c, d\} \neq \varnothing$	mit 4.
6.		$\{d\} \neq \varnothing$	mit 4.
7.		$\varnothing \notin \langle c, d\rangle_K$	mit 5. und 6.
8.		$\varnothing \notin \langle a, b\rangle_K$	mit 4. und 7.
9.		$\{b\} \neq \varnothing$	mit 8. und 1.
10.		$b \in \mathbb{D}$	mit 9.
11.		$b \in \mathbb{D}$	mit 3. und 10.

Andererseits gilt:

1.	$a \notin \mathbb{D}$	Prämisse
2.	$\langle a, b\rangle_K = \{\{a, b\}, \{b\}\}$	Definition
3.	$\{\{a, b\}, \{b\}\} = \{\{b, b\}, \{b\}\}$	mit 1.
4.	$\{\{b, b\}, \{b\}\} = \langle b, b\rangle_K$	Definition
5.	$\langle a, b\rangle_K = \langle b, b\rangle_K$	mit 2., 3. und 4.

(b):

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{I}^\ulcorner a_\lrcorner, \mathfrak{I}^\ulcorner b_\lrcorner\rangle_K &= \{\{\mathfrak{I}^\ulcorner a_\lrcorner, \mathfrak{I}^\ulcorner b_\lrcorner\}, \{\mathfrak{I}^\ulcorner b_\lrcorner\}\} \\
&= \{\{\mathfrak{I}^\ulcorner a_\lrcorner, \mathfrak{I}^\ulcorner b_\lrcorner\} \cap D_\mathfrak{I}, \{\mathfrak{I}^\ulcorner b_\lrcorner\} \cap D_\mathfrak{I}\} \\
&= \{\mathfrak{I}^\ulcorner \{a, b\}_\lrcorner, \mathfrak{I}^\ulcorner \{b\}_\lrcorner\} \\
&= \{\mathfrak{I}^\ulcorner \{a, b\}_\lrcorner, \mathfrak{I}^\ulcorner \{b\}_\lrcorner\} \cap D_\mathfrak{I} \\
&= \mathfrak{I}^\ulcorner \{\{a, b\}, \{b\}\}_\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}^\ulcorner \langle a, b\rangle_{K\,\lrcorner}
\end{aligned}
$$

■

Unter den erblich endlichen Mengen finden sich insbesondere die natürlichen Zahlen in der Von-Neumann-Gestalt. Wir konstruieren sie ausgehend von der leeren Menge durch einen Spezialfall der Adjunktion, der Ordinalzahl-Nachfolgerbildung.

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
$\mathbf{Successor}[a]$	$a \cup \{a\}$	$(a+1)$, $\sigma(a)$
$\mathbf{0}$	$\varnothing$	
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}+1$	
$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}+1$	
$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}+1$	
$\mathbf{4}$	$\mathbf{3}+1$	
$\vdots$	$\vdots$	

$[A]$**SuccessorClosed**[14]	$\mathbf{0} \in A \land \forall a \in A\,.\, a+1 \in A$	
NaturalNumbers	$\bigcap_{[X]\mathbf{SuccessorClosed}} X$	$\mathbb{N}$, ω

Wir können also durch $\underline{0} := \mathbf{0}$, $\underline{1} := \mathbf{1}$, $\underline{2} := \mathbf{2}$ etc. jeder konkreten natürlichen Zahl n einen Ausdruck $\underline{n}$ zuordnen der n in der Klassenlogik repräsentiert. Das Definiens des Ausdrucks $\underline{n+1}$ ist (bis auf Definitionsumformungen) $\underline{n} + 1$.

Offenbar gilt mit **FIN** auch $[\mathbb{D}]$**SuccessorClosed**. Damit folgt leicht $\underline{n} \in$ **Sets** (und auch $\underline{n} \in \mathbb{N}$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich mit unseren klassenlogischen natürlichen Zahlen induktive Beweise führen lassen.

4.6 Lemma

Sei **FIN** *angenommen. Weiter gelte $\varphi(0)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n)$ auch $\varphi(n+1)$. Dann gilt*

$$\varphi(n) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Beweis:

Wir zeigen

$$\begin{array}{llll} \Gamma & & & \mathbf{FIN} \\ \Gamma & & & \varphi_x^{\mathbf{0}} \\ \Gamma & n \in \mathbb{N} & \varphi_x^n & \varphi_x^{n+1} \\ \hline \Gamma & & & \forall x \in \mathbb{N}\,.\,\varphi \end{array}$$

1.	Γ			**FIN**	Prämisse
2.				$\varphi_x^{\mathbf{0}}$	Prämisse
3.		$n \in \mathbb{N}$	φ_x^n	φ_x^{n+1}	Prämisse
				$X := \{x \in \mathbb{N}; \varphi\}$	
4.				$\mathbf{0} \in X$	mit 2.
5.				$n \in X$	Annahme
6.				$n \in \mathbb{N} \land \varphi_x^n$	mit 5.
7.				φ_x^{n+1}	mit 6. und 3.
8.				$n+1 \in \mathbb{N}$	mit 6. und 1.
9.				$n+1 \in X$	mit 8. und 7.
10.				$[X]$**SuccessorClosed**	mit 4. und 9.
11.				$\mathbb{N} \subseteq X$	mit 10.
12.				$X \subseteq \mathbb{N}$	nach Definition von X
13.				$X = \mathbb{N}$	mit 11. und 12.
14.				$\forall x \in \mathbb{N}\,.\,\varphi$	mit 13.

■

[14] Derartige Klassen nennt man auch *induktiv*.

Induktiv können wir z.B. zeigen, dass alle (von-Neumann'schen) natürlichen Zahlen transitive Mengen sind.

4.7 Lemma

Sei **FIN** *angenommen. Ist* $n \in \mathbb{N}$*, so ist* n *eine Menge und alle Elemente von* n *sind auch Teilmengen von* n*.*

Beweis:

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$\mathbf{0} \in \mathbf{Sets} \wedge \forall x \in \mathbf{0} \,.\, x \subseteq \mathbf{0}$	mit 1.
3.		$n \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbf{Sets} \wedge \forall x \in n \,.\, x \subseteq n$	Annahme
4.		$x \in n + 1$	Annahme
5.		$x = n \vee x \in n$	mit 4.
6.		$x = n$	Annahme
7.		$x \subseteq n$	mit 6. und 3.
8.		$x \in n$	Annahme
9.		$x \subseteq n$	mit 3.
10.		$x \subseteq n$	mit 5., 7. und 9.
11.		$x \subseteq n + 1$	mit 10.
12.		$n + 1 \in \mathbf{Sets} \wedge \forall x \in n + 1 \,.\, x \subseteq n + 1$	mit 11. und 1.
13.		$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, (n \in \mathbf{Sets} \wedge \forall x \in n \,.\, x \subseteq n)$	mit 1., 2. und 12.

∎

Mit dem gerade gezeigten Lemma lässt sich leicht die Injektivität der Nachfolgerfunktion zeigen.

4.8 Lemma

Sei **FIN** *angenommen. Sind* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n \neq m$*, so gilt auch* $n + 1 \neq m + 1$*.*

Beweis:

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$n, m \in \mathbb{N} \wedge n + 1 = m + 1$	Annahme
3.		$n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$	mit 2.
4.		$n = m \vee (n \in m \wedge m \in n)$	mit 2. und 3.
5.		$n \in m \wedge m \in n$	Annahme
6.		$n \subseteq m \wedge m \subseteq n$	mit 1., 5. und Lemma 4.7
7.		$n = m$	mit 6.
8.		$n = m$	mit 4. und 7.
9.		$\forall n, m \in \mathbb{N} \,.\, (n \neq m \rightarrow n + 1 \neq m + 1)$	mit 8.

∎

Wir könnten sogar die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ einführen. Damit hätten wir dann die Peano-Arithmetik zur Verfügung. Wir wollen uns hier jedoch nur vergewissern, dass wir es unter natürlichen Interpretationen auch mit den „echten" natürlichen Zahlen zu tun haben.

4.9 Lemma

(i) *Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$, so gilt* **FIN** $\vdash \underline{n} \neq \underline{m}$.

(ii) *Sei $\mathfrak{I}$ eine natürliche Interpretation mit $\mathfrak{I} \Vdash$* **FIN**. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:*

$$\mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n}_{\lrcorner} = n \ .$$

Beweis:

(i): Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. OBdA. gelte $n = m + k$ für ein $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Man zeigt leicht, dass **FIN** $\vdash \underline{k} \neq \underline{0}$. Durch m-maliges Anwenden von Lemma 4.8 erhält man also **FIN** $\vdash \underline{k+m} \neq \underline{0+m}$, d.h. **FIN** $\vdash \underline{n} \neq \underline{m}$.

(ii) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA: $\mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{0}_{\lrcorner} = \mathfrak{I}^{\ulcorner}\varnothing_{\lrcorner} = \emptyset = 0$.

IS: Mit Lemma 4.2 (ii), Lemma 4.3 und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n+1}_{\lrcorner} = \mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n} + 1_{\lrcorner} = \mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n} \cup \{\underline{n}\}_{\lrcorner} = \mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n}_{\lrcorner} \cup \mathfrak{I}^{\ulcorner}\{\underline{n}\}_{\lrcorner} = n \cup \{\mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n}_{\lrcorner}\} = n \cup \{n\} = n + 1 \ .$$

■

Wie auf der Meta-Ebene wollen wir nun die natürlichen Zahlen benutzen, um endliche Tupel einzuführen.

Definiendum	Definiens	Schreibweise
Tuple[]	$\varnothing$	$\langle\rangle$
Tuple$[a_1]$	$\{\langle \mathbf{0}, a_1\rangle_K\}$	$\langle a_1\rangle$
Tuple$[a_1, a_2]$	$\{\langle \mathbf{0}, a_1\rangle_K, \langle \mathbf{1}, a_2\rangle_K\}$	$\langle a_1, a_2\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Tuple$[a_1, \ldots, a_n]$	$\{\langle \mathbf{0}, a_1\rangle_K, \ldots, \langle \underline{n-1}, a_n\rangle_K\}$	$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$
CartesianProduct$[A_1, \ldots, A_n]$	$\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle ; a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$ [15]	$(A_1 \sqcap \ldots \sqcap A_n)$
0CartesianPower$[A]$	$\{\langle\rangle\}$	${}^0A$
1CartesianPower$[A]$	$\{\langle a_1\rangle ; a_1 \in A\}$	${}^1A$
2CartesianPower$[A]$	$\{\langle a_1, a_2\rangle ; a_1, a_2 \in A\}$	${}^2A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mit **FIN** handelt es sich offenbar bei allen (endlichen) Tupeln $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ um Mengen.

[15] Genauer $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle ;_{a_1, \ldots, a_n} a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$

4.10 Lemma

(a) *Gelte* **FIN**.

(i) *Sind* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{D}$ *mit* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, *so folgt*

$$a_1 = b_1 \textit{ und } \ldots \textit{ und } a_n = b_n \ .$$

(ii) *Ist* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in {}^n\mathbb{D}$, *so folgt* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$.[16]

(iii) *Es gilt* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \sqcap \ldots \sqcap A_n$ *genau dann, wenn* $a_1 \in A_1, \ \ldots, \ a_n \in A_n$.

(iv) *Es gilt* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in {}^nA$ *genau dann, wenn* $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(b) *Sei* $\mathfrak{I}$ *eine natürliche Interpretation mit* $\mathfrak{I} \Vdash$ **FIN**.

(i) *Für alle* $a_1, \ldots, a_n \in L$ *mit* $\mathfrak{I} \Vdash a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ *gilt:*

$$\mathfrak{I}\ulcorner \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \lrcorner = \langle \mathfrak{I}\ulcorner a_1 \lrcorner, \ldots, \mathfrak{I}\ulcorner a_n \lrcorner \rangle$$

(ii) *Für alle* $A, B \in L$ *mit* $\mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}$ *und* $\mathfrak{I} \Vdash [B]\mathbf{Class}$ *gilt:*

$$\mathfrak{I}\ulcorner A \sqcap B \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner \sqcap \mathfrak{I}\ulcorner B \lrcorner$$

(iii) *Für alle* $A \in L$ *mit* $\mathfrak{I} \Vdash [A]\mathbf{Class}$ *gilt:*

$$\mathfrak{I}\ulcorner {}^nA \lrcorner = {}^n\mathfrak{I}\ulcorner A \lrcorner$$

Beweis:

(a) (i): Wir wollen hier nur exemplarisch den Fall $n = 2$ zeigen. Für den allgemeinen Fall führe man Induktion und verwende Lemma 4.9 (i).

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$a, b, c, d \in \mathbb{D}$	Prämisse
3.		$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$	Prämisse
4.		$\{\langle \mathbf{0}, a \rangle_K, \langle \mathbf{1}, b \rangle_K\} = \{\langle \mathbf{0}, c \rangle_K, \langle \mathbf{1}, d \rangle_K\}$	Definition
5.		$\langle \mathbf{0}, a \rangle_K = \langle \mathbf{1}, d \rangle_K$	Annahme
6.		$\mathbf{0} = \mathbf{1}$	mit 1., 2. und Lemma 4.5 (a) (i)
7.		$\bot$	mit 1. und 6.
8.		$\langle \mathbf{0}, a \rangle_K = \langle \mathbf{0}, c \rangle_K \wedge \langle \mathbf{1}, b \rangle_K = \langle \mathbf{1}, d \rangle_K$	aus 1., 4. und 7.
9.		$a = c \wedge b = d$	mit 1., 2., 8. und Lemma 4.5 (a) (i)

[16] An dieser Stelle findet sich der Grund dafür, dass wir das Kuratowski-Paar $\langle a, b \rangle_K$ durch $\{\{a, b\}, \{b\}\}$ und nicht wie üblich durch $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ definiert haben. Hätte wir die zweite Variante gewählt, würde die hier bewiesene Aussage nicht gelten.

(a) (ii):

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in {}^n\mathbb{D}$	Prämisse
3.		$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{D} \,.\, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$	mit. 2.
4.		$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{D} \wedge \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$	Annahme
5.		$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq \mathbb{D} \times_K \mathbb{D}$	trivial
6.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{D} \times_K \mathbb{D}$	mit 4. und 5.
7.		$\langle \underline{i-1}, a_i \rangle_K \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$	mit 1.
8.		$\langle \underline{i-1}, a_i \rangle_K \in \mathbb{D} \times_K \mathbb{D}$	mit 7. und 6.
9.		$a_i \in \mathbb{D}$	mit Lemma 4.5 (a) (ii)
10.		$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$	mit 9.
11.		$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$	mit 3. und 9.

(a) (iii):

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \sqcap \ldots \sqcap A_n$	Annahme
3.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in {}^n\mathbb{D}$	mit 2.
4.		$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$	mit (a) (ii)
5.		$\exists x_1 \in A_1 \,.\, \ldots \exists x_n \in A_n \,.\, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$	mit 2.
6.		$x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \wedge \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$	Annahme
7.		$a_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge a_n = x_n$	mit 1., 6. und (a) (i)
8.		$a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n$	mit 7. und 6.
9.		$a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n$	mit 5. und 8.
10.		$a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n$	Annahme
11.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \sqcap \ldots \sqcap A_n$	mit 10.
12.		$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_1 \sqcap \ldots \sqcap A_n \leftrightarrow a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n$	mit 9. und 11.

(a) (iv): Analog zu (a) (iii).

(b) (i):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\ulcorner}\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\lrcorner} &= \mathfrak{I}^{\ulcorner}\{\langle \mathbf{0}, a_1 \rangle_K, \ldots, \langle \underline{n-1}, a_n \rangle_K\}_{\lrcorner} \\
&= \{\mathfrak{I}^{\ulcorner}\langle \mathbf{0}, a_1 \rangle_{K\lrcorner}, \ldots, \mathfrak{I}^{\ulcorner}\langle \underline{n-1}, a_n \rangle_{K\lrcorner}\} \cap D_{\mathfrak{I}} \\
&= \{\langle \mathfrak{I}^{\ulcorner}\mathbf{0}_{\lrcorner}, \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{1\lrcorner} \rangle_K, \ldots, \langle \mathfrak{I}^{\ulcorner}\underline{n-1}_{\lrcorner}, \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{n\lrcorner} \rangle_K\} \\
&= \{\langle 0, \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{1\lrcorner} \rangle_K, \ldots, \langle n-1, \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{n\lrcorner} \rangle_K\} \\
&= \langle \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{1\lrcorner}, \ldots, \mathfrak{I}^{\ulcorner}a_{n\lrcorner} \rangle
\end{aligned}$$

(b) (ii):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\ulcorner}A \sqcap B_{\lrcorner} &= \mathfrak{I}^{\ulcorner}\{\langle a, b \rangle; a \in A \wedge b \in B\}_{\lrcorner} \\
&= \left\{\mathfrak{I}^{\,c\,d}_{\,a\,b}{}^{\ulcorner}\langle a, b \rangle_{\lrcorner};\ c, d \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{\,c\,d}_{\,a\,b} \Vdash a \in A \wedge b \in B\right\} \cap D_{\mathfrak{I}} \\
&= \left\{\mathfrak{I}^{\,c\,d}_{\,a\,b}{}^{\ulcorner}\langle a, b \rangle_{\lrcorner};\ c, d \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{\,c\,d}_{\,a\,b} \Vdash a \in A \wedge b \in B\right\} \\
&= \{\langle c, d \rangle;\ c \in \mathfrak{I}^{\ulcorner}A_{\lrcorner}, d \in \mathfrak{I}^{\ulcorner}B_{\lrcorner}\} \\
&= \mathfrak{I}^{\ulcorner}A_{\lrcorner} \sqcap \mathfrak{I}^{\ulcorner}B_{\lrcorner}
\end{aligned}$$

(b) (iii):

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}^{\ulcorner n}A_{\lrcorner} &= \mathfrak{I}^{\ulcorner}\{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle; a_1,\ldots,a_n \in A\}_{\lrcorner} \\
&= \left\{\mathfrak{I}^{c_1\ldots c_n}_{a_1\ldots a_n}{}^{\ulcorner}\langle a_1,\ldots,a_n\rangle_{\lrcorner};\ c_1,\ldots,c_n \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{c_1\ldots c_n}_{a_1\ldots a_n} \Vdash a_1,\ldots,a_n \in A\right\} \cap D_{\mathfrak{I}} \\
&= \left\{\mathfrak{I}^{c_1\ldots c_n}_{a_1\ldots a_n}{}^{\ulcorner}\langle a_1,\ldots,a_n\rangle_{\lrcorner};\ c_1,\ldots,c_n \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{c_1\ldots c_n}_{a_1\ldots a_n} \Vdash a_1,\ldots,a_n \in A\right\} \\
&= \{\langle c_1,\ldots,c_n\rangle\,;\ c_1,\ldots,c_n \in \mathfrak{I}^{\ulcorner}A_{\lrcorner}\} \\
&= {}^{n}\mathfrak{I}^{\ulcorner}A_{\lrcorner}
\end{aligned}
$$

■

4.3. Relationen und Abbildungen

Relationen und Abbildungen fassen wir wie auf der Meta-Ebene als Klassen von 2-Tupeln auf.

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
Domain$[f]$	$\{a; \exists b \in \mathbb{D} \,.\, \langle a,b\rangle \in f\}$	$\mathrm{def}\, f$
Image$[f]$	$\{b; \exists a \in \mathbb{D} \,.\, \langle a,b\rangle \in f\}$	$\mathrm{im}\, f$
$[f]$**RightUnique**	$\forall a,b,c \in \mathbb{D} \,.\, (\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in f \to b = c)$	
$[f]$**LeftUnique**	$\forall a,b,c \in \mathbb{D} \,.\, (\langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle \in f \to b = c)$	f injektiv
$[f,A,B]$**Map**	$f \subseteq A \sqcap B \wedge \mathrm{def}\, f = A \wedge [f]$**RightUnique**	$f : A \to B$
$[f,A,B]$**Bijection**	$f : A \to B \wedge \mathrm{im}\, f = B \wedge [f]$**LeftUnique**	$f : A \leftrightarrow B$
Apply$[f,a]$	$\iota b(\langle a,b\rangle \in f)$	$f^{\ulcorner}a_{\lrcorner}$
Image$[f,A]$	$\{b; \exists a \in A \,.\, \langle a,b\rangle \in f\}$	$f\lceil A\rfloor$
$[f;A,B,\varphi]$**AllMap**	$\forall f((f : A \to B) \to \varphi)$	$\forall f : A \to B \,.\, \varphi$
$[f;A,B,\varphi]$**ExistsMap**	$\exists f((f : A \to B) \wedge \varphi)$	$\exists f : A \to B \,.\, \varphi$
$[f;A,B,\varphi]$**AllBijection**	$\forall f((f : A \leftrightarrow B) \to \varphi)$	$\forall f : A \leftrightarrow B \,.\, \varphi$
$[f;A,B,\varphi]$**ExistsBijection**	$\exists f((f : A \leftrightarrow B) \wedge \varphi)$	$\exists f : A \leftrightarrow B \,.\, \varphi$

4.11 Lemma

Gelte **FIN** *und sei* $f : A \to B$.

(a) *Für alle* a, b, c *mit* $\langle a, b\rangle \in f$ *und* $\langle a, c\rangle \in f$ *gilt* $b = c$.

(b) *Ist* $a \in A$, *so gilt* $\langle a, f^\ulcorner a_\lrcorner\rangle \in f$ *und* $f^\ulcorner a_\lrcorner \in B$.

Beweis:

(a): Wir zeigen

Γ	**FIN**
Γ	$f : A \to B$
Γ	$\langle a, b\rangle \in f$
Γ	$\langle a, c\rangle \in f$
Γ	$b = c$

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$f : A \to B$	Prämisse
3.		$\langle a, b\rangle \in f$	Prämisse
4.		$\langle a, c\rangle \in f$	Prämisse
5.		$f \subseteq A \sqcap B$	mit 2.
6.		$f \subseteq {}^2\mathbb{D}$	mit 5.
7.		$\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in {}^2\mathbb{D}$	mit 3., 4. und 6.
8.		$a, b, c \in \mathbb{D}$	1., 7. und Lemma 4.10 (a) (ii)
9.		$[f]$**RightUnique**	mit 2.
10.		$b = c$	8., 9.

(b) (i): Wir zeigen

Γ	**FIN**
Γ	$f : A \to B$
Γ	$a \in A$
Γ	$\langle a, f^\ulcorner a_\lrcorner\rangle \in f$

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		$f : A \to B$	Prämisse
3.		$a \in A$	Prämisse
4.		$\mathrm{def}\, f = A$	mit 2.
5.		$a \in \mathrm{def}\, f$	mit 3. und 4.
6.		$\exists b \in \mathbb{D} \,.\, \langle a, b\rangle \in f$	mit 5.
7.		$b \in \mathbb{D} \wedge \langle a, b\rangle \in f$	Annahme
8.		$u \in \mathbb{D} \wedge \langle a, u\rangle \in f$	Annahme
9.		$u = b$	mit 1., 2., 7., 8. und (a)
10.		$\iota v \in \mathbb{D} \,.\, (\langle a, v\rangle \in f) = b$	mit 7. und 9.
11.		$f^\ulcorner a_\lrcorner = b$	mit 10.
12.		$\langle a, f^\ulcorner a_\lrcorner\rangle \in f$	mit 11. und 7.
13.		$\langle a, f^\ulcorner a_\lrcorner\rangle \in f$	mit 6. und 12.

(b) (ii): Wir zeigen

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \mathbf{FIN} \\ \Gamma & f : A \to B \\ \Gamma & a \in A \\ \hline \Gamma & f^{\ulcorner} a_{\lrcorner} \in B \end{array}$$

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$f : A \to B$	Prämisse
3.		$a \in A$	Prämisse
4.		$f \subseteq A \sqcap B$	mit 2.
5.		$\langle a, f^{\ulcorner} a_{\lrcorner}\rangle \in f$	1., 2., 3. und (b) (i)
6.		$\langle a, f^{\ulcorner} a_{\lrcorner}\rangle \in A \sqcap B$	mit 5. und 4.
7.		$f^{\ulcorner} a_{\lrcorner} \in B$	mit 6. und Lemma 4.10 (a) (ii)

■

Mit dem bisher Gezeigten erhalten wir insbesondere:

4.12 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine natürlichen Interpretation mit $\mathfrak{I} \Vdash \mathbf{FIN}$. Für alle $f \in L$ mit $\mathfrak{I} \Vdash [f]\mathbf{Class}$ gilt:

$$\mathfrak{I}^{\ulcorner} \operatorname{def} f_{\lrcorner} = \{a \in D_{\mathfrak{I}}\,; \;\; \textit{es gibt ein } b \in D_{\mathfrak{I}} \textit{ mit } \langle a, b\rangle \in \mathfrak{I}^{\ulcorner} f_{\lrcorner}\}$$

Es ist sehr praktisch Funktionsbildungsoperatoren zur Verfügung zu haben.

Definiendum	Definiens	Schreibweise
$\mathbf{Map}[x; \beta, A, B]$	$\{\langle x, \beta\rangle;_x \; x \in A \wedge \beta \in B\}$	$\langle x \in A \mapsto \beta \in B\rangle$
$\mathbf{Map}[x; D, \alpha, \beta, A, B]$	$\langle a \in A \mapsto \iota b \; \exists x \in D \,.\, (a = \alpha \wedge b = \beta) \in B\rangle$	$\langle \alpha \in A \mapsto_{x,D} \beta \in B\rangle$ oder $\langle \alpha \in A \mapsto \beta \in B\rangle$

* * *

Wenden wir uns noch einmal den natürlichen Zahlen zu. Mit den schon eingeführten Operatoren lässt sich leicht ein Operator für die Peano-Axiome angeben.

Definiendum	Definiens
$[N, S, O]\mathbf{Peano}$	$O \in N$ $\wedge\; S : N \to N$ $\wedge\; O \notin \operatorname{im} S$ $\wedge\; [S]\mathbf{LeftUnique}$ $\wedge\; \forall X \subseteq N \,.\, ([X]\mathbf{SuccessorClosed} \to X = N)$

Definieren wir nun noch die Nachfolgerfunktion der von-Neumann'schen natürlichen Zahlen durch

Definiendum	Definiens	Schreibweise
NaturalSuccesorFunction	$\langle n \in \mathbb{N} \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}\rangle$	σ

so zeigt man leicht, dass **FIN** $\vdash [\mathbb{N}, \sigma, \mathbf{0}]$**Peano**. Wir haben also wirklich die natürlichen Zahlen vor uns. Möchte man nicht mit den von-Neumann'schen natürlichen Zahlen arbeiten, so könnte man aber auch alternativ die Existenz der natürlichen Zahlen axiomatisch fordern; entweder durch die Standard-Prämisse $[N, S, O]$**Peano** oder durch die Existenz einer Bijektion $f : \mathbb{N} \leftrightarrow N$ von den von-Neumann'schen auf die „echten“ natürlichen Zahlen.[17]

Es sollte nun auch klar sein, wie sich etwa der „Gruppen-Operator“ $[\cdot, \cdot, \cdot]$**Gruppe** aus Abschnitt 3.2 definieren lässt.

4.4. ZFC und MK

Nachdem wir uns bisher nur mit ein paar Schlussfolgerungen der endlichen Mengenlehre **FIN** beschäftigt haben, wollen wir uns nun noch kurz mit der eigentlichen Grundlage der modernen Mathematik beschäftigen, der durch die ZFC-Axiome beschriebenen unendlichen Mengenlehre. Vergegenwärtigen wir uns zunächst einmal die **ZFC**-Axiome in ihrer prädikatenlogischen Formulierung.[18] Wir orientieren uns hierbei an [Kun13].

Axiom 1. Extensionalität

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

„Mengen mit den gleichen Elementen sind gleich.“

Axiom 2. Fundierung

$$\forall x (\exists y (y \in x) \to \exists y \in x \, \neg \exists z \in x \, (z \in y))$$

„Jede nichtleere Menge enthält ein $\in$-minimales Element.“

Axiom 3. Aussonderungsschema

Für jeden Ausdruck φ mit $y \notin \operatorname{frei} \varphi$ das Axiom

$$\forall v \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \varphi(x))$$

„Teilklassen von Mengen sind Mengen.“

[17] Man kann dann auch zusätzlich annehmen, dass die Elemente von N Urelemente sind.

[18] Hierbei verwenden wir ein paar logische Abkürzungen, wie die beschränkten Quantoren und den Eindeutigkeitsquantor $\exists^{=1}$.

Axiom 4. Paarmenge

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

„Zu zwei Mengen gibt es stets eine Menge, die diese beiden Mengen als Elemente enthält."

Axiom 5. Vereinigung

$$\forall x \exists y \forall z \in x \, \forall v \in z \, (v \in y)$$

„Zu jeder Menge gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente dieser Menge enthält."

Axiom 6. Ersetzungsschema

Für jeden Ausdruck φ mit $v \notin \operatorname{frei} \varphi$ das Axiom

$$\forall z (\forall x \in z \, \exists^{=1} y \, \varphi(x,y) \rightarrow \exists v \, \forall x \in z \, \exists y \in v \, \varphi(x,y))$$

„Das Bild einer Menge unter einer Klassenabbildung ist eine Menge."

Mithilfe der Axiome 1,3,4,5 können wir die folgenden Definitionserweiterungen tätigen:

$$\begin{aligned}
x \subseteq y &\quad \Leftrightarrow \quad \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \\
x = \emptyset &\quad \Leftrightarrow \quad \forall z (z \notin x) \\
y = \mathrm{S}(x) &\quad \Leftrightarrow \quad \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \\
y = v \cap w &\quad \Leftrightarrow \quad \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge x \in w) \\
\mathrm{SING}(x) &\quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in x \, \forall z \in x \, (x = y)
\end{aligned}$$

Mit ihnen lassen sich die noch fehlenden drei Axiome sehr viel einfacher formulieren.

Axiom 7. Unendlichkeit

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x \, (\mathrm{S}(y) \in x))$$

„Es gibt eine unter Ordinalzahl-Nachfolgerbildung abgeschlossene Menge, die die leere Menge enthält."

Axiom 8. Potenzmenge

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

„Zu jeder Menge gibt es eine Menge, die alle Teilmengen dieser Menge enthält."

Axiom 9. Auswahl

$$\forall z (\emptyset \notin z \wedge \forall x \in z \, \forall y \in z \, (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists c \forall x \in z \; \mathrm{SING}(c \cap x))$$

„Zu jeder Menge von nichtleeren zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Auswahlmenge."

Um diese Axiome klassenlogisch zu formulieren, benötigen wir noch ein paar wenige Operatoren.

Definiendum	**Definiens**	**Schreibweise**
Powerset$[a]$	$\{x; x \subseteq a\}$	$\mathcal{P}(a)$
$[m, X]$**MinimalElement**	$\neg\exists a \in X \,.\, a \in m$	
$[A, B]$**Disjoint**	$A \cap B = \varnothing$	
$[X]$**DisjointFamily**	$[X]$**Class** $\wedge \forall a \in X \,.\, [a]$**Inhabited** $\wedge$ $\forall a, b \in X \,.\, (a \neq b \to [a, b]$**Disjoint**$)$	
$[X]$**Singleton**	$\exists a \in \mathbb{D} \,.\, X = \{a\}$	
$[C, X]$**ChoiceClass**	$[C]$**Class** $\wedge \forall a \in X \,.\, [C \cap a]$**Singleton**	

Kommen wir nun zu den Axiomen. Mit dem uns zur Verfügung stehenden Klassenbegriff liegt es nahe, Extensionalitäts- und Fundierungsaxiom gleich für Klassen zu formulieren.

Definiendum	**Definiens**
Extensionality	$\forall A, B \subseteq \mathbb{D} \,.\, (\forall z (z \in A \leftrightarrow z \in B) \to A = B)$
Foundation	$\forall X \subseteq \mathbb{D} \,.\, (X \neq \varnothing \to \exists m \in X \,.\, [m, X]$**MinimalElement**$)$
Separation	$\forall A, B \subseteq \mathbb{D} \,.\, (A \subseteq B \wedge B \in$ **Sets** $\to A \in$ **Sets**$)$
Pairing	$\forall a, b \in \mathbb{D} \,.\, \{a, b\} \in$ **Sets**
Union	$\forall a \in$ **Sets** $.\ \cup a \in$ **Sets**
Replacement	$\forall A, B \subseteq \mathbb{D} \,.\, \forall f : A \to B \,.\, (A \in$ **Sets** $\to \operatorname{im} f \in$ **Sets**$)$
Infinity	$\mathbb{N} \in$ **Sets**
Powerset	$\forall a \in$ **Sets** $.\ \mathcal{P}(a) \in$ **Sets**
Choice	$\forall X \in$ **Sets** $.\ ([X]$**DisjointFamily** $\to \exists C \in$ **Sets** $.\ [C, X]$**ChoiceClass**$)$

Auch das Auswahlaxiom lässt sich für Klassen formulieren. Es wird dann „Global Choice“ genannt und für gewöhnlich etwas anders formuliert. Relativ zu den anderen Axiomen sind die beiden Formulierungen äquivalent zueinander.

Definiendum	**Definiens**
ClassChoice	$\forall X \subseteq \mathbb{D} \,.\, ([X]$**DisjointFamily** $\to \exists C \subseteq \mathbb{D} \,.\, [C, X]$**ChoiceClass**$)$
GlobalChoice	$\exists f :$ **Sets** $\setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{D} \,.\, \forall a \in \operatorname{def} f \,.\, f \ulcorner a \lrcorner \in a$

Da wir es mit endlich vielen Axiomen zu tun haben, können wir sie in einem Operator zusammenfassen. Das Extensionalitätsaxiom folgt zudem rein klassenlogisch und kann daher weggelassen werden.[19]

[19] Auch das Aussonderungsaxiom **Separation** lässt sich mit unseren anderen Axiomen beweisen. (Insbesondere werden dafür das Ersetzungsaxiom und interessanterweise für die Aussonderung der leeren Menge auch das Unendlichkeitsaxiom benötigt.) Wir wollen es hier jedoch aus systematischen Gründen mit dazu nehmen, da man manchmal auch Mengenlehren untersuchen möchte, in denen das Ersetzungsaxiom bzw. das Unendlich-

Definiendum	Definiens	Schreibweise
SetTheory	Foundation $\wedge$ Separation $\wedge$ Pairing $\wedge$ Union $\wedge$ Replacement $\wedge$ Infinity $\wedge$ Powerset $\wedge$ GlobalChoice	MK

Genau genommen haben wir nicht die ZFC-Mengenlehre in der Klassenlogik formuliert, sondern die etwas stärkere Morse-Kelley Mengenlehre (MK). Da wir uns in diesem Dokument schon das ein oder andere Mal auf sie bezogen haben, wollen wir sie hier auch noch kurz angeben. Wie ZFC wird MK gewöhnlich in der (einsortigen) Prädikatenlogik 1. Stufe mit einem zusätzlichen Relationssymbol $\in$ formuliert. Anders als bei ZFC, besteht ein Modell von MK jedoch nicht aus „Mengen" sondern aus „Klassen". Eine „Menge" kann in MK definiert werden als ein „Klasse", die in (mindestens) einer „Klasse" enthalten ist. Wir können daher leicht Mengenquantoren einführen durch

$$\forall_M v\, \varphi \qquad \text{:gdw.} \qquad \forall v(\exists Z(v \in Z) \rightarrow \varphi)$$

und

$$\exists_M v\, \varphi \qquad \text{:gdw.} \qquad \exists v(\exists Z(v \in Z) \wedge \varphi)\ .$$

Hierbei sei Z eine von v verschiedene Variable. Wie üblich wollen wir dem Leser eine Hilfe geben indem „Mengenvariablen" klein und „Klassenvariablen" groß geschrieben werden.[20]

Die Axiome von **MK** sind:

Axiom 1. Extensionalität

$$\forall X \forall Y (\forall_M z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Axiom 2. Fundierung

$$\forall X (\exists_M y\, (y \in X) \rightarrow \exists_M y \in X\, \neg \exists_M z \in X\, (z \in y))$$

Axiom 3. Aussonderungsschema

Mengenkomprehension (1 Axiom):

$$\forall Z\, \forall_M v\, \exists_M y\, \forall_M x\, (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge x \in Z)$$

„Teilklassen von Mengen sind Mengen."

und Klassenkomprehension (Schema):

Für jede Aussage φ mit $Z \notin \text{frei}\, \varphi$ das Axiom

$$\exists Z\, \forall_M x(x \in Z \leftrightarrow \varphi(x))$$

„Jede Mengen-Eigenschaft bestimmt eine Klasse."

keitsaxiom nicht gilt.

[20] Durch den expliziten Index $_M$ an den Quantoren ist dies in unserer Formulierung jedoch eigentlich nicht nötig.

Axiom 4. Paarmenge

$$\forall_M x\, \forall_M y\, \exists_M z\, (x \in z \wedge y \in z)$$

Axiom 5. Vereinigung

$$\forall_M x\, \exists_M y\, \forall_M z \in x\, \forall_M v \in z\, (v \in y)$$

$$\begin{array}{rcl} X \subseteq Y & \Leftrightarrow & \forall_M z(z \in X \rightarrow z \in Y) \\ x = \emptyset & \Leftrightarrow & \forall_M z(z \notin x) \\ y = \mathrm{S}(x) & \Leftrightarrow & \forall_M z(z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \\ z = \{x, y\} & \Leftrightarrow & \forall_M v(v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = y) \\ z = \langle x, y \rangle_K & \Leftrightarrow & z = \{\{x, y\}, \{y, y\}\} \\ \mathrm{GlobalFunction}(F) & \Leftrightarrow & \forall_M p \in F\, \exists_M x \exists_M y\, (p = \langle x, y \rangle_K) \wedge \forall_M x \exists_M^{=1} y(\langle x, y \rangle_K \in F) \end{array}$$

Axiom 6. Ersetzungsschema

$$\forall F(\mathrm{GlobalFunction}(F) \rightarrow \forall_M a \exists_M b \forall_M x \in a\, \exists_M y \in b\, (\langle x, y \rangle_K \in f))$$

Axiom 7. Unendlichkeit

$$\exists_M x(\emptyset \in x \wedge \forall_M y \in x\, (\mathrm{S}(y) \in x))$$

Axiom 8. Potenzmenge

$$\forall_M x \exists_M y \forall_M z(z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

Axiom 9. Auswahl (Global Choice)

$$\exists F(\mathrm{GlobalFunction}(F) \wedge \forall_M x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists_M y \in x\, (\langle x, y \rangle_K \in f)))$$

Die Analogie zu **SetTheory** ist nicht zu übersehen. Das einzige Axiomenschema von MK, die Klassenkomprehension, folgt in der Klassenlogik rein logisch.[21] Dadurch können wir MK endlich axiomatisieren. **SetTheory** ist eigentlich nichts anderes als ein abgekürzter klassenlogischer Ausdruck.

Die Ebenfalls mit Klassen arbeitende nach von Neumann, Bernays und Gödel benannte **NBG**-Mengenlehre unterscheidet sich von MK in nur einem einzigen Punkt: die Klassenkomprehension ist auf Ausdrücke beschränkt, in denen alle Quantoren Mengenquantoren ($\forall_M$ und $\exists_M$) sind.[22] Anders als MK und ZFC lässt sich NBG prädikatenlogisch endlich axiomatisieren.[23]

Es lässt sich zeigen, dass NBG eine konservative Erweiterung von ZFC ist, d.h. aus NBG und ZFC folgen dieselben Aussagen über Mengen.[24] Daraus folgt insbesondere das NBG und ZFC

[21] Der Klassenbildungsoperator ist ja sogar ein essentieller Bestandteil der Grundsyntax. Man beachte auch die Abstraktionsregeln des klassenlogischen Beweiskalküls.

[22] Dass es sich hierbei um eine wirkliche Einschränkung handelt, folgt aus dem im Folgenden besprochenen Konsistenz-Verhältnis von MK und NBG. Wie Mostowski in [Mos50] gezeigt hat, lässt sich jedoch auch direkt ein Ausdruck bestimmen, für den die Existenz der zugehörigen Klasse nicht aus NBG folgt.

[23] Siehe [Göd40].

[24] Siehe [RW50].

relativ konsistent zueinander sind.[25] Aufgrund des zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes kann damit jedoch *in* keinem der beiden Systeme die Konsistenz des anderen bewiesen werden. Anders verhält es sich mit MK. In MK lassen sich Modelle von ZFC und NBG angeben und damit die Konsistenz der beiden Systeme zeigen.[26] Es handelt sich also bei MK um eine nicht konservative, echte Erweiterung von ZFC.[27]

Erwähnt seien an dieser Stelle noch zwei alternative Axiome für NBG bzw. MK bzw. unsere klassenlogische Mengenlehre.

Definiendum	**Definiens**
LimitationOfSize	$\forall X \subseteq \mathbb{D} \,.\, (X \in \textbf{Sets} \leftrightarrow \neg\exists f : X \leftrightarrow \mathbb{D})$
ChoiceReplace	$\forall X \subseteq \mathbb{D} \,.\, ([X]\textbf{DisjointFamily}$ $\rightarrow (X \in \textbf{Sets} \leftrightarrow \exists C \in \textbf{Sets} \,.\, [C, X]\textbf{ChoiceClass}))$

Das (zuerst von von Neumann formulierte) Axiom **LimitationOfSize** ist (relativ zu den restlichen Axiomen) äquivalent zu **Separation**, **Replacement**, **GlobalChoice** und **Union**, d.h.

$$\textbf{MK} \leftrightarrow \textbf{FIN} \wedge \textbf{Foundation} \wedge \textbf{Pairing} \wedge \textbf{Infinity} \wedge \textbf{Powerset} \wedge \textbf{LimitationOfSize}$$

ist eine klassenlogische Tautologie.[28]

Das zweite Axiom **ChoiceReplace** ist äquivalent zu Ersetzungs- und (lokalem) Auswahlaxiom.[29] Wir wollen abschließend den einzig interessanten Bestandteil dieser Äquivalenz (**ChoiceReplace** impliziert **Replacement**) skizzenhaft nachweisen. Gleichzeitig ist dies auch der erste und einzige Versuch in dieser Arbeit einen (nicht-trivialen) klassenlogischen formalen Beweis anzudeuten.

4.13 Satz

Gelte **FIN**, **Separation**, **Union**, **Pairing** *und* **Powerset**. *Dann gilt*

$$\textbf{ChoiceReplace} \quad \textit{gdw.} \quad \textbf{Choice} \textit{ und } \textbf{Replacement} \,.$$

Beweis:

Wir zeigen hier nur **ChoiceReplace** $\Rightarrow$ **Replacement**.

Zunächst beweisen wir das Ersetzungsaxiom für injektive Funktionen:

[25] Dass die Konsistenz von NBG die Konsistenz von ZFC impliziert ist klar. Für die Rückrichtung nehmen wir an das NBG inkonsistent ist. Es gilt also insbesondere NBG $\vdash \emptyset \neq \emptyset$. Da NBG eine konservative Erweiterung von ZFC ist, muss auch ZFC $\vdash \emptyset \neq \emptyset$ gelten, d.h. auch ZFC ist inkonsistent.

[26] Siehe etwa [Kun13, Exercise II.10.2] für eine Beweisskizze.

[27] Allerdings reicht es die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl zu fordern, um umgekehrt in ZFC ein Modell von MK zu erhalten.

[28] Aus Sicherheitsgründen haben wir auch noch **FIN** mit hinzugenommen, damit sich die Funktionen adäquat verhalten. Eventuell ist dies aber gar nicht notwendig. Führt man wie gewöhnlich Funktion direkt auf das Kuratowski-Paar zurück, reicht natürlich in jedem Falle das Paarmengen-Axiom.

[29] Mir ist nicht bekannt, ob es an anderer Stelle bereits studiert wurde. Über einen entsprechenden Hinweis würde ich mich sehr freuen.

1.	Γ	**FIN**	Prämisse
2.		**Separation**	Prämisse
3.		**Union**	Prämisse
4.		**Pairing**	Prämisse
5.		**ChoiceReplace**	Prämisse
6.		$A, B \subseteq \mathbb{D}$	Prämisse
7.		$f : A \to B$	Prämisse
8.		$A \in \mathbf{Sets}$	Prämisse
9.		f injektiv	Prämisse
		$C := \{a \in A; f\ulcorner a \lrcorner \notin A\}$	
10.		$C \in \mathbf{Sets}$	mit 2. und 8.
		$X := \{\{a, f\ulcorner a \lrcorner\}; a \in C\}$	
11.		$\forall x \in X\,.\,[x]\mathbf{Inhabited}$	mit Def. von X
12.		$a, b \in C \wedge z \in \{a, f\ulcorner a \lrcorner\} \cap \{b, f\ulcorner b \lrcorner\}$	Annahme
13.		$f\ulcorner a \lrcorner \notin A \wedge f\ulcorner b \lrcorner \notin A$	mit 12. und Def. von C
14.		$(z = a \wedge z = f\ulcorner b \lrcorner) \vee (z = b \wedge z = f\ulcorner a \lrcorner)$	Annahme
15.		$z \in C$	mit 14. und 12.
16.		$z \in A$	mit 15. und Def. von C
17.		$z \notin A$	mit 14. und 13.
18.		$\perp$	mit 16. und 17.
19.		$(z = f\ulcorner a \lrcorner \wedge z = f\ulcorner b \lrcorner)$	Annahme
20.		$a = b$	mit 12. und 9.
21.		$a = b$	mit 12., 18. und 20.
22.		$\forall x, y \in X\,.\,(x \neq y \to [x, y]\mathbf{Disjoint})$	mit 21. und Def. von X
23.		$[X]\mathbf{DisjointFamily}$	mit 11. und 22.
24.		$a \in C$	Annahme
25.		$f\ulcorner a \lrcorner \notin A$	mit Def. von C
26.		$f\ulcorner a \lrcorner \notin C$	mit 25. und Def. von C
27.		$C \cap \{a, f\ulcorner a \lrcorner\} = \{a\}$	mit 24. und 26.
28.		$[C \cap \{a, f\ulcorner a \lrcorner\}]\mathbf{Singleton}$	27. und 24.
29.		$[C, X]\mathbf{ChoiceClass}$	mit 28. und Def. von X
30.		$X \in \mathbf{Sets}$	mit 23., 10. und 29.
31.		$\cup X \in \mathbf{Sets}$	mit 30. und 3.
32.		$f\lceil C \rfloor \subseteq \cup X$	mit Def. von C und X
33.		$f\lceil C \rfloor \in \mathbf{Sets}$	mit 32., 31. und 2.
34.		$A \cap \operatorname{im} f \in \mathbf{Sets}$	mit 8. und 2.
35.		$f\lceil C \rfloor \cup (A \cap \operatorname{im} f) \in \mathbf{Sets}$	mit 33., 34., 4. und 3.
36.		$f\lceil C \rfloor \cup (A \cap \operatorname{im} f) \subseteq \operatorname{im} f$	trivial
37.		$a \in A$	Annahme
38.		$a \notin C$	Annahme
39.		$f\ulcorner a \lrcorner \in A$	mit 37., 38. und Def. von C
40.		$f\ulcorner a \lrcorner \in A \cap \operatorname{im} f$	mit 39., 37. und 7.
41.		$a \in C$	Annahme
42.		$f\ulcorner a \lrcorner \in f\lceil C \rfloor$	mit 41.
43.		$f\ulcorner a \lrcorner \in f\lceil C \rfloor \cup (A \cap \operatorname{im} f)$	mit 40. und 42.
44.		$\operatorname{im} f \subseteq f\lceil C \rfloor \cup (A \cap \operatorname{im} f)$	mit 7. und 43.
45.		$f\ulcorner C \lrcorner \cup (A \cap \operatorname{im} f) = \operatorname{im} f$	mit 36. und 44.
46.		$\operatorname{im} f \in \mathbf{Sets}$	mit 45. und 35.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall:

1.	Γ	$\mathbf{FIN}$	Prämisse
2.		$\mathbf{Separation}$	Prämisse
3.		$\mathbf{Union}$	Prämisse
4.		$\mathbf{Pairing}$	Prämisse
5.		$\mathbf{Powerset}$	Prämisse
6.		$\mathbf{ChoiceReplace}$	Prämisse
7.		$A, B \subseteq \mathbb{D}$	Prämisse
8.		$f : A \to B$	Prämisse
9.		$A \in \mathbf{Sets}$	Prämisse

$$[x]_\sim := \{b \in A; f\ulcorner x \lrcorner = f\ulcorner b \lrcorner\}$$

$$A/\!\sim\, := \{[x]_\sim; x \in A\}$$

10.		$x \in A$	Annahme
11.		$[x]_\sim \subseteq A$	mit Def. $[x]_\sim$
12.		$A/\!\sim\, \subseteq \mathcal{P}(A)$	mit 11. und Def. $A/\!\sim$
13.		$\mathcal{P}(A) \in \mathbf{Sets}$	mit 9. und 5.
14.		$A/\!\sim\, \in \mathbf{Sets}$	mit 12., 13. und 2.

$$f_\sim := \langle [x]_\sim \in A/\!\sim\, \mapsto f\ulcorner x \lrcorner \in B \rangle$$

15.		$\forall x_1, x_2 \in A \,.\, ([x_1]_\sim = [x_2]_\sim \leftrightarrow f\ulcorner x_1 \lrcorner = f\ulcorner x_2 \lrcorner)$	mit Def. $[x]_\sim$
16.		$f_\sim : A/\!\sim\, \to B$	mit 15., 8. und Def. $f_\sim$
17.		$[f_\sim]\mathbf{LeftUnique}$	mit 15., 8. und Def. $f_\sim$
18.		$\operatorname{im} f_\sim \in \mathbf{Sets}$	mit 1.-9., 16., 17. und (i)
19.		$\operatorname{im} f_\sim = \operatorname{im} f$	mit 8. und Def. $f_\sim$
20.		$\operatorname{im} f \in \mathbf{Sets}$	mit 19. und 18.

■

5. Der große vereinheitlichte Kalkül

> *Das Ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, die ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euklid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber man kann fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern, indem man alles beweist, was beweisbar ist. Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, das alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicherzustellen.*
>
> Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*

Bei allen bisher von uns angegebenen konkreten Ausdrucks- und Beweiskalkülen handelt es sich notwendigerweise um unendliche Kalküle. Das liegt daran, dass es für gewisse Schlüsse, die wir uns zwar gedanklich als nach einem einheitlichen Prinzip gebildet denken, unmöglich ist, sie als ein Schlussschema in unserem exakten Sinne aufzufassen, da für sie keine Parametrisierung nach dem Träger des Kalküls, d.h. in unserem Falle nach $M = \langle\!\langle \mathbb{N} \rangle\!\rangle$, möglich ist.[1] So lassen sich zum Beispiel in den Ausdruckskalkülen die „Variablen-Schlüsse“

$$\frac{}{u} \qquad \text{für jedes } u \in \mathcal{V}$$

nicht zu einem Schlussschema zusammenfassen, da es offensichtlich falsch ist, dass jedes $u \in M$ einen Ausdruck bildet. D.h. die „Parametrisierungs-Variable“ u lässt sich nicht als Metavariable (in unserem exakten Sinne) auffassen. Auch alle Schlussregeln des klassenlogischen Beweiskalküls sind nur „meta-schematisch“, da sie allesamt Nebenbedingungen besitzen. Auch Forderungen wie „φ ist Ausdruck“ entsprechen in unserem Beweiskalkül, in dem *Sequenzen* und keine *Ausdrücke* abgeleitet werden, einer Nebenbedingung. Einzig und allein diejenigen Sequenzen Γ, an die keine Nebenbedingungen gestellt sind und die in mindestens einer Prämisse vorkommen, könnten wir als Metavariablen auffassen.[2]

Ist es grundsätzlich unmöglich einen endlichen Kalkül anzugeben, der unseren Beweisbegriff erfasst?

Versteht man darunter einen endlichen Kalkül $\mathcal{K}$, dessen generierte Menge $G_{\mathcal{K}}$ genau die Menge aller korrekten klassenlogischen Sequenzen ist, so wird man diese Frage wahrscheinlich bejahen

[1] Es spielt hierbei keine Rolle, welchen konkreten Träger wir für unsere Kalküle wählen und ob wir Ausdrücke als verschachtelte Tupel oder als Zeichenketten auffassen.
[2] Was wir aber aus Gründen der Einheitlichkeit nicht getan haben.

müssen. Ist man jedoch damit zufrieden, dass die Menge aller korrekten Sequenzen eine wohlbestimmte (d.h. genauer eine entscheidbare) Teilmenge von $G_{\mathcal{K}}$ ist, so lautet die Antwort auf unsere Frage: Nein![3]

In diesem Kapitel soll ein solcher Kalkül GUK[4] angegeben werden. Es handelt sich um einen Ausdrucks- und Beweiskalkül vereinigenden Kalkül. Genauer gesagt lassen sich in ihm die folgenden Prädikatsbestimmungen ableiten:

Prädikatsbestimmung	**Bedeutung**
v : `Variable`	v ist eine Variable
u : `Before` : v	die Variable u kommt vor der Variablen v
u : `Distinct` : v	die Variablen u und v sind verschieden
a : `Bool`	a ist eine boolescher Ausdruck
a : `Formula`	a ist eine Ausdruck
s : `Sequent`	s ist eine Sequenz
s : `IncludedIn` : t	alle Glieder der Sequenz s sind auch in t enthalten
v : `NotFreeIn` : s	die Variable v kommt in der Sequenz s nicht frei vor
s : `Equivalent` : t	die Sequenzen s und t sind syntaktisch äquivalent
s : `Entails` : a	der Ausdruck a folgt aus der Sequenzen s

Da dieser „große vereinheitlichte Kalkül“ im Folgenden nicht weiter theoretisch untersucht werden soll, wollen wir an dieser Stelle eine Zeichenketten-Repräsentation wählen.[5] Den Namen der Schlussschemata haben wir zudem Bezeichnungen wie `#Axioma` oder `#Lemma` hinzugefügt. Dies strukturiert und gibt uns eine zusätzliche Freiheit in der Benennung: Axiome und Lemmata können denselben Namen tragen.[6]

Um die Lesbarkeit zu erleichtern werden wir zwischen die Definitionen der Schlussschemata ein paar Kommentare einstreuen. Diese haben aber nur ergänzenden Charakter. Der große Kalkül sollte, mit dem Vorwissen der vorherigen Kapitel, eigentlich auch selbsterklärend sein.

[3] Diese Aussagen betreffen im Übrigen nicht nur unseren klassenlogischen Beweiskalkül, sondern auch das prädikatenlogische Analogon und vemutlich sogar alle interessanten mathematischen Beweiskalküle.

[4] Grand Unified Kalkuel ;-)

[5] Es sollte aber klar sein, dass sich auch hier leicht verschachtelte Tupel nutzen ließen. Z.B. könnte man etwa v : `Variable` als Schreibweise für $\langle -1, v\rangle$ und s : `Etails` : a als Schreibweise für $\langle -10, s, a\rangle$ auffassen. In diesem Falle würden wir natürlich auch für die Variablen, Ausdrücke und Sequenzen unsere Tupel-Repräsentation verwenden.

[6] Genau genommen enthält der eigentliche Name das entsprechende Kontrollwort. Die Eindeutigkeit der Namen ist nämlich im Kontext unseres Bibliothek-Begriffs notwendig.

5.1. Variablen

Die abzählbar vielen Variablen stellen wir in „gestrichener“ Form dar:

```
#Axioma var0

---
V : Variable
```

```
#Axioma varnext(v)

v : Variable
---
v' : Variable
```

Um die Verschiedenheit von Variablen zu „definieren“ benutzen wir deren natürliche Ordnung:

```
#Axioma befnext(v)

v : Variable
---
v : Before : v'
```

```
#Axioma beftran(u|v|w)

u : Before : v
v : Before : w
---
u : Before : w
```

```
#Axioma distbef(v|w)

v : Before : w
---
v : Distinct : w
```

```
#Axioma distsym(v|w)

v : Distinct : w
---
w : Distinct : v
```

Leiten wir einmal aus diesem Teilkalkül beispielhaft die Verschiedenheit von v_5 und v_3 ab:

Beispiel:

```
#Lemma somethingveryinteresting

---
V''''' : Dictinct : V'''

#Demonstratio
V : Variable                    #Axioma var0
V' : Variable                   #Axioma varnext(V)
V'' : Variable                  #Axioma varnext(V')
V''' : Variable                 #Axioma varnext(V'')
V''' : Before : V''''           #Axioma befnext(V''')
V'''' : Variable                #Axioma varnext(V''')
V'''' : Before : V'''''         #Axioma befnext(V'''')
V''' : Before : V'''''          #Axioma beftran(V'''|V''''|V''''')
V''' : Dictinct : V'''''        #Axioma distbef(V'''|V''''')
V''''' : Dictinct : V'''        #Axioma distsym(V'''|V''''')
#qed
```

5.2. Ausdrücke

Die „termhaften“ Ausdrücke und die booleschen Ausdrücke werden gemeinsam abgeleitet:

```
#Axioma formvar(v)

v : Variable
---
v : Formula
```

```
#Axioma formbool(a)

a : Bool
---
a : Formula
```

```
#Axioma booleq(a|b)

a : Formula
b : Formula
---
[a,b]Equal : Bool
```

```
#Axioma booland(a|b)

a : Formula
b : Formula
---
[a,b]And : Bool
```

```
#Axioma boolel(a|b)

a : Formula
b : Formula
---
[a,b]Element : Bool
```

```
#Axioma boolall(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
[v;a]All : Bool
```

```
#Axioma formthe(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
The[v;a] : Formula
```

```
#Axioma formclass(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
Class[v;a] : Formula
```

5.3. Sequenzen und Teilsequenzen

Sequenzen werden durch Konkatenation von Ausdrücken mit einem Leerzeichen als Trennzeichen dargestellt.[7] Auf den Umgang mit der leeren Sequenz gehen wir weiter unten noch einmal ein.

```
#Axioma seqempty

---
 : Sequent
```

```
#Axioma seqform(a)

a : Formula
---
a : Sequent
```

```
#Axioma seqadd(s|t)

s : Sequent
t : Sequent
---
s t : Sequent
```

In der Monotonieregel benötigen wir eine „Teilmengen“-Beziehung von Sequenzen:

```
#Axioma incempty(s)

s : Sequent
---
 : IncludedIn : s
```

```
#Axioma incref(s)

s : Sequent
---
s : IncludedIn : s
```

```
#Axioma incaddleft(r|s|t)

r : IncludedIn : t
s : IncludedIn : t
---
r s : IncludedIn : t
```

```
#Axioma incaddright1(r|s|t)

t : Sequent
r : IncludedIn : s
---
r : IncludedIn : t s
```

```
#Axioma incaddright2(r|s|t)

t : Sequent
r : IncludedIn : s
---
r : IncludedIn : s t
```

[7] Bei einem Verzicht auf die Postfix-Darstellung [...]**Name** von booleschen Ausdrücken würde sich alternativ auch eine Konkatenation ohne Trennzeichen anbieten. Wir haben uns hier aber aus Gründen der Lesbarkeit dagegen entschieden.

5.4. Nicht freies Vorkommen

Zur Erinnerung betrachte man die Definition

$$\operatorname{frei} : L_{\mathrm{CL}} \to \mathcal{P}(\mathcal{V}),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \{\varphi\}, & \varphi \in \mathcal{V} \\ \operatorname{frei} \alpha \cup \operatorname{frei} \beta, & \varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ \operatorname{frei} \alpha \setminus u, & \varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GQ}} \end{cases}$$

Der Ausgangspunkt des nicht freien Vorkommens ist die Verschiedenheit von Variablen:

```
#Axioma nfrdist(u|v)

u : Distinct : v
---
u : NotFreeIn : v
```

Bei den Grundoperatoren reicht es die beiden Operanden zu betrachten:

```
#Axioma nfreq(v|a|b)

a : Formula
b : Formula
v : NotFreeIn : a
v : NotFreeIn : b
---
v : NotFreeIn : [a,b]Equal
```

```
#Axioma nfrand(v|a|b)

a : Formula
b : Formula
v : NotFreeIn : a
v : NotFreeIn : b
---
v : NotFreeIn : [a,b]And
```

```
#Axioma nfrel(v|a|b)

a : Formula
b : Formula
v : NotFreeIn : a
v : NotFreeIn : b
---
v : NotFreeIn : [a,b]Element
```

Für jeden Grundquantor brauchen wir zwei Schlussschemata: das erste besagt, dass die im Operanden nicht frei vorkommenden Variablen auch in dem quantifizierten Ausdruck nicht frei vorkommen; die zweite, dass die Quantifizierungs-Variable nicht frei vorkommt.

```
#Axioma nfrall1(v|u|a)

a : Formula
v : NotFreeIn : a
---
v : NotFreeIn : [u;a]All
```

```
#Axioma nfrall2(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
v : NotFreeIn : [v;a]All
```

```
#Axioma nfrthe1(v|u|a)

a : Formula
v : NotFreeIn : a
---
v : NotFreeIn : The[u;a]
```

```
#Axioma nfrthe2(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
v : NotFreeIn : The[v;a]
```

```
#Axioma nfrcl1(v|u|a)

a : Formula
v : NotFreeIn : a
---
v : NotFreeIn : Class[u;a]
```

```
#Axioma nfrcl2(v|a)

v : Variable
a : Formula
---
v : NotFreeIn : Class[v;a]
```

Schließlich übertragen wir die Beziehung des nicht freien Vorkommens auf Sequenzen.[8]

```
#Axioma nfrempty(v)

v : Variable
---
v : NotFreeIn :␣
```

```
#Axioma nfradd(v|s|t)

v : NotFreeIn : s
v : NotFreeIn : t
---
v : NotFreeIn : s t
```

[8]Hier und im Folgenden stellen wir das Leerzeichen manchmal auch dar durch ␣ .

5.5. Syntaktische Äquivalenz

Auch hier ist es sinnvoll sich noch einmal die Definition der syntaktischen Äquivalenz vor Augen zu führen:

$=_S$ ist die kleinste Äquivalenzrelationen auf L_D mit:

(i) Wenn $\alpha =_S \gamma$ und $\beta =_S \delta$ dann auch $\big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle\rangle, \langle \gamma, \delta\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\text{GJ}}$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in L_D$

(ii) Wenn $\alpha =_S \beta$ dann auch $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle u\rangle, \langle \beta\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\text{GQ}}$, $\alpha, \beta \in L_D$, $u \in \mathcal{V}$

(iii) $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle\big\rangle =_S \big\langle i, \langle w\rangle, \langle \alpha\frac{w}{u}\rangle\big\rangle$ für alle $i \in I_{\text{GQ}}$, $\alpha \in L_D$, $u, w \in \mathcal{V}$ mit $w \notin \operatorname{frei} \alpha \setminus u$

(iv) Wenn $\alpha =_S \beta$ und $\gamma =_S \delta$ dann auch $\alpha\frac{\gamma}{u} =_S \beta\frac{\delta}{u}$, für alle $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in L_D$, $u \in \mathcal{V}$

(v) $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle =_S \delta_i \frac{\vec{w}}{v_0} \frac{\vec{u}}{v_1} \frac{\vec{\alpha}}{v_2}$ für alle $i \in I_D$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{w} \in {}^{k_i}\mathcal{V}$ injektiv, sodass $w_j \notin \operatorname{frei}(\vec{u}\ \vec{\alpha})$ für alle $j \in \operatorname{len} \vec{w}$

Fordern wir also zunächst die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

```
#Axioma equivref(s)

s : Sequent
---
s : Equivalent : s
```

```
#Axioma equivsym(s|t)

s : Equivalent : t
---
t : Equivalent : s
```

```
#Axioma equivtran(r|s|t)

r : Equivalent : s
s : Equivalent : t
---
r : Equivalent : t
```

Bedingung (i):

```
#Axioma equiveq(a|b|c|d)

a : Formula
b : Formula
a : Equivalent : c
b : Equivalent : d
---
[a,b]Equal : Equivalent : [c,d]Equal
```

```
#Axioma equivand(a|b|c|d)

a : Formula
b : Formula
a : Equivalent : c
b : Equivalent : d
---
[a,b]And : Equivalent : [c,d]And
```

```
#Axioma equivel(a|b|c|d)

a : Formula
b : Formula
a : Equivalent : c
b : Equivalent : d
---
[a,b]Element : Equivalent : [c,d]Element
```

Bedingungen (ii) und (iii)

```
#Axioma equivall1(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
a : Equivalent : b
---
[v;a]All : Equivalent : [v;b]All
```

```
#Axioma equivall2(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
w : NotFreeIn : [v;a]All
---
[v;a]All : Equivalent : [w;Sub{a;w,v}]All
```

```
#Axioma equivthe1(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
a : Equivalent : b
---
The[v;a] : Equivalent : The[v;b]
```

```
#Axioma equivthe2(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
w : NotFreeIn : [v;a]All
---
The[v;a] : Equivalent : The[w;Sub{a;w,v}]
```

```
#Axioma equivcl1(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
a : Equivalent : b
---
Class[v;a] : Equivalent : Class[v;b]
```

```
#Axioma equivcl2(v|a|b)

v : Variable
a : Formula
w : NotFreeIn : [v;a]All
---
The[v;a] : Equivalent : The[w;Sub{a;w,v}]
```

Bedingung (iv)

```
#Axioma equivsub(a|c|v|b|d)

a : Formula
c : Formula
v : Variable
a : Equivalent : b
c : Equivalent : d
---
Sub{a;c,v} : Equivalent : Sub{b;d,v}
```

Auf Bedingung (v) ist bei der Definition jeder konkreten Syntaxerweiterungen einzugehen.

Schließlich ist die syntaktische Äquivalenz auf Sequenzen zu übertragen.

```
#Axioma equivadd(q|s|r|t)

q : Equivalent : s
r : Equivalent : t
---
q r : Equivalent : s t
```

5.6. Substitution

In Kapitel 3 hatten wir $\operatorname{sub}' : L_{\mathrm{CL}} \sqcap L_D \sqcap \mathcal{V} \to L_D,\ \langle \varphi, \gamma, v\rangle \mapsto \varphi^\gamma_v$ definiert durch

$$\varphi^\gamma_v = \begin{cases} \gamma, & \text{falls } \varphi = v \\ \varphi, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \setminus v \\ \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha^\gamma_v, \beta^\gamma_v \rangle\rangle, & \text{falls } \varphi = \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GJ}} \\ \begin{array}{l} \varphi, \\ \langle i, \langle \tilde u\rangle, \langle (\alpha^{\tilde u}_u)^\gamma_v \rangle\rangle, \end{array} & \text{falls } \varphi = \langle i, \langle u\rangle, \langle \alpha\rangle\rangle \text{ mit } i \in I_{\mathrm{GQ}} \begin{array}{l} \text{und } \gamma = v \text{ oder } v \notin \operatorname{frei} \varphi \\ \text{sonst} \end{array} \end{cases}$$

wobei $\tilde u := \begin{cases} u, & \text{falls } u \notin \operatorname{frei}_D \gamma \\ \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \gamma\ \alpha), & \text{sonst} \end{cases}$; in beiden Fällen ist also $\tilde u \notin \operatorname{frei}_D(v\ \gamma\ \varphi)$.

und damit dann die allgemeine Substitution sub_D durch

$$\operatorname{sub}_D : L_D \sqcap L_D \sqcap \mathcal{V} \to L_D,\ \langle \varphi, \gamma, v\rangle \mapsto \varphi^\gamma_v := \operatorname{sub}' \ulcorner \langle \operatorname{Red}_D \varphi, \gamma, v\rangle \lrcorner\ .$$

Auch die Substitutionsumformungen realisieren wir mit der syntaktischen Äquivalenz. Mit Hinblick auf das gerade angegebene `#Axioma equivsub` reichen offenbar die folgenden Regeln aus.[9]

Der Variablenfall und der erste Fall der Grundquantoren werden abgedeckt durch:

```
#Axioma subtriv1(v|c)

v : Variable
c : Formula
---
Sub{v;c,v} : Equivalent : c
```

```
#Axioma subtriv2(a|v)

a : Formula
v : Variable
---
Sub{a;v,v} : Equivalent : a
```

```
#Axioma subtriv3(a|c|v)

a : Formula
c : Formula
v : NotFreeIn : a
---
Sub{a;c,v} : Equivalent : a
```

Für die Grundjunktoren:

```
#Axioma subeq(a|b|c|v)

a : Formula
b : Formula
c : Formula
v : Variable
---
Sub{[a,b]Equal;c,v} : Equivalent : [Sub{a;c,v},Sub{b;c,v}]Equal
```

[9] Man beachte auch, dass $\varphi^\gamma_v = \varphi$, falls $\gamma = v$ oder $v \notin \operatorname{frei} \varphi$.

```
#Axioma suband(a|b|c|v)

a : Formula
b : Formula
c : Formula
v : Variable
---
Sub{[a,b]And;c,v} : Equivalent : [Sub{a;c,v},Sub{b;c,v}]And
```

```
#Axioma subel(a|b|c|v)

a : Formula
b : Formula
c : Formula
v : Variable
---
Sub{[a,b]Element;c,v} : Equivalent : [Sub{a;c,v},Sub{b;c,v}]Element
```

Der zweite Fall der Grundquantoren ist enthalten in:

```
#Axioma suball(u|a|c|v|w)

c : Formula
v : Variable
w : NotFreeIn : [u;a]All c v
---
Sub{[u;a]All;c,v} : Equivalent : [w;Sub{Sub{a;w,u};c,v}]All
```

```
#Axioma subthe(u|a|c|v|w)

c : Formula
v : Variable
w : NotFreeIn : [u;a]All c v
---
Sub{The[u;a];c,v} : Equivalent : The[w;Sub{Sub{a;w,u};c,v}]
```

```
#Axioma subcl(u|a|c|v|w)

c : Formula
v : Variable
w : NotFreeIn : [u;a]All c v
---
Sub{Class[u;a];c,v} : Equivalent : Class[w;Sub{Sub{a;w,u};c,v}]
```

5.7. Syntaxerweiterungen

Wir definieren nun noch die in der Formulierung des Beweiskalküls verwendeten eingeführten Operatoren.

```
#Definitio true(v)

v : Variable
---
True : Equivalent : [v;[v,v]Equal]All
```

```
#Definitio false(v)

v : Variable
---
False : Equivalent : [v;v]All
```

```
#Definitio nonsense(v)

v : Variable
---
Nonsense : Equivalent : The[v;False]
```

```
#Definitio domain(v)

v : Variable
---
Domain : Equivalent : Class[v;True]
```

```
#Definitio not(a)

a : Formula
---
Not[a] : Equivalent : [[a,True]Equal,False]Equal
```

Die eingeführten Operatoren erben die freien Variablen und die Eigenschaft des Boolesch-Seins von ihren Definientia, deshalb benötigen wir die folgenden Schlussschemata.

```
#Axioma boolequiv(a|b)

a : Equivalent : b
a : Bool
---
b : Bool
```

```
#Axioma formequiv(a|b)

a : Equivalent : b
a : Formula
---
b : Formula
```

```
#Axioma nfrequiv(v|s|t)

v : NotFreeIn : s
s : Equivalent : t
---
v : NotFreeIn : t
```

5.8. Beweisrelation

Nun haben wir alle Vorbereitungen getroffen um die Schlussschemata des Beweiskalküls anzugeben:

Grundregeln

```
#Axioma mon(s|t|a)

s : IncludedIn : t

s : Entails : a
---
t : Entails : a
```

```
#Axioma assum(s|a)

s : Sequent
a : Formula

---
s a : Entails : a
```

```
#Axioma chain(s|a|b)

s : Entails : a
s a : Entails : b
---
s : Entails : b
```

```
#Axioma case(s|a|b)

a : Bool

s a : Entails : b
s [a,False]Equal : Entails : b
---
s : Entails : b
```

```
#Axioma fre(s|a)

s : Entails : a
---
s : Entails : [a,True]Equal
```

Konjunktionsregeln

```
#Axioma kon1(s|a|b)

s : Entails : [a,b]And
---
s : Entails : a
```

```
#Axioma kon2(s|a|b)

s : Entails : [a,b]And
---
s : Entails : b
```

```
#Axioma kon3(s|a|b)

s : Entails : a
s : Entails : b
---
s : Entails : [a,b]And
```

Gleichheitsregeln

```
#Axioma ref(s|a)

s : Sequent
a : Formula

---
s : Entails : [a,a]Equal
```

```
#Axioma sub(s|a|c|d|v)

s : Entails : Sub{a;c,v}
s : Entails : [d,c]Equal
---
s : Entails : Sub{a;d,v}
```

Allquantorregeln

```
#Axioma gen(s|a|u|v)

u : NotFreeIn : s [v;a]All

s : Entails : Sub{a;u,v}
---
s : Entails : [v;a]All
```

```
#Axioma part(s|a|c|v)

s : Entails : [v;a]All
---
s : Entails : Sub{a;c,v}
```

Kennzeichnungsregeln

```
#Axioma the1(s|a|c|u|v)

u : NotFreeIn : s The[v;a] c

s : Entails : Sub{a;c,v}
s Sub{a;u,v} : Entails : [u,c]Equal
---
s : Entails : [The[v;a],c]Equal
```

```
#Axioma the2(s|a|v)

s : Entails : [v;[a]Not]All
---
s : Entails : [The[v;a],Nonsense]Equal
```

```
#Axioma the3(s|a|c|d|v)

s : Entails : Sub{a;c,v}
s : Entails : Sub{a;d,v}
s : Entails : [[c,d]Equal]Not
---
s : Entails : [The[v;a],Nonsense]Equal
```

Klassenregeln

```
#Axioma cl1(s|c|d|v)

s : Entails : [d,c]Element
---
s : Entails : [c,Class[v;[v,c]Element]]Equal
```

```
#Axioma cl2(s|c|d)

s : Entails : [c,d]Element
---
s : Entails : [c,Domain]Element
```

```
#Axioma cl3(s|a|v)

s : Sequent
a : Formula
v : Variable

---
s : Entails : [[Class[v;a],Nonsense]Equal]Not
```

```
#Axioma abs1(s|a|c|v)

s : Entails : [c,Domain]Element
s : Entails : Sub{a;c,v}
---
s : Entails : [c,Class[v;a]]Element
```

```
#Axioma abs1(s|a|c|v)

s : Entails : [c,Class[v;a]]Element
---
s : Entails : Sub{a;c,v}
```

```
#Axioma nons(s)

s : Sequent

---
s : Entails : [[Nonsense,Domain]Element]Not
```

```
#Axioma ext(s|a|b|u|v|w)

w : NotFreeIn : s Class[u;a] Class[v;b]

s [w,Class[u;a]]Element : Entails : [w,Class[v;b]]Element
s [w,Class[v;b]]Element : Entails : [w,Class[u;a]]Element
---
s : Entails : [Class[u;a],Class[v;b]]Equal
```

Regel der syntaktischen Äquivalenz

```
#Axioma seq(s|a|t|b)

s : Entails : a
s : Equivalent : t
a : Equivalent : b
---
t : Entails : b
```

5.9. Leere Sequenzen

Wir haben hier Sequenzen als eine durch Leerzeichen getrennte Folge von Ausdrücken dargestellt. Der Verkettung von Sequenzen entspricht dann das durch ein Leerzeichen getrennte Hintereinanderschreiben von Zeichenketten. Das ist sehr praktisch und intuitiv. Allerdings bringt die leere Sequenz, die wir durch die leere Zeichenkette darstellen, eine Schwierigkeit mit sich: Es können ungewollte Leerzeichen entstehen. So hat etwa die Voraussetzungsregel

```
#Axioma assum(s|a)

s : Sequent
a : Formula

---
s a : Entails : a
```

wenn für `s` die leere Sequenz eingesetzt wird, die folgende Gestalt:

```
#Axioma assum(|a)

 : Sequent
a : Formula

---
 a : Entails : a
```

Für einen vollständig exakten Gebrauch dieses Kalküls sind deshalb noch die beiden folgenden Schlussschemata notwendig.[10]

```
#Axioma wsleftdel(x)

␣x
---
x
```

```
#Axioma wsleftadd(x)

x
---
␣x
```

[10] Einem mit dem Kalkül arbeitenden Menschen (oder auch einem Proof-Checker) kann und sollte man natürlich sagen, dass er vorangestellte Leerzeichen ignorieren darf. Die Berechtigung dafür sind jedoch die hier angegebenen Aufräum-Regeln. Ein anderer Ausweg wäre natürlich, dass man für die entsprechenden Regeln (wie etwa die Voraussetzungsregel) ein eigenes Axiom für die leere Sequenz fordert.
Ich glaube im Übrigen, dass es keine bessere Darstellungsmöglichkeit für Sequenzen gibt. Auch mit anderen Darstellungen von Sequenzen als Zeichenketten wird man ähnliche Probleme bekommen. (Man beachte, dass wir eine lückenlose Hintereinanderschreibung von Ausdrücken aufgrund unserer Präfix- *und* Postfix-Notation der Operatornamen nicht verwenden können. Verwendet man nur die Präfix-Notation wäre eine solche lückenlose Verkettung aus mathematischer Sicht sicherlich ästhetischer. Allerdings lässt sie sich nicht so gut lesen und zudem würde man eventuell Probleme mit der Bezeichnung von direkt nebeneinander geschriebenen Meta-Variablen bekommen.)

5.10. Ergänzungen

Wenngleich die obigen Schlussschemata prinzipiell ausreichen, um alle korrekten klassenlogischen Sequenzen (in Form von parameter- und prämissenlosen Schlussschemata mit Konklusionen der Gestalt ... `: Entails :` ...) abzuleiten, wollen wir hier noch ein paar praktische Erweiterungen einführen, die bei der Ableitung von einigen Schlussschemata (die Parameter enthalten) sogar notwendig sind.

Zunächst halten wir die Beobachtung fest, dass die Substitution das Boolesch-Sein eines Ausdruckes nicht beeinflusst.

```
#Axioma boolsub(a|c|v)

a : Bool
c : Formula
v : Variable
---
Sub{a;c,v} : Bool
```

```
#Axioma formsub(a|c|v)

a : Formula
c : Formula
v : Variable
---
Sub{a;c,v} : Formula
```

Weiter wollen wir auch hier über die n-te in einer Sequenz `s` nicht (frei) vorkommende Variable sprechen können. Wir bezeichnen sie durch `v{s}`, wobei `v` die n-te Variable in der Folge der Variablen `V`, `V'`, `V''` ... sei.[11] Dies ermöglicht uns auch beim Vorhandensein von Meta-Variablen noch nicht genutzte Variablen einzuführen.

```
#Axioma varvnfr(v|s)

v : Variable
s : Sequent
---
v{s} : Variable
```

```
#Axioma distvnfr(v|w|s)

v : Distinct : w
s : Sequent
---
v{s} : Distinct : w{s}
```

```
#Axioma nfrvnfr(v|s)

v : Variable
s : Sequent
---
v{s} : NotFreeIn : s
```

```
#Axioma nfrincl(v|s|t)

v : NotFreeIn : s
t : IncludedIn : s
---
v : NotFreeIn : t
```

[11] Es ist hierbei egal, ob man die Variable `v{s}` so interpretiert, dass sie in `s` gebunden vorkommen darf, oder nicht. Wichtig ist nur, dass sie nicht *frei* in `s` vorkommen darf.

Ebenfalls praktisch für die Ableitung von Schlussschemata mit Meta-Variablen sind die folgenden „Backwards-Regeln“:

```
#Axioma nfrbackand1(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]And
---
v : NotFreeIn : a
```

```
#Axioma nfrbackand2(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]And
---
v : NotFreeIn : b
```

```
#Axioma nfrbackeq1(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]Equal
---
v : NotFreeIn : a
```

```
#Axioma nfrbackeq2(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]Equal
---
v : NotFreeIn : b
```

```
#Axioma nfrbackel1(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]Element
---
v : NotFreeIn : a
```

```
#Axioma nfrbackel2(v|a|b)

v : NotFreeIn : [a,b]Element
---
v : NotFreeIn : b
```

```
#Axioma nfrbackall(v|u|a)

v : Distinct : u
v : NotFreeIn : [u;a]All
---
v : NotFreeIn : a
```

```
#Axioma nfrbackthe(v|u|a)

v : Distinct : u
v : NotFreeIn : The[u;a]
---
v : NotFreeIn : a
```

```
#Axioma nfrbackclass(v|u|a)

v : Distinct : u
v : NotFreeIn : Class[u;a]
---
v : NotFreeIn : a
```

Es lassen sich manche der obigen Schlussschemata so anwenden, dass auch innerhalb oder nachfolgend der Zeichenkette überflüssige Leerzeichen entstehen. Wir könnten deshalb weitere Aufräum-Regeln hinzufügen.[12]

```
#Axioma wsbetdel(x|y)

x␣␣y
---
x␣y
```

```
#Axioma wsbetadd(x|y)

x␣y
---
x␣␣y
```

```
#Axioma wsrightdel(x|y)

x␣
---
x
```

```
#Axioma wsrightadd(x|y)

x
---
x␣
```

Im Übrigen ist es sehr praktisch die syntaktische Äquivalenz mit der antezedenslosen abgeleiteten Gleichheit zu identifizieren. Dafür ist nur noch das folgende Schlussschema notwendig.[13]

```
#Axioma equiveq(a|b)

 : Entails : [a,b]Equal
---
a : Equivalent : b
```

[12] Auch hier will man natürlich die Anwendung dieser Regeln in den seltensten Fällen zu Gesicht bekommen. Da entsprechende Situationen nur durch Ungeschick entstehen können (was noch genauer zu prüfen wäre), sind diese Regeln im Übrigen auch nicht notwendig. Allerdings ist zu bemerken, dass durch die Regeln `wsrightdel` und `wsrightadd` in gewisser Weise gerechtfertigt wird, dass in den Beweiszeilen von formalen Ableitungen zwischen Inhalt und Angabe des angewendeten Schlussschemas beliebig viele Leerzeichen stehen dürfen. Hier stoßen wir auf das Problem, dass das Leerzeichen sowohl als inhaltliches Zeichen, als auch als reines Layout-Zeichen aufgefasst wird.

[13] Allerdings muss dann genau genommen ein neuer Korrektheitsbeweis durchgeführt werden. Man siehe dazu auch Seite 109.

5.11. Beispiel-Ableitungen

Abschließend wollen wir hier einmal beispielhaft die Ableitungen der *KS2*-Regel und *SYM*-Regel von Seite 72 angeben bzw. andeuten:

```
#Lemma ks2(s|a|b|c)

s : Sequent
a : Formula
b : Formula
c : Formula

s a : Entails : b
s b : Entails : c
---
s a : Entails : c

#Demonstratio
s : Sequent                 #Praemssio
a : Formula                 #Praemssio
b : Formula                 #Praemssio
c : Formula                 #Praemssio
s a : Entails : b           #Praemssio
s b : Entails : c           #Praemssio

s : IncludedIn : s          #Axioma incref(s)
a : Sequent                 #Axioma seqform(a)
s : IncludedIn : s a        #Axioma incaddright2(s|s|a)
b : Sequent                 #Axioma seqform(b)
s : IncludedIn : s a b      #Axioma incaddright2(s|s a|b)
b : IncludedIn : b          #Axioma incref(b)
b : IncludedIn : a b        #Axioma incaddright1(b|a|b)
b : IncludedIn : s a b      #Axioma incaddright1(b|s|a b)
s b : IncludedIn : s a b    #Axioma incaddleft(s|b|s a b)

s a b : Entails : c         #Axioma mon(s b|s a b|c)
s a : Entails : c           #Axioma chain(s a|b|c)
#qed
```

Es ist erstaunlich wie viele Zwischenschritte notwendig sind, um die offensichtliche Inklusionsbeziehung `s b : IncludedIn : s a b` abzuleiten; das ist der Preis für die absolut-axiomatische Methode. Natürlich müssten zumindest die für den Menschen vollkommen uninteressanten Ableitungen syntaktischer Beziehungen automatisch generiert werden können und lesbarere Darstellungen möglich sein, wenn ein derartiges System wirklich genutzt werden sollte.[14]

[14] Ich glaube, dass sich grundsätzlich auf dem hier angegebenen voll-axiomatischen Kalkül aufbauend ein derartiges System realisieren lässt, welches einerseits durch lückenfüllende Hilfsprogramme und automatisch generierbare Darstellungen praktisch nutzbar ist und andererseits (bei Bedarf) die vollständigen zugrundeliegenden Ableitungen ausgeben kann. Ein paar Gedanken dazu habe ich am Ende des nächsten Kapitels niedergeschrieben.

Die wesentlichen Schritte der Ableitung von *SYM* sind gegeben durch:

```
#Lemma sym(s|a|b|c)

s : Sequent
a : Formula
b : Formula
c : Formula

s : Entails : [a,b]Equal
---
s : Entails : [b,a]Equal

#Demonstratio
s : Sequent                                     #Praemssio
a : Formula                                     #Praemssio
b : Formula                                     #Praemssio
c : Formula                                     #Praemssio
s : Entails : [a,b]Equal                        #Praemssio

s : Entails : [b,b]Equal                        #Axioma ref(s|b)

[b,b]Equal : Equivalent : Sub{[b,V{b}]Equal;b,V{b}}

s : Entails : Sub{[b,V{b}]Equal;b,V{b}}

s : Entails : Sub{[b,V{b}]Equal;a,V{b}}         #Axioma sub(s|[b,V{b}]Equal|b|a|V{b})

Sub{[b,V{b}]Equal;a,V{b}} : Equivalent : [b,a]Equal

s : Entails : [b,a]Equal
#qed
```

6. Post-Kalküle

Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimäßig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, daß sie, wie man sagt, für einen denkt.

Gottlob Frege, *Grundlagen der Arithmetik*

Wenden wir uns nun noch einmal dem Kalkül-Begriff zu. Wir wollen mit den (nach Emil Leon Post benannten) kanonischen Post-Kalkülen (engl. Post canonical systems) eine natürliche Gesamtheit von Kalkülen über Zeichenketten angeben, die Turing-vollständig ist. Durch ein paar Beispiele soll deutlich gemacht werden, wie sich viele formale Systeme auf recht natürliche Art und Weise durch Post-Kalküle beschreiben lassen.

Abschließend wollen wir einen Programmentwurf für einen Post-Kalkül-Checker andeuten, welcher (zumindest theoretisch) beliebige endliche Bibliotheken über solchen Kalkülen verifizieren kann. Da es sich bei dem großen vereinheitlichten Kalkül von Kapitel 5 um einen Post-Kalkül handelt, wäre damit insbesondere ein Proof-Checker für die Klassenlogik gegeben.

6.1. Post-Kalküle

Sei $\mathcal{A}$ ein **Alphabet**, d.h. eine nichtleere endliche Menge, und $M := {}^{\star}\mathcal{A}$ die Menge aller **Zeichenketten** über $\mathcal{A}$. Alle verbreiteten Kalküle $\mathcal{K}$ über Zeichenketten haben die Eigenschaft, dass die Zeilen (d.h. die Prämissen und Konklusionen) der Schlussschemata $F \in \mathcal{K}$ Funktionen der Gestalt

$$f : {}^{\operatorname{par} F}M \to M,\ \vec{a} \mapsto b_0 \star a_{i_0} \star \cdots \star b_{k-1} \star a_{i_{k-1}} \star b_k$$

sind, mit Konstanten $b_0, \ldots, b_k \in M$ und $i_0, \ldots, i_{k-1} \in \operatorname{par} F$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir daher die Menge aller n-stelligen **Ersetzungsfunktionen** in $\mathcal{A}$ durch

$$\mathrm{EF}_n^{\mathcal{A}} := \left\{ f_{\vec{i},\vec{b}}^{n} ;\ \vec{i} \in {}^{\star}n, \vec{b} \in {}^{\operatorname{len}\vec{i}+1}M \right\}\ ,$$

wobei

$$f_{\vec{i},\vec{b}}^{n} : {}^{n}M \to M,\ \vec{a} \mapsto \mathop{\bigstar}_{j \in \operatorname{len}\vec{i}} \left(b_j \star a_{i_j}\right)\ \star\ b_{\operatorname{len}\vec{i}}\ .$$

Setzen wir

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Post}}^{\mathcal{A}} := \left\{ F \in \mathrm{SCH}_M ;\ \mathrm{pr}_j \lhd F \in \mathrm{EF}_{\operatorname{par} F}^{\mathcal{A}}\ \text{ für alle } j \in \operatorname{len} F \right\}\ ,$$

so ist ein **kanonischer Post-Kalkül** über $\mathcal{A}$ ein endliches $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{\mathrm{Post}}^{\mathcal{A}}$. Ein unendliches $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{\mathrm{Post}}^{\mathcal{A}}$ wollen wir hier einen **unendlichen Post-Kalkül** nennen.

Es ist ein bekanntes Resultat, dass die Gesamtheit aller kanonischen Post-Kalküle im folgenden Sinne Turing-vollständig ist:

6.1 Satz

Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges Alphabet. Ein $X \subseteq {}^\star\mathcal{A}$ ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn ein Alphabet $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ und ein kanonischer Post-Kalkül $\mathcal{K}$ über $\mathcal{B}$ existiert mit $X = G_{\mathcal{K}} \cap {}^\star\mathcal{A}$.

Alle in Kapitel 1 und 2 angegebenen Ausdruckskalküle (und trivialerweise auch der parameterlose klassenlogische Beweiskalkül) sind, falls wir sie (mithilfe einiger willkürlicher Festlegungen) als Kalküle über Zeichenketten auffassen, unendliche Post-Kalküle. Der große vereinheitlichte Kalkül ist sogar ein kanonischer Post-Kalkül. Aber auch andere „Formalismen“ lassen sich auf natürliche Art und Weise als Post-Kalküle auffassen:

6.1.1. Turingmaschinen

Wir wollen hier exemplarisch eine Turingmaschine $M_{\text{mod}3}$, die (in Binärdarstellung) die Funktion „modulo 3“ berechnet, durch einen Post-Kalkül beschreiben.

Das Bandalphabet von $M_{\text{mod}3}$ besteht aus dem Leerzeichen (␣) und den Ziffern `0` und `1`. Dies erfassen wir durch die drei (parameterlosen) Schlussschemata

```
#Axioma symbolspace

---
  : Symbol
```

```
#Axioma symbol0

---
0 : Symbol
```

```
#Axioma symbol1

---
1 : Symbol
```

$M_{\text{mod}3}$ besitzt die Zustände `A`, `B`, `C` und den Endzustand `Halt`. Der Anfangszustand sei `A`. Die Überführungsfunktion von $M_{\text{mod}3}$ ist gegeben durch:

aktueller Zustand	aktuelles Symbol	neues Symbol	Lesekopf-Bewegung	neuer Zustand
`A`	␣	`0`	rechts	`Halt`
`A`	`0`	␣	rechts	`A`
`A`	`1`	␣	rechts	`B`
`B`	␣	`1`	rechts	`Halt`
`B`	`0`	␣	rechts	`C`
`B`	`1`	␣	rechts	`A`
`C`	␣	`1`	rechts	`A`
`C`	`0`	␣	rechts	`B`
`C`	`1`	␣	rechts	`C`

Das leere rechts-unendliche Band der Maschine geben wir an durch

`| | | | | | |...`

Da wir natürlich kein wirklich *unendliches* Band durch eine *endliche* Zeichenkette repräsentieren können, simulieren wir ein potentiell-unendliches Band mithilfe einer (bei Bedarf anwendbaren) schrittweisen Bandverlängerung.

```
#Axioma extendright(x)

x
---
x |
```

Befindet sich die Maschine im Zustand `X` und der Lesekopf an einer bestimmten Position, so machen wir dies deutlich durch:

```
| | | | | |X: | |...
```

Wir können nun die Überführungsregeln von M_{mod3} leicht als Schlussschemata angeben:

```
#Axioma ruleAspace(x,y,z)

y : Symbol
x|A: |y|z
---
x|0|Halt:y|z
```

```
#Axioma ruleA0(x,y,z)

y : Symbol
x|A:0|y|z
---
x| |A:y|z
```

```
#Axioma ruleA1(x,y,z)

y : Symbol
x|A:1|y|z
---
x| |B:y|z
```

```
#Axioma ruleBspace(x,y,z)

y : Symbol
x|B: |y|z
---
x|1|Halt:y|z
```

```
#Axioma ruleB0(x,y,z)

y : Symbol
x|B:0|y|z
---
x| |C:y|z
```

```
#Axioma ruleB1(x,y,z)

y : Symbol
x|B:1|y|z
---
x| |A:y|z
```

```
#Axioma ruleCspace(x,y,z)

y : Symbol
x|C: |y|z
---
x|1|A:y|z
```

```
#Axioma ruleC0(x,y,z)

y : Symbol
x|C:0|y|z
---
x| |B:y|z
```

```
#Axioma ruleC1(x,y,z)

y : Symbol
x|C:1|y|z
---
x| |C:y|z
```

Dann schmeißen wir die Maschine mal an ...

Beispiel 1: 14 modulo 3 = 2

```
#Theorema 14mod3

|A:1|1|1|0|
---
| | | | |1|0|Halt: |

#Demonstratio
|A:1|1|1|0|               #Praemissio
  : Symbol                #Axioma symbolspace
0 : Symbol                #Axioma symbol0
1 : Symbol                #Axioma symbol1
| |B:1|1|0|               #Axioma ruleA1(,1,1|0|)
| | |A:1|0|               #Axioma ruleB1(| ,1,0|)
| | | |B:0|               #Axioma ruleA1(| | ,0,)
| | | |B:0| |             #Axioma extendright(| | | |B:0|)
| | | | |C: |             #Axioma ruleB0(| | | , ,)
| | | | |C: | |           #Axioma extendright(| | | | |C: |)
| | | | |1|A: |           #Axioma ruleCspace(| | | | , ,)
| | | | |1|A: | |         #Axioma extendright(| | | | |1|A: |)
| | | | |1|0|Halt: |      #Axioma ruleAspace(| | | | |1, ,)
#qed
```

Beispiel 2: 27 modulo 3 = 0

```
#Theorema 27mod3

|A:1|1|0|1|1|
---
| | | | | | |0|Halt: |

#Demonstratio
|A:1|1|0|1|1|                #Praemissio
  : Symbol                   #Axioma symbolspace
0 : Symbol                   #Axioma symbol0
1 : Symbol                   #Axioma symbol1
| |B:1|0|1|1|                #Axioma ruleA1(,1,0|1|1|)
| | |A:0|1|1|                #Axioma ruleB1(| ,0,1|1|)
| | | |A:1|1|                #Axioma ruleA0(| | ,1,1|)
| | | | |B:1|                #Axioma ruleA1(| | | ,1,)
| | | | |B:1| |              #Axioma extendright(| | | | |B:1|)
| | | | | | |A: |            #Axioma ruleB1(| | | | , ,)
| | | | | | |A: | |          #Axioma extendright(| | | | | | |A: |)
| | | | | | |0|Halt: |       #Axioma ruleAspace(| | | | | | , ,)
#qed
```

Beispiel 3: 37 modulo 3 = 1

```
#Theorema 37mod3

|A:1|0|0|1|0|1|
---
| | | | | | |1|Halt: |

#Demonstratio
|A:1|0|0|1|0|1|            #Praemissio
  : Symbol                 #Axioma symbolspace
0 : Symbol                 #Axioma symbol0
1 : Symbol                 #Axioma symbol1
| |B:0|0|1|0|1|            #Axioma ruleA1(,0,0|1|0|1|)
| | |C:0|1|0|1|            #Axioma ruleB0(| ,0,1|0|1|)
| | | |B:1|0|1|            #Axioma ruleC0(| | ,1,0|1|)
| | | | |A:0|1|            #Axioma ruleB1(| | | ,0,1|)
| | | | | |A:1|            #Axioma ruleA0(| | | | ,1,)
| | | | | |A:1| |          #Axioma extendright(| | | | | |A:1|)
| | | | | | |B: |          #Axioma ruleA1(| | | | | , ,)
| | | | | | |B: | |        #Axioma extendright(| | | | | | |B: |)
| | | | | | |1|Halt: |     #Axioma ruleBspace(| | | | | | , ,)
#qed
```

Die Turingmaschine M_{mod3} ist natürlich noch sehr simpel. Um anzudeuten, dass Turingmaschinen sehr leicht und natürlich durch Post-Kalküle beschrieben werden können, reicht sie uns jedoch allemal.

Man beachte, dass wir mit unserem Kalkül auch unsinnige Zeichenketten wie etwa

„`0 : Symbol | |`“

ableiten können. Es ist in vielen Post-Kalkülen der Fall, dass die „interessierende Menge“ eine echte Teilmenge der durch das Kalkül generierten Menge ist. (Man beachte dazu auch den Satz 6.1.) Wir hätten im Übrigen auch auf Kennzeichnungen der Art `x : Symbol` gänzlich verzichten können. Anstatt der einen Regel

```
#Axioma ruleAspace(x,y,z)

y : Symbol
x|A: |y|z
---
x|0|Halt:y|z
```

müssten wir dann allerdings die drei Regeln

```
#Axioma rule1(x,z)        #Axioma rule2(x,z)        #Axioma rule3(x,z)

x|A: | |z                 x|A: |0|z                 x|A: |1|z
---                       ---                       ---
x|0|Halt: |z              x|0|Halt:0|z              x|0|Halt:1|z
```

formulieren. In unserem konkreten Falle könnten wir auch nur die Regel

```
#Axioma ruleAspace(x,z)

x|A: |z
---
x|0|Halt:z
```

verwenden. Diese Vereinfachung lässt sich jedoch (aufgrund unserer Postfix-Notation `|X:a|` des Lesekopfs) für Regeln, die Lesekopf-Bewegungen nach links beschreiben, nicht durchführen.

6.1.2. Primitiv Rekursive Arithmetik

Die **Primitiv Rekursive Arithmetik** (PRA) wird oft als eine konkrete Erscheinungsform des finiten Schließens aufgefasst.[1] In [Goo54] hat Goodstein eine besonders einfache und *Logik-freie* Formulierung von PRA gegeben. Wir führen hier eine weitere Vereinfachung durch, indem wir auch auf die Substitution verzichten.[2]

Der Ausgangspunkt von PRA sind die Null `0` und die Nachfolgerfunktion `S`. Wir können damit bereits alle natürlichen Zahlen durch Terme der Gestalt `S S ... S 0` darstellen. Neben den natürlichen Zahlen beschäftigen uns ferner endlichstellige Funktionen auf den natürlichen Zahlen. Die Aussage „`f` ist eine `n`-stellige Funktion“ drücken wir aus durch

```
f : Function : n
```

Hierbei fassen wir die natürlichen Zahlen als 0-stellige Funktionen auf. Sind `a`,`b`,`c` natürliche Zahlen und `f` eine 3-stellige Funktion so verwenden wir für die Funktionsanwendung die klammerfreie Darstellung

```
f a b c .
```

Wir erlauben uns auch eine partielle Anwendung `f a`, durch die wir in diesem Falle eine 2-stellige Funktion erhalten würden. Genauer sei das Bisherige zusammengefasst durch die drei folgenden Schlussschemata:

```
#Axioma funczero

---
0 : Function : 0
```

```
#Axioma funcsuc

---
S : Function : S 0
```

```
#Axioma funcapply(f,a,k)

f : Function : S k
a : Function : 0
---
f a : Function : k
```

Es lässt sich damit bereits für jede natürliche Zahl ableiten, dass sie eine 0-stellige Funktion ist.

[1] Siehe etwa [Tai81].

[2] In [Goo54] wird eine metasprachliche Substitution vorausgesetzt, auf die gar nicht explizit eingegangen wird. Auch ist das System mit seinen 4 angegebenen Schlussregeln nur scheinbar einfacher als das unsrige, da einige Nebenbedingungen dort nur metasprachlich angedeutet sind.

Auch in PRA gibt es Variablen. Wie im großen vereinheitlichten Kalkül wollen wir sie durch „Apostrophierung“ aus einer „Urvariablen“ erzeugen.

```
#Axioma var0

---
X : Variable
```

```
#Axioma varnext(x)

x : Variable
---
x' : Variable
```

Variablen stehen immer für natürliche Zahlen. Allerdings ist es notwendig, eine neue Kategorie von Funktionsausdrücken einzuführen. Wir nennen sie XFunktionen, da sie Variablen enthalten dürfen (welche die Rolle von Parametern spielen).

```
#Axioma xfuncvar(x)

x : Variable
---
x : XFunction : 0
```

```
#Axioma xfuncfunc(f,k)

f : Function : k
---
f : XFunction : k
```

```
#Axioma xfuncapply(f,a,k)

f : XFunction : S k
a : XFunction : 0
---
f a : XFunction : k
```

Nachdem wir uns bisher eigentlich nur mit Term-Charakterisierungen beschäftigt haben, wollen wir uns nun den eigentlichen Aussageformen von PRA zuwenden, den Gleichheiten.[3] Die Gleichheit sei eine Äquivalenzrelation zwischen XFunktionen[4] (zu denen natürlich die Zahl-Terme gehören), die bei der Funktionsanwendung vererbt wird.

```
#Axioma eqref(f,k)

f : XFunction : k
---
f = f
```

```
#Axioma eqsym(f,g)

f = g
---
g = f
```

```
#Axioma eqtran(f,g,h)

f = g
g = h
---
f = h
```

```
#Axioma eqapply(f,a,g,b,k)

f : XFunction : S k
a : XFunction : 0
f = g
a = b
---
f a = g b
```

[3] Es wäre sicherlich systematischer, die Gleichheit durch `a : Equal : b` auszudrücken. Wir haben uns hier allerdings für die lesbarere Darstellung `a = b` entschieden.

[4] Hier weichen wir von den üblichen PRA-Darstellungen ab, in denen die Gleichheit auf Zahl-Terme beschränkt ist. Ich glaube jedoch, dass sich in dem hier angegebenen System keine zusätzlichen (interessanten) Aussagen ableiten lassen, dass also letztendlich die gleiche Ausdrucksstärke vorliegt. Es könnte ein interessantes Vorhaben sein, diese Vermutung zu präzisieren und zu beweisen bzw. zu widerlegen. Betont sei jedoch, dass sich in unserem System anders als etwa in Gödels System T (siehe [Göd58]) keine Funktionen von Funktionen bilden lassen.

Das Herzstück von PRA sind die Induktionsaxiome. Für jede natürliche Zahl n gibt es n Instanzen: je eine für jede Argument-Stelle der n-stelligen Funktionen.[5] Wir geben hier die Axiome für die 1- und 2-stelligen Funktionen an und eines für die 3. Stufe. Es sollte klar sein, wie die höherstelligen Instanzen zu formulieren sind.

```
#Axioma eqind1_1(f,g,h)

f : Function : S 0
g : Function : S 0
h : XFunction : S 0
f 0 = g 0
f S X = h f X
g S X = h g X
---
f = g
```

```
#Axioma eqind2_2(f,g,h)

f : Function : S S 0
g : Function : S S 0
h : XFunction : S 0
f X' 0 = g X' 0
f X' S X = h f X' X
g X' S X = h g X' X
---
f = g
```

```
#Axioma eqind2_1(f,g,h)

f : Function : S S 0
g : Function : S S 0
h : XFunction : S 0
f 0 X' = g 0 X'
f S X X' = h f X X'
g S X X' = h g X X'
---
f = g
```

```
#Axioma eqind3_3(f,g,h)

f : Function : S S S 0
g : Function : S S S 0
h : XFunction : S 0
f X' X'' 0 = g X' X'' 0
f X' X'' S X = h f X' X'' X
g X' X'' S X = h g X' X'' X
---
f = g
```

Mit den bisher angegebenen Schlussschemata ist der fixe Kern von PRA beschrieben. Hinzu kommen nur noch explizite und induktive Funktionsdefinitionen. Allerdings muss dazu gesagt sein, dass in diesem Falle (anders als etwa in der Klassenlogik) die Definitionen zu einer größeren Ausdrucksstärke führen.[6]

Die Definition einer Funktion enthält zwei Bestandteile. Es muss die Stelligkeit der Funktion festgelegt und dann die eigentliche Definition gegeben werden. Die entsprechenden Schlussschemata bezeichnen wir durch `#Definiendum` und `#Definitio`; sie verhalten sich syntaktisch natürlich vollkommen identisch wie die Axiome. Die Namen der Funktionen wollen wir mit einem Großbuchstaben beginnen lassen.

[5] Mithilfe der unten beschriebenen Funktions-Definitionen würde es jedoch reichen (auf Kosten von technischeren Beweisen), für jede Stufe nur ein Axiom zu fordern.

[6] Dies liegt natürlich im Wesentlichen an den induktiven Definitionen. Bei ihnen handelt es sich nämlich nicht um Abkürzungs-Definitionen im Sinne Freges (Siehe die Anmerkung auf Seite 97), sondern eher um implizite axiomatische Charakterisierungen. In stärkeren Systemen, wie etwa ZFC, ist es jedoch möglich, dass induktive Definitionen als explizite Definitionen aufgefasst werden können. Das ist auch der Grund, warum man die induktiven Definitionen von PRA als *Definitionen* akzeptiert, man denkt nämlich für gewöhnlich (zumindest unbewusst) in einem stärkeren Meta-System, dass die eindeutige Existenz der entsprechenden Funktionen sichert.

Beispiele für explizite Definitionen

1. Identitätsfunktion:

```
#Definiendum defumid

---
Id : Function : S 0
```

```
#Definitio defid(a)

a : XFunction : 0
---
Id a = a
```

2. Plus-3-Funktion:

```
#Definiendum defumplus3

---
Plus3 : Function : S 0
```

```
#Definitio defplus3(a)

a : XFunction : 0
---
Plus3 a = S S S a
```

3. 3-stellige konstante 2-Funktion:

```
#Definiendum defumzwei3

---
Zwei3 : Function : S S S 0
```

```
#Definitio defzwei3(a,b,c)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
c : XFunction : 0
---
Zwei3 a b c = S S 0
```

Beispiele für induktive Definitionen

1. Vorgängerfunktion:

```
#Definiendum defumpred

---
Pred : Function : S 0
```

```
#Definitio defpredzero

---
Pred 0 = 0
```

```
#Definitio defpredsuc(a)

a : XFunction : 0
---
Pred S a = a
```

2. Addition:

```
#Definiendum defumplus

---
Plus : Function : S S 0
```

```
#Definitio defpluszero(a)

a : XFunction : 0
---
Plus a 0 = a
```

```
#Definitio defplussuc(a,b)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
---
Plus a S b = S Plus a b
```

3. Multiplikation:

```
#Definiendum defummult

---
Mult : Function : S S 0
```

```
#Definitio defmultzero(a)

a : XFunction : 0
---
Mult a 0 = 0
```

```
#Definitio defmultsuc(a,b)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
---
Mult a S b = Plus Mult a b a
```

Das Prinzip der expliziten und induktiven Definitionen sollte damit klar sein. Im konkreten Arbeiten mit PRA können Definitionen bei Bedarf hinzugefügt werden. Dass syntaktisch korrekte und zirkelfreie Definitionen geführt werden, muss natürlich von außerhalb geprüft werden. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass gewisse syntaktische Eigenschaften auch innerhalb des Systems überprüft werden können. So könnten wir etwa überprüfen, ob das Definiens der Addition im Nachfolgerschritt wirklich eine Zahl bezeichnet:

```
#Lemma defensplussuc(a,b)

a : Function : 0
b : Function : 0
---
S Plus a b : Function : 0

#Demonstratio
a : Function : 0                #Praemissio
b : Function : 0                #Praemissio
Plus : Function : S S 0         #Definiendum defumplus
Plus a : Function : S 0         #Axioma funcapply(Plus,a,S 0)
Plus a b : Function : 0         #Axioma funcapply(Plus a,b,0)
S : Function : S 0              #Axioma funcsuc
S Plus a b : Function : 0       #Axioma funcapply(S,Plus a b,0)
#qed
```

Es ließe sich nun leicht eine große Sammlung von primitiv-rekursiven Funktionen einführen. Wirklich interessant wird es jedoch erst, wenn wir dazu übergehen Aussagen zu beweisen. In [Goo54] wird gezeigt, wie sich logische Beziehungen nur durch Gleichheiten ausdrücken lassen.[7]

[7]Der Ausgangspunkt dafür ist die Beobachtung, dass $x = y$ äquivalent ist zu $|x-y| = 0$. Da die Abstandsfunktion $|x-y|$ primitiv rekursiv ist, können wir daher die Konjunktion bzw. Disjunktion der Aussagen $x = y$ und $u = v$

Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern nur exemplarisch die Assoziativität der Addition beweisen.

Hierzu verwenden wir zwei Hilfsdefinitionen.

```
#Definiendum defumtriplusleft

---
TriPlusL : Function : S S S 0
```

```
#Definitio deftriplusleft(a,b,c)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
c : XFunction : 0
---
TriPlusL a b c = Plus Plus a b c
```

```
#Definiendum defumtriplusright

---
TriPlusR : Function : S S S 0
```

```
#Definitio deftriplusright(a,b,c)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
c : XFunction : 0
---
TriPlusR a b c = Plus a Plus b c
```

Mit dem folgenden Lemma ist eigentlich bereits alles gezeigt.

```
#Lemma eqtriplusleftright

---
TriPlusL = TriPlusR
```

```
#Demonstratio
X : Variable                          #Axioma var0
X' : Variable                         #Axioma varnext(X)
X'' : Variable                        #Axioma varnext(X')
X : XFunction : 0                     #Axioma xfuncvar(X)
X' : XFunction : 0                    #Axioma xfuncvar(X')
X'' : XFunction : 0                   #Axioma xfuncvar(X'')
0 : Function : 0                      #Axioma funczero
0 : XFunction : 0                     #Axioma xfuncfunc(0,0)

TriPlusL X' X'' 0 = Plus Plus X' X'' 0     #Definitio deftriplusleft(X',X'',0)
Plus : Function : S S 0                    #Definiendum defumplus
Plus : XFunction : S S 0                   #Axioma xfuncfunc(Plus,S S 0)
Plus X' : XFunction : S 0                  #Axioma xfuncapply(Plus,X',S 0)
Plus X' X'' : XFunction : 0                #Axioma xfuncapply(Plus X',X'',0)
Plus Plus X' X'' 0 = Plus X' X''           #Definitio defpluszero(Plus X' X'')
TriPlusL X' X'' 0 = Plus X' X''            #Axioma eqtran(TriPlusL X' X'' 0,Plus Plus X' X'' 0,Plus X' X'')
TriPlusR X' X'' 0 = Plus X' Plus X'' 0     #Definitio deftriplusright(X',X'',0)
Plus X'' 0 = X''                           #Definitio defpluszero(X'')
Plus X' = Plus X'                          #Axioma eqref(Plus X',S 0)
Plus X'' : XFunction : S 0                 #Axioma xfuncapply(Plus,X'',S 0)
Plus X'' 0 : XFunction : 0                 #Axioma xfuncapply(Plus X'',0,0)
Plus X' Plus X'' 0 = Plus X' X''           #Axioma eqapply(Plus X',Plus X'' 0,Plus X',X'',0)
TriPlusR X' X'' 0 = Plus X' X''            #Axioma eqtran(TriPlusR X' X'' 0,Plus X' Plus X'' 0,Plus X' X'')
Plus X' X'' = TriPlusR X' X'' 0            #Axioma eqsym(TriPlusR X' X'' 0,Plus X' X'')
TriPlusL X' X'' 0 = TriPlusR X' X'' 0      #Axioma eqtran(TriPlusL X' X'' 0,Plus X' X'',TriPlusR X' X'' 0)

S : Function : S 0                         #Axioma funcsuc
S : XFunction : S 0                        #Axioma xfuncfunc(S,S 0)
S X : XFunction : 0                        #Axioma xfuncapply(S,X,0)

TriPlusL X' X'' S X = Plus Plus X' X'' S X     #Definitio deftriplusleft(X',X'',S X)
Plus Plus X' X'' S X = S Plus Plus X' X'' X    #Definitio defplussuc(Plus X' X'',X)
TriPlusL X' X'' S X = S Plus Plus X' X'' X     #Axioma eqtran(TriPlusL X' X'' S X,Plus Plus X' X'' S X,S Plus Plus X' X'' X)
TriPlusL X' X'' X = Plus Plus X' X'' X         #Definitio deftriplusleft(X',X'',X)
Plus Plus X' X'' X = TriPlusL X' X'' X         #Axioma eqsym(TriPlusL X' X'' X,Plus Plus X' X'' X)
S = S                                          #Axioma eqref(S,S 0)
```

---

ausdrücken durch $|x-y|+|u-v|=0$ bzw. $|x-y|\cdot|u-v|=0$. Die Negation von $x=y$ beschreiben wir durch $1\ominus|x-y|=0$, wobei $\ominus$ die Cut-Off-Subtraktion bezeichne.

```
Plus Plus X' X'' : XFunction : S 0           #Axioma xfuncapply(Plus,Plus X' X'',S 0)
Plus Plus X' X'' X : XFunction : 0           #Axioma xfuncapply(Plus Plus X' X'',X,0)
S Plus Plus X' X'' X = S TriPlusL X' X'' X   #Axioma eqapply(S,Plus Plus X' X'' X,S,TriPlusL X' X'' X,0)
TriPlusL X' X'' S X = S TriPlusL X' X'' X    #Axioma eqtran(TriPlusL X' X'' S X,S Plus Plus X' X'' X,S TriPlusL X' X'' X)
TriPlusR X' X'' S X = Plus X' Plus X'' S X   #Definitio deftriplusright(X',X'',S X)
Plus X'' S X = S Plus X'' X                  #Definitio defplussuc(X'',X)
Plus X'' S X : XFunction : 0                 #Axioma xfuncapply(Plus X'',S X,0)
Plus X' Plus X'' S X = Plus X' S Plus X'' X  #Axioma eqapply(Plus X',Plus X'' S X,Plus X',S Plus X'' X,0)
TriPlusR X' X'' S X = Plus X' S Plus X'' X   #Axioma eqtran(TriPlusR X' X'' S X,Plus X' Plus X'' S X,Plus X' S Plus X'' X)
Plus X'' X : XFunction : 0                   #Axioma xfuncapply(Plus X'',X,0)
Plus X' S Plus X'' X = S Plus X' Plus X'' X  #Definitio defplussuc(X',Plus X'' X)
TriPlusR X' X'' S X = S Plus X' Plus X'' X   #Axioma eqtran(TriPlusR X' X'' S X,Plus X' S Plus X'' X,S Plus X' Plus X'' X)
TriPlusR X' X'' X = Plus X' Plus X'' X       #Definitio deftriplusright(X',X'',X)
Plus X' Plus X'' X = TriPlusR X' X'' X       #Axioma eqsym(TriPlusR X' X'' X,Plus X' Plus X'' X)
Plus X' Plus X'' X : XFunction : 0           #Axioma xfuncapply(Plus X',Plus X'' X,0)
S Plus X' Plus X'' X = S TriPlusR X' X'' X   #Axioma eqapply(S,Plus X' Plus X'' X,S,TriPlusR X' X'' X,0)
TriPlusR X' X'' S X = S TriPlusR X' X'' X    #Axioma eqtran(TriPlusR X' X'' S X,S Plus X' Plus X'' X,S TriPlusR X' X'' X)

TriPlusL : Function : S S S 0                #Definiendum defumtriplusleft
TriPlusR : Function : S S S 0                #Definiendum defumtriplusright
TriPlusL = TriPlusR                          #Axioma eqind3_3(TriPlusL,TriPlusR,S)
#qed
```

Damit können wir leicht direkt die Assoziativität der Addition ausdrücken.

```
#Lemma assoplus(a,b,c)

a : XFunction : 0
b : XFunction : 0
c : XFunction : 0
---
Plus Plus a b c = Plus a Plus b c
```

```
#Demonstratio
a : XFunction : 0                   #Praemissio
b : XFunction : 0                   #Praemissio
c : XFunction : 0                   #Praemissio
TriPlusL a b c = Plus Plus a b c    #Definitio deftriplusleft(a,b,c)
Plus Plus a b c = TriPlusL a b c    #Axioma eqsym(TriPlusL a b c,Plus Plus a b c)
TriPlusL = TriPlusR                 #Lemma eqtriplusleftright
a = a                               #Axioma eqref(a,0)
TriPlusL : Function : S S S 0       #Definiendum defumtriplusleft
TriPlusL : XFunction : S S S 0      #Axioma xfuncfunc(TriPlusL,S S S 0)
TriPlusL a = TriPlusR a             #Axioma eqapply(TriPlusL,a,TriPlusR,a,S S 0)
b = b                               #Axioma eqref(b,0)
TriPlusL a : XFunction : S S 0      #Axioma xfuncapply(TriPlusL,a,S S 0)
TriPlusL a b =  TriPlusR a b        #Axioma eqapply(TriPlusL a,b,TriPlusR a,b,S 0)
c = c                               #Axioma eqref(c,0)
TriPlusL a b : XFunction : S 0      #Axioma xfuncapply(TriPlusL a,b,S 0)
TriPlusL a b c = TriPlusR a b c     #Axioma eqapply(TriPlusL a b,c,TriPlusR a b,c,0)
Plus Plus a b c = TriPlusR a b c    #Axioma eqtran(Plus Plus a b c,TriPlusL a b c,TriPlusR a b c)
TriPlusR a b c = Plus a Plus b c    #Definitio deftriplusright(a,b,c)
Plus Plus a b c = Plus a Plus b c   #Axioma eqtran(Plus Plus a b c,TriPlusR a b c,Plus a Plus b c)
#qed
```

Offenbar handelt es sich bei dem hier angegebenen Post-Kalkül aufgrund der unendlich vielen Induktionsaxiome und der Definitionen um ein unendliches Kalkül. Intuitiv kann man wohl davon ausgehen, dass sich grundsätzlich auch ein endliches Post-Kalkül formulieren ließe, welches PRA beschreibt.[8]

[8] Wie in unserem großen vereinheitlichten Kalkül müssen nur entsprechende Nebenbedingungen (Definitionsvoraussetzungen etc.) innerhalb des Systems beschrieben werden. Vermutlich würde man wie bei der Definition der primitiv-rekursiven Funktionen ein paar Grundoperatoren einführen, die beschreiben, wie sich aus schon definierten Funktionen neue Funktionen gewinnen lassen. Wenn eine Benennung der Funktionen erwünscht wird, muss eine solche auch durch das System selbst zur Verfügung gestellt werden. Ob ein solches System gefunden werden kann, welches trotz seiner Endlichkeit einigermaßen mit der Schlichtheit und Natürlichkeit des hier angegebenen Systems mithalten kann, könnte eine interessante Fragestellung sein.

6.2. Der Post-Inspector

Im Anschlusse an diese Arbeit möchte ich mich der Implementierung eines Post-Kalkül-Checkers widmen. Genauer soll mit dem „PostInspector“ (kurz PI) ein Programm entstehen, welches endliche Bibliotheken über kanonischen Post-Kalkülen überprüft. Das Projekt ist bereits jetzt auf GitHub zu finden.[9] Insbesondere soll eine an das klassenlogische Kalkül von Kapitel 5 angepasste Version entstehen. Dabei möchte ich mich von den folgenden Gedanken leiten lassen.

Ideal einer computerverifizierbaren mathematischen Bibliothek:

- die eigentlichen, letztendlich zu prüfenden Beweise sollten eine einfachstmögliche systematische Struktur (Core-Syntax) besitzen und dennoch eine vom Menschen lesbare Form
- damit zusammenhängend sei die Funktionalität des eigentlichen Proof-Checkers so primitiv wie nur möglich
- auf diesem Kern (Core Syntax und Proof-Checker) aufbauend sind die folgenden Erweiterungen anzustreben:
  - die konkreten, vom Menschen anzugebenden Beweise sollen eine zunehmend liberalere Struktur erhalten, d.h. eher einer Beweisskizze entsprechen
  - es sollen Kommentare und Erläuterungen möglich sein
  - unbedeutende Beweisschritte sollen zunehmend weggelassen werden können
  - ein praktisches Eingabe-Interface inklusive einer Live-Latex-Darstellung, Auto-Vervollständigung und Instant-Feedback bei Syntax- und Beweis-Fehlern ist zu entwickeln
  - aus den geprüften Beweisen sollen Dokumente in verschiedenen Formaten (wie Latex, HTML) und in anpassbarer Detail-Genauigkeit (mit/ohne elementaren Beweisschritten) automatisch generiert werden können
- um diese Erweiterungen umzusetzen, sind die folgenden Hilfs-Programme zu schreiben:
  - Cleaner: entfernt Kommentare und überflüssige Whitespaces
  - Completer: ersetzt Abkürzungen und vervollständigt Referenzen u.a.
  - Prover: füllt Lücken in den Beweisskizzen (die konkrete Funktionalität hängt natürlich sehr von dem zugrunde gelegten Kalkül ab)

  diese drei Programme generieren also aus der Beweisskizze einen lückenlosen Beweis, der vom Checker verifiziert wird

Ein entscheidender Vorteil dieser üblichen Strukturierung ist, dass die über den Proof-Checker hinausgehenden Programme beliebig komplex sein können, ja sogar fehlerbehaftet. Wichtig ist

[9] https://github.com/sutaner/postinspector

nur, dass der Checker korrekt ist. Letztendlich bietet es sich wohl an, anstatt einem einzelnen eine ganze Familie von unabhängigen Proof-Checkern auf die formalen Beweise loszulassen.[10]

Inwiefern ein auf dem großen vereinheitlichten Kalkül GUK fußender axiomatischer Aufbau klassenlogisch formulierter (interessanter) Mathematik praktisch wirklich durchführbar ist, kann ich nicht abschätzen.[11] Sicherlich müssten dazu einige arbeitserleichternde Hilfsprogramme geschrieben werden. Einen Vorteil gegenüber schon sehr ausgereiften Systemen (wie etwa dem auf der Typentheorie fußenden Coq, siehe `https://coq.inria.fr/`), sehe ich in dem primitiven, trotzdem prinzipiell lesbaren und leicht zugänglichen letztendlich geprüften Code.[12] Eventuell ließe sich ja sogar eine Verschmelzung verschiedener Systeme erreichen, sodass mit Coq-ähnlichen Systemen (die insbesondere die sehr praktischen Beweis-„Taktiken" zur Verfügung stellen) klassenlogische Post-Kalkül-Beweise generiert werden können.

Zumindest für didaktische Zwecke scheinen mir die Struktur der Post-Kalküle mit der hier gegebenen Syntax und die von mir angegebenen konkreten Beispiele (samt dem großen vereinheitlichten Kalkül) sehr gut geeignet zu sein.

[10]Manche von ihnen könnten auf detaillierte Fehlermeldungen spezialisiert sein, während andere in ihrer Korrektheit durch andere Programme wie z.B. Coq verifiziert wurden.

[11]Eine reine Definitionsbibliothek ist natürlich sehr viel realistischer.

[12]Bei den letztendlich von Coqs Proof-Checker verifizierbaren Dateien handelt es sich um Binärdateien, sodass ihre Struktur nur indirekt durch ein Studium der diese Dateien generierenden Algorithmen verstanden werden kann. Von den mir bekannten Systemen kommt *Metamath* (siehe `http://us.metamath.org/index.html`) dem von mir intendierten System am nächsten. Auch dort ist die Struktur der zugrunde liegenden Beweise sehr primitiv und allgemein. Insbesondere den „Distinct-Variable"-Ansatz mit dem dort der etwas kompliziertere Begriff des freien Vorkommens von Variablen vermieden wird, möchte ich mir noch genauer anschauen (vielleicht lässt er sich ja in die Klassenlogik integrieren). Allerdings hat der Quellcode der Metamath-Beweise eine recht technische Gestalt und ist damit nicht so gut lesbar wie unsere eigentlich selbsterklärenden Kalkül-Ableitungen. Auch liegt nicht ein Sequenzenkalkül, sondern ein antezedensloses Hilbert-Kalkül zugrunde. Den Hauptvorteil eines auf GUK aufbauenden Systems sehe ich jedoch in der Ausdrucksstärke der Klassenlogik selbst. Bezeichnenderweise wird auch in dem auf ZFC fußenden *Metamath Proof Explorer* eine „Theory of Classes" eingeführt, die dort allerdings nur als zu eliminierende praktische Darstellung angelegt ist.

Anhang

A. Wohlfundierungen und Wohlordnungen

Sei M eine Menge und $\prec \subseteq M \sqcap M$ eine binäre Relation auf M.

$\prec$ ist eine **Wohlfundierung** auf M, wenn für alle nichtleeren $X \subseteq M$ ein $\prec$-minimales Element in X existiert, d.h. ein $b \in X$ zu dem es kein $a \in X$ mit $a \prec b$ gibt. Wir sagen auch „$\prec$ ist wohlfundiert auf M“ oder „$\langle M, \prec\rangle$ ist wohlfundiert“. Ist $\prec$ zudem eine strikte Totalordnung, d.h. eine transitive, wohlfundierte Trichotomie[13], so sprechen wir von einer **Wohlordnung** auf M.

Eine Menge X heißt **transitiv**, falls alle Elemente von X auch Teilmengen von X sind. Ist zudem $\in$ eine Wohlordnung auf X, so nennen wir X eine (von-Neumann'sche) **Ordinalzahl**. Es bezeichne ON die Klasse aller Ordinalzahlen und $<$ bzw. $\leq$ die kanonischen Ordnungen $\in$ bzw. $\subseteq$ auf ON. Wir setzen im Folgenden eine Vertrautheit mit elementaren Eigenschaften der Ordinalzahlen voraus.

Wohlfundierungen sind die Grundlage für die allgemeinste Form von **Induktion** und **Rekursion**:

A.1 Satz

Sei $\prec$ wohlfundiert auf M.[14]

(a) *Ist jedem $x \in M$ eine Aussage $A(x)$ zugeordnet und gilt für alle $x \in M$*

$$\textit{mit} \quad A(y) \textit{ für alle } y \in {\prec}\llcorner x\rceil \quad \textit{auch} \quad A(x)\ ,$$

so gilt $A(x)$ für alle $x \in M$.

(b) *Sei $g : M \sqcap \mathscr{D}_{All} \to \mathscr{D}_{All}$ eine Klassen-Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : M \to \mathscr{D}_{All}$ mit*

$$f^{\ulcorner} x_{\lrcorner} = g^{\ulcorner} x, f\restriction({\prec}\llcorner x\rceil)_{\lrcorner} \quad \textit{für alle } x \in M\ .$$

(c) *Es gibt genau eine Abbildung $\mathrm{rg}_\prec : M \to \mathrm{ON}$ mit*

$$\mathrm{rg}_\prec x = \sup\{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\} = \bigcup\{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\} \qquad \textit{für alle } x \in M\ ,$$

die sogenannte ***Rangfunktion*** *von $\langle M, \prec\rangle$.*

(d) *Ist ${\prec}\llcorner x\rceil$ endlich für alle $x \in M$, so gilt* $\mathrm{im}\,\mathrm{rg}_\prec \subseteq \mathbb{N}$.

---

[13] $\prec$ ist **trichotom** (auf M) genau dann, wenn für alle $a, b \in M$ *genau eine* der Beziehungen $a \prec b$, $a = b$ oder $b \prec a$ gilt.

[14] Zur Erinnerung: ${\prec}\llcorner x\rceil = \{y \in M\,;\ y \prec x\}$ ist der $\prec$-Vorbereich von x.

Beweis:
(a) Wäre $X := \{x \in M\,;\ A(x) \text{ gilt nicht}\}$ nicht leer, so gäbe es wegen der Wohlfundiertheit ein $\prec$-minimales Element $b \in X$. Dies widerspräche aber unmittelbar der Voraussetzung; mit $\forall y \in \prec\llcorner b\rceil : A(y)$ müsste nämlich auch $A(b)$ gelten.

(b) Siehe etwa [Kun13, Theorem I.9.11].

(c) Dies ist ein Spezialfall von (b): Es sei $g : M \sqcap \mathscr{D}_{\mathrm{All}} \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ gegeben durch

$$\langle x, p\rangle \mapsto \begin{cases} \bigcup \{p\ulcorner y\lrcorner + 1\,;\ y \prec x\}\,, & \text{falls } p \text{ Abbildung mit } \prec\llcorner x\rceil \subseteq \operatorname{def} p \text{ und } \operatorname{im} p \subseteq \mathrm{ON} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach (b) gibt es genau eine Abbildung $\mathrm{rg}_\prec : M \to \mathscr{D}_{\mathrm{All}}$ mit

$$\mathrm{rg}_\prec x = g\ulcorner x, \mathrm{rg}_\prec{\restriction}(\prec\llcorner x\rceil)\lrcorner = \bigcup \{\mathrm{rg}_\prec{\restriction}(\prec\llcorner x\rceil)\ulcorner y\lrcorner + 1\,;\ y \prec x\} = \bigcup \{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\}$$

für alle $x \in M$. Man beachte hierbei $\operatorname{im} \mathrm{rg}_\prec \subseteq \operatorname{im} g \subseteq \mathrm{ON}$.

(d) Sei $x \in M$ und gelte $\mathrm{rg}_\prec y \in \mathbb{N}$ für alle $y \prec x$. Da $\prec\llcorner x\rceil$ endlich ist, gilt

$$\mathrm{rg}_\prec x = \sup \{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\} = \max \{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\} \in \mathbb{N}\ .$$

Mit (a) folgt die Behauptung. ■

Ist $\prec$ wohlfundiert auf M, so gilt offenbar $\mathrm{rg}_\prec x < \mathrm{rg}_\prec y$ für alle $x, y \in M$ mit $x \prec y$. Wie wir gleich beweisen werden, ist die Existenz einer strikt wachsenden Abbildung $f : M \to \mathrm{ON}$ sogar ein hinreichendes Kriterium für die Wohlfundiertheit von $\prec$. Weiter zeigt man leicht, dass

$$\mathrm{ord}_\prec := \operatorname{im} \mathrm{rg}_\prec \in \mathrm{ON}\ .$$

Im Falle einer Wohlordnung ist $\mathrm{rg}_\prec$ sogar ein Isomorphismus von $\langle M, \prec\rangle$ nach $\langle \mathrm{ord}_\prec, <\rangle$.

A.2 Lemma

(i) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *$\prec$ ist wohlfundiert auf M.*

(b) *Es gibt keine unendlich $\prec$-absteigende Folge in M, d.h. keine Folge $\langle m_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}M$ mit $m_{n+1} \prec m_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Es existiert eine Abbildung $f : M \to \mathrm{ON}$, sodass $f\ulcorner x\lrcorner < f\ulcorner y\lrcorner$ für alle $x, y \in M$ mit $x \prec y$.*

(ii) *Ist $f : M \to \mathrm{ON}$ mit $f\ulcorner x\lrcorner < f\ulcorner y\lrcorner$ für alle $x, y \in M$ mit $x \prec y$, so gilt*

$$\mathrm{rg}_\prec x \le f\ulcorner x\lrcorner \quad \textit{für alle } x \in M.$$

Die Rangfunktion ist also minimal mit dieser Eigenschaft.

(iii) *Ist $\prec$ wohlfundiert auf M und $\prec' \subseteq \prec$, dann ist auch $\prec'$ wohlfundiert auf M und*

$$\mathrm{rg}_{\prec'} x \le \mathrm{rg}_\prec x \quad \textit{für alle } x \in M\ .$$

Beweis:
(i) (a) $\Rightarrow$ (b) per Kontraposition: Ist α eine unendlich $\prec$-absteigende Folge, so besitzt offenbar $\operatorname{im}\alpha \subseteq M$ kein $\prec$-minimales Element, d.h. $\prec$ ist nicht wohlfundiert auf M.
(b) $\Rightarrow$ (a) per Kontraposition: Sei X eine nichtleere Teilmenge von M, die kein $\prec$-minimales Element besitzt. Wir definieren nun rekursiv eine unendlich $\prec$-absteigende Folge in X. m_0 sei ein beliebiges Element von X. Ist m_n bereits festgelegt, so sei m_{n+1} so gewählt, dass $m_{n+1} \prec m_n$; dies ist möglich, da m_n nach Voraussetzung nicht $\prec$-minimal ist. (Es wird hier natürlich das Auswahlaxiom benutzt.)
(a) $\Rightarrow$ (c): Man betrachte die Rangfunktion.
(c) $\Rightarrow$ (a): Sei ein $f : M \to \mathrm{ON}$ mit $f\ulcorner x\lrcorner < f\ulcorner y\lrcorner$ für alle $x, y \in M$ mit $x \prec y$ gegeben. Ist $X \subseteq M$ nichtleer und $\alpha_0 := \min f\lceil X\rfloor$, so ist wegen der Monotonie von f jedes $x \in f\llcorner\alpha_0\rceil \cap X$ $\prec$-minimal in X. Damit ist $\prec$ wohlfundiert.

(ii) Induktiv gilt für alle $x \in M$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_\prec x &= \bigcup\{\mathrm{rg}_\prec y + 1\,;\ y \prec x\} && \\
&\leq \bigcup\{f\ulcorner y\lrcorner + 1\,;\ y \prec x\} && \text{Induktionsvoraussetzung}\\
&\leq \bigcup\{f\ulcorner y\lrcorner + 1\,;\ y \in M, f\ulcorner y\lrcorner < f\ulcorner x\lrcorner\} && \text{da } y \prec x \Rightarrow f\ulcorner x\lrcorner < f\ulcorner y\lrcorner\\
&\leq \bigcup\{\alpha + 1\,;\ \alpha \in \mathrm{ON}, \alpha < f\ulcorner x\lrcorner\} &&\\
&= f\ulcorner x\lrcorner &&
\end{aligned}$$

(iii) Sei $X \subseteq M$ nichtleer. Jedes $\prec$-minimale Element in X ist natürlich auch $\prec'$-minimal in X. Also ist mit $\prec$ auch $\prec'$ wohlfundiert. Da $x \prec' y \Rightarrow x \prec y \Rightarrow \mathrm{rg}_\prec x < \mathrm{rg}_\prec y$ für alle $x, y \in M$, folgt der Rest mit (ii). ■

A.3 Lemma

Sei N eine weitere Menge.

(i) *Ist $f : N \to M$ eine Abbildung und $\prec$ wohlfundiert auf M, so werden durch*

$$\begin{aligned}
a \prec_1 b &\quad \textit{:gdw.} \quad f\ulcorner a\lrcorner \prec f\ulcorner b\lrcorner\\
a \prec_2 b &\quad \textit{:gdw.} \quad \mathrm{rg}_\prec f\ulcorner a\lrcorner < \mathrm{rg}_\prec f\ulcorner b\lrcorner
\end{aligned}$$

zwei Wohlfundierungen auf N definiert. Offenbar ist $\prec_1 \subseteq \prec_2$. Es gilt

$$\mathrm{rg}_{\prec_1} a \leq \mathrm{rg}_{\prec_2} a \leq \mathrm{rg}_\prec f\ulcorner a\lrcorner \quad \textit{für alle } a \in N\ .$$

Ist für alle $x \in \operatorname{im} f$ auch $\prec\llcorner x\rceil \subseteq \operatorname{im} f$, so gilt sogar

$$\mathrm{rg}_{\prec_1} = \mathrm{rg}_{\prec_2} = \mathrm{rg}_\prec \lhd f\ .$$

(ii) *Ist $f : N \to \mathbb{N}$ mit $\operatorname{im} f = \mathbb{N}$ oder $\operatorname{im} f \in \mathbb{N}$, so ist durch*

$$a \prec' b \quad \textit{:gdw.} \quad f\ulcorner a\lrcorner <_{\mathbb{N}} f\ulcorner b\lrcorner$$

eine Wohlfundierung auf N definiert mit $\mathrm{rg}_{\prec'} = f$.

Beweis:
(i) Bis auf die Gleichheiten folgt alles leicht aus vorigem Lemma. Gelte also $\prec\llcorner x\rceil \subseteq \operatorname{im} f$ für alle $x \in \operatorname{im} f$. Induktiv gilt für alle $a \in N$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}_{\prec_1} a &= \bigcup \left\{\operatorname{rg}_{\prec_1} b + 1\,;\; b \prec_1 a\right\} && \\
&= \bigcup \{\operatorname{rg}_{\prec} f\ulcorner b \lrcorner + 1\,;\; b \prec_1 a\} && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= \bigcup \{\operatorname{rg}_{\prec} f\ulcorner b \lrcorner + 1\,;\; b \in N, f\ulcorner b \lrcorner \prec f\ulcorner a \lrcorner\} && \text{Definition } \prec_1 \\
&= \bigcup \{\operatorname{rg}_{\prec} x + 1\,;\; x \prec f\ulcorner a \lrcorner\} && \text{da } \prec\llcorner f\ulcorner a \lrcorner\rceil \subseteq \operatorname{im} f \\
&= \operatorname{rg}_{\prec} f\ulcorner a \lrcorner
\end{aligned}
$$

Wegen der schon eingesehenen Ungleichheit ist damit alles gezeigt.

(ii) ist ein Spezialfall von (i) mit $M = \mathbb{N}$ und $\prec\, = \,<_{\mathbb{N}}$. Zu beachten ist nur, dass $\operatorname{rg}_{<_{\mathbb{N}}} = \operatorname{id}_{\mathbb{N}}$. ∎

B. Ergänzungen zu Kapitel 3

Sei D eine Syntaxerweiterung der Klassenlogik. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen aus Kapitel 3. Weiter sei für $n \in \mathbb{N}$

$$L_{\leq n} := \left\{ \varphi \in L_D \, ; \, \operatorname{rg}_{\prec_D} i \leq n \text{ für alle } i \in \operatorname{opi} \varphi \right\} \ .$$

Wegen Satz A.1 (d) gilt $\operatorname{im} \operatorname{rg}_{\prec_D} \subseteq \mathbb{N}$ und damit $L_D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{\leq n}$. Weiter ist es naheliegend $L_{\leq -1} := \mathcal{V}$ zu setzen.

B.1. Wohldefiniertheit der Reduktionsfunktion

Wir wollen Satz 3.1 beweisen. Den hier angegebenen Beweis habe ich mithilfe von MathOverflow [MO19] nach Abgabe der offiziellen Diplomarbeit gefunden.[15] Der mit der Arbeit eingereichte (deutlich längere) Beweis ist in Unterabschnitt B.3 zu finden.

B.1 Satz (Satz 3.1)

Sei

$$R_D : L_D \to L_D, \ \varphi \mapsto \begin{cases} \varphi, & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle, & \textit{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \textit{ mit } i \in I_{\mathrm{GO}} \\ \delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}), & \textit{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \textit{ mit } i \in I_D \end{cases}$$

Dann gilt

(i)
$$R_D{}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = \varphi \quad \textit{gdw.} \quad \varphi \in L_{\mathrm{CL}} \qquad \textit{für alle } \varphi \in L_D$$

(ii) *Für alle $\varphi \in L_D$ existiert ein $d \in \mathbb{N}$ mit*

$$(R_D)^{d\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} \in L_{\mathrm{CL}}$$

Beweis:
(i) „⇒“ durch strukturelle Induktion:

SI: Der Fall $\varphi \in \mathcal{V} \subseteq L_{\mathrm{CL}}$ ist trivial.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_D$ mit $R_D{}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = \varphi$. Wäre $i \in I_D$, so müsste $\delta_i(\vec{u}, \vec{a}) = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ gelten. Dies ist aber unmöglich. Im Falle $\delta_i = \langle j, \vec{w}, \vec{\beta} \rangle$ mit $j \prec_D i$ ist das klar, aber auch für $\delta_i = v_2$ und damit $\operatorname{len} \vec{u} = 0$ und $\operatorname{len} \vec{\alpha} = 1$ gilt $\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) = \alpha_0 \neq \big\langle i, \langle \rangle, \langle \alpha_0 \rangle \big\rangle = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$. Es gilt also $i \in I_{\mathrm{GO}}$ und

$$\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle = \varphi = R_D{}^{\ulcorner}\varphi_{\lrcorner} = \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle$$

und damit $R_D \triangleleft \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. Induktiv folgt also $\vec{\alpha} \in {}^{\star}L_{\mathrm{CL}}$ und somit $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_{\mathrm{CL}}$.

[15] Dem Antwortenden James Moody sei an dieser Stelle noch einmal herzlich gedankt.

„$\Leftarrow$“ durch strukturelle Induktion:

SI: Der Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ ist trivial.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_{\mathrm{CL}}$. Damit ist natürlich $\vec{\alpha} \in {}^{\star}L_{\mathrm{CL}}$, d.h. induktiv $R_D \triangleleft \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. Folglich gilt
$$R_D{}^{\ulcorner}\varphi{}_{\lrcorner} = \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle = \varphi$$

(ii) Wir ordnen zunächst jedem $i \in \overline{I}_D$ ein $r_i \in \mathbb{N}$ zu. Im Falle $i \in I_{\mathrm{GO}}$ setzen wir $r_i := 0$. Für $i \in I_D$ definieren wir r_i induktiv:

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ und angenommen, dass r_i für alle $i \in \overline{I}_D$ mit $\mathrm{rg}_{\prec_D} i < n$ bereits definiert sei. Es sei dann $g_n : L_{\leq n-1} \to \mathbb{N}$ gegeben durch[16]

$$\varphi \mapsto \begin{cases} 1, & \varphi \in \mathcal{V} \\ \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} g_n{}^{\ulcorner}\alpha_k{}_{\lrcorner} + r_i + 1, & \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases} .$$

Hier und im Folgenden sei im Falle $\operatorname{len} \vec{\alpha} = 0$ das Maximum definiert als 0. Nun definieren wir
$$r_i := g_n{}^{\ulcorner}\delta_i{}_{\lrcorner} \quad \text{für } i \in I_D \text{ mit } \mathrm{rg}_{\prec_D} i = n .$$

Offenbar gilt $g_n \subseteq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also
$$g := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n \in \mathrm{Abb}(L_D, \mathbb{N}) .$$

Wir definieren nun eine „Rang-Funktion“
$$r : L_D \to \mathbb{N},\ \varphi \mapsto \begin{cases} 0, & \varphi \in \mathcal{V} \\ \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner}\alpha_k{}_{\lrcorner} + r_i, & \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \end{cases}$$

Für $\varphi \in L_D$ gilt
$$r^{\ulcorner}\varphi{}_{\lrcorner} = 0 \quad \text{gdw.} \quad \varphi \in L_{\mathrm{CL}} \tag{B.1}$$

Beweis mittels struktureller Induktion über den Aufbau von φ:

SI: Der Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ ist trivial.

SII: $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$:

„$\Rightarrow$“: Ist
$$0 = r^{\ulcorner}\varphi{}_{\lrcorner} = \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner}\alpha_k{}_{\lrcorner} + r_i ,$$
so gilt $r_i = 0$, d.h. $i \in I_{\mathrm{GO}}$ und $r^{\ulcorner}\alpha_k{}_{\lrcorner} = 0$ für alle $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$. Induktiv folgt somit $\vec{\alpha} \in {}^{\star}L_{\mathrm{CL}}$. Folglich gilt $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_{\mathrm{CL}}$.

„$\Leftarrow$“: Ist $\varphi \in L_{\mathrm{CL}}$, so gilt $r_i = 0$ und wegen $\vec{\alpha} \in {}^{\star}L_{\mathrm{CL}}$ folgt induktiv
$$r^{\ulcorner}\varphi{}_{\lrcorner} = \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner}\alpha_k{}_{\lrcorner} + r_i = \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} 0 + 0 = 0 .$$

[16] Insbesondere gilt also $g_0 : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$, $\varphi \mapsto 1$.

Weiter gilt für $\langle\varphi,\vec\gamma,\vec w\rangle \in \mathrm{SK}$

$$r^\ulcorner\varphi\frac{\vec\gamma}{\vec w}{}^\lrcorner < \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + g^\ulcorner\varphi^\lrcorner$$

Beweis mittels struktureller Induktion über den Aufbau von φ:

SI: $\varphi\in\mathcal{V}$, d.h. $\varphi = w_k$ für ein $k\in\operatorname{len}\vec w$:

$$r^\ulcorner\varphi\frac{\vec\gamma}{\vec w}{}^\lrcorner = r^\ulcorner\gamma_k{}^\lrcorner < \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + 1 = \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + g^\ulcorner\varphi^\lrcorner$$

SII: $\varphi = \langle i,\vec u,\vec\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned}
r^\ulcorner\varphi\frac{\vec\gamma}{\vec w}{}^\lrcorner &= r^\ulcorner\langle i,\vec u\frac{\vec\gamma}{\vec w},\vec\alpha\frac{\vec\gamma}{\vec w}\rangle^\lrcorner \\
&= \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha} r^\ulcorner\alpha_k\frac{\vec\gamma}{\vec w}{}^\lrcorner + r_i \\
&\le \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha}\big(\max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + g^\ulcorner\alpha_k{}^\lrcorner\big) + r_i && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&\le \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha} g^\ulcorner\alpha_k{}^\lrcorner + r_i \\
&< \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha} g^\ulcorner\alpha_k{}^\lrcorner + r_i + 1 \\
&= \max_{l\in\operatorname{len}\vec\gamma} r^\ulcorner\gamma_l{}^\lrcorner + g^\ulcorner\varphi^\lrcorner
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass $\operatorname{len}\vec\alpha = 0$ möglich ist.

Insbesondere gilt also für $i\in I_D$, $\vec u\in {}^{m_i}\mathcal{V}$ und $\vec\alpha\in {}^{n_i}L_D$

$$\begin{aligned}
r^\ulcorner\delta_i(\vec u,\vec\alpha)^\lrcorner &= r^\ulcorner\delta_i\frac{\mathfrak{v}_{\delta_i}(\vec u\ \vec\alpha)\quad \vec u\ \ \vec\alpha}{v_0\qquad\quad v_1\ v_2}{}^\lrcorner \\
&< \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha} r^\ulcorner\alpha_k{}^\lrcorner + g^\ulcorner\delta_i{}^\lrcorner \\
&= \max_{k\in\operatorname{len}\vec\alpha} r^\ulcorner\alpha_k{}^\lrcorner + r_i \\
&= r^\ulcorner\langle i,\vec u,\vec\alpha\rangle^\lrcorner
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Für die Ungleichheit beachte man, dass $r^\ulcorner v^\lrcorner = 0$ für alle $v\in\mathcal{V}$.

Wir zeigen nun, dass

$$\varphi\notin L_{\mathrm{CL}} \quad\Rightarrow\quad r^\ulcorner\,\mathrm{R}_D\,\varphi^\lrcorner < r^\ulcorner\varphi^\lrcorner \qquad \text{für alle } \varphi\in L_D\ . \tag{B.3}$$

Damit wäre offenbar auch (ii) gezeigt.

Beweis mittels struktureller Induktion über den Aufbau von φ:

SI: $\varphi\in\mathcal{V}$: trivial

SII: $\varphi = \langle i,\vec u,\vec\alpha\rangle$:

Fall $i\in I_D$: Mit (B.2) folgt unmittelbar

$$r^\ulcorner\,\mathrm{R}_D\,\varphi^\lrcorner = r^\ulcorner\delta_i(\vec u,\vec\alpha)^\lrcorner < r^\ulcorner\langle i,\vec u,\vec\alpha\rangle^\lrcorner = r^\ulcorner\varphi^\lrcorner\ .$$

Fall $i \in I_{\mathrm{GO}}$: Sei $\varphi \notin L_{\mathrm{CL}}$ angenommen.

Fall $\max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_k {}^{\lrcorner} = 0$: Mit (B.1) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \varphi^{\lrcorner} &= r^{\ulcorner} \langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle^{\lrcorner} \\ &= \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_k {}^{\lrcorner} + r_i \\ &= 0 \\ &< r^{\ulcorner} \varphi^{\lrcorner} \end{aligned}$$

Fall $\max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_k {}^{\lrcorner} > 0$: Sei $k_1 \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$ mit

$$r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_{k_1} {}^{\lrcorner} = \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_k {}^{\lrcorner} > 0 \ .$$

Es gilt $\alpha_{k_1} \notin L_{\mathrm{CL}}$. (Ansonsten müsste nämlich gemäß (i) auch $\mathrm{R}_D\, \alpha_{k_1} = \alpha_{k_1} \in L_{\mathrm{CL}}$ und damit nach (B.1) $r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_{k_1} {}^{\lrcorner} = 0$ gelten.) Induktiv erhalten wir

$$\begin{aligned} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \varphi^{\lrcorner} &= r^{\ulcorner} \langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle^{\lrcorner} \\ &= \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_k {}^{\lrcorner} + r_i \\ &= r^{\ulcorner} \mathrm{R}_D\, \alpha_{k_1} {}^{\lrcorner} + r_i \\ &< r^{\ulcorner} \alpha_{k_1} {}^{\lrcorner} + r_i \\ &\leq \max_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} r^{\ulcorner} \alpha_k {}^{\lrcorner} + r_i \\ &= r^{\ulcorner} \varphi^{\lrcorner} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

B.2. Adäquatheit des Beweiskalküls mit Syntaxerweiterungen

Wir wollen Satz 3.4 zeigen, d.h. dass der Kalkül $\mathcal{BK}_D$ ein adäquater Beweiskalkül für CL_D ist.

Vollständigkeit

Gelte $\Phi \vDash_D \varphi$, d.h. $\mathrm{Red}_D\lceil\Phi\rfloor \vDash_{\mathrm{CL}} \mathrm{Red}_D\,\varphi$. Mit dem bereits gezeigten Vollständigkeitssatz für CL gilt dann $\mathrm{Red}_D\lceil\Phi\rfloor \vdash_{\mathrm{CL}} \mathrm{Red}_D\,\varphi$ und somit natürlich auch $\mathrm{Red}_D\lceil\Phi\rfloor \vdash_D \mathrm{Red}_D\,\varphi$ (man beachte $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}} \subseteq \mathcal{BK}_D$). Da aus den Definitionen von R_D und $=_S$ unmittelbar folgt, dass

$$\mathrm{R}_D\,\psi =_S \psi \quad \text{für alle } \psi \in L_D \qquad \text{und damit} \qquad \mathrm{Red}_D\,\psi =_S \psi \quad \text{für alle } \psi \in L_D\ ,$$

erhalten wir mit der Regel *SEQ* schließlich $\Phi \vdash_D \varphi$.

Korrektheit

Zunächst beweisen wir auch hier das Koinzidenz- und das Substitutionslemma.

B.2 Lemma (Koinzidenzlemma für CL$_D$)

Ist $\varphi \in L_D$ und sind $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ Interpretationen mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}_1} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}_2}$ und $\tilde{\mathfrak{I}}_1\ulcorner v\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_2\ulcorner v\lrcorner$ für alle $v \in \mathrm{frei}_D\,\varphi$, so gilt

$$\tilde{\mathfrak{I}}_1\ulcorner\varphi\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_2\ulcorner\varphi\lrcorner\ .$$

Beweis:
Es gilt

$$\mathfrak{I}_1\ulcorner v\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_1\ulcorner v\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_2\ulcorner v\lrcorner = \mathfrak{I}_2\ulcorner v\lrcorner$$

für alle $v \in \mathrm{frei}_D\,\varphi = \mathrm{frei}\,\mathrm{Red}_D\,\varphi$. Mit dem Koinzidenzlemma für CL folgt also

$$\tilde{\mathfrak{I}}_1\ulcorner\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}_1\ulcorner\,\mathrm{Red}_D\,\varphi\lrcorner = \mathfrak{I}_2\ulcorner\,\mathrm{Red}_D\,\varphi\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_2\ulcorner\varphi\lrcorner\ .$$

■

B.3 Lemma (Substitutionslemma für CL$_D$)

Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\varphi, \gamma \in L_D$, $v \in \mathcal{V}$ ist

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi_v^\gamma\lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}_v^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner\varphi\lrcorner$$

Beweis: Nehmen wir zuerst $\varphi \in L_{\mathrm{CL}}$ an. Analog zum Beweis des Substitutionslemmas von CL beweisen wir die Aussage mittels struktureller Induktion über den Aufbau von φ:[17]

[17]Hierbei übernehmen wir die Bezeichnungen aus der Definition der Substitution in Lemma 3.3.

SI: Für $\varphi \in \mathcal{V}$ sind zwei Fälle zu untersuchen.
1. Fall $\varphi = v$: Es folgt unmittelbar

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \gamma \lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner v \lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \varphi \lrcorner \, .$$

2. Fall $\varphi \neq v$: Da hier $v \notin \operatorname{frei} \varphi = \operatorname{frei}_D \varphi$ folgt mit dem Koinzidenzlemma (für CL_D)

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi \lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \varphi \lrcorner \, .$$

SII: 1. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha^{\gamma}_{v}, \beta^{\gamma}_{v} \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \operatorname{Red}_D \alpha^{\gamma}_{v}, \operatorname{Red}_D \beta^{\gamma}_{v} \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha^{\gamma}_{v} \lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \beta^{\gamma}_{v} \lrcorner \lrcorner \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \alpha \lrcorner, \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \beta \lrcorner \lrcorner \\
&= \mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \operatorname{Red}_D \alpha, \operatorname{Red}_D \beta \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha, \beta \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \varphi \lrcorner
\end{aligned}$$

2. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $\gamma = v$ oder $v \notin \operatorname{frei} \varphi$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi \lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \varphi \lrcorner$$

Die letzte Gleichheit ist im Falle $\gamma = v$ trivial. Falls $v \notin \operatorname{frei} \varphi = \operatorname{frei}_D \varphi$ folgt sie aus dem Koinzidenzlemma (für CL_D).

3. Fall $\varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $\gamma \neq v$ und $v \in \operatorname{frei} \varphi$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi^{\gamma}_{v} \lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \big\langle i, \langle \tilde{u} \rangle, \langle (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v} \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner \big\langle i, \langle \tilde{u} \rangle, \langle \operatorname{Red}_D (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v} \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \Big\{ b \in U_{\mathfrak{I}} \, ; \; \widetilde{\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}}\ulcorner (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v} \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \Big\} \lrcorner \\
&= H_i^{\mathfrak{I}}\ulcorner \Big\{ b \in U_{\mathfrak{I}} \, ; \; \big(\widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\big)^{b}_{u}\ulcorner \alpha \lrcorner = V_{\mathfrak{I}} \Big\} \lrcorner \\
&= \mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}\ulcorner \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \operatorname{Red}_D \alpha \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle \lrcorner \\
&= \widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \varphi \lrcorner
\end{aligned}$$

Denn für $u \notin \operatorname{frei}_D \gamma$ und damit $\tilde{u} = u$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}^{b}_{\tilde{u}}}\ulcorner (\alpha^{\tilde{u}}_{u})^{\gamma}_{v} \lrcorner &= \widetilde{\mathfrak{I}^{b}_{u}}\ulcorner \alpha^{\gamma}_{v} \lrcorner \\
&= \widetilde{(\mathfrak{I}^{b}_{u})_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}^{b}_{u}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \alpha \lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= \widetilde{(\mathfrak{I}^{b}_{u})_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\ulcorner \alpha \lrcorner && \text{Koinzidenzlemma; } u \notin \operatorname{frei}_D \gamma \\
&= \big(\widetilde{\mathfrak{I}_{v}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}}\big)^{b}_{u}\ulcorner \alpha \lrcorner && u \neq v \quad (\text{da } v \in \operatorname{frei} \varphi = \operatorname{frei} \alpha \setminus u)
\end{aligned}$$

und für $u \in \mathrm{frei}_D\,\gamma$ und damit $\tilde{u} = \mathfrak{v}_0^{\mathrm{nfr}}(v\ \gamma\ \alpha)$ ist

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}{}^{b}_{\tilde u}}\ulcorner(\alpha{}^{\tilde u}_{u}){}^{\gamma}_{v}\lrcorner &= \widetilde{(\mathfrak{I}{}^{b}_{\tilde u}){}^{\tilde{\mathfrak{I}}{}^{b}_{\tilde u}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}}\ulcorner\alpha{}^{\tilde u}_{u}\lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung}^{18} \\
&= \widetilde{(\mathfrak{I}{}^{b}_{\tilde u}){}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}}\ulcorner\alpha{}^{\tilde u}_{u}\lrcorner && \text{Koinzidenzlemma};\ \tilde u \notin \mathrm{frei}_D\,\gamma \\
&= \widetilde{(\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{\tilde u}}\ulcorner\alpha{}^{\tilde u}_{u}\lrcorner && \tilde u \neq v \\
&= \widetilde{\Big((\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{\tilde u}\Big){}^{\widetilde{(\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{\tilde u}}\ulcorner\tilde u\lrcorner}_{u}}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= \widetilde{\Big((\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{\tilde u}\Big){}^{b}_{u}}\ulcorner\alpha\lrcorner \\
&= \widetilde{\Big((\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{u}\Big){}^{b}_{\tilde u}}\ulcorner\alpha\lrcorner \\
&= \widetilde{(\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}){}^{b}_{u}}\ulcorner\alpha\lrcorner && \text{Koinzidenzlemma};\ \tilde u \notin \mathrm{frei}\,\alpha
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varphi \in L_D$. Mit dem gerade Gezeigten gilt nach Definition von sub_D:[19]

$$
\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi{}^{\gamma}_{v}\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner(\mathrm{Red}_D\,\varphi){}^{\gamma}_{v}\lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}}\ulcorner\mathrm{Red}_D\,\varphi\lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{v}}\ulcorner\varphi\lrcorner\ .
$$

■

Man zeigt damit leicht die folgende etwas allgemeinere Version des Substitutionslemmas:

B.4 Lemma

Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, seinen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi \in L_D$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ paarweise verschieden und nicht frei in $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Dann gilt:

$$
\widetilde{\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma_1\lrcorner\ \ldots\ \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma_n\lrcorner}_{x_1\ \ \ldots\ \ x_n}}\ulcorner\varphi\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner(\ldots(\varphi{}^{\gamma_1}_{x_1})\ldots){}^{\gamma_n}_{x_n}\lrcorner\ .
$$

Es ist klar, dass das Analogon von Lemma 2.1 für CL_D gilt.[20] Weiter zeigt man vollkommen analog die Aussagen (i), (ii), (iii), (iv), (v), (ix), (xi), (xii), (xiii) aus Lemma 2.2 und (ii), (iii) aus Lemma 2.6 für die Klassenlogik mit Syntaxerweiterung D.[21] Damit lässt sich auch der Beweis von Lemma 2.7, d.h. der Nachweis der Korrektheit der Regeln aus $\mathcal{BK}_{\mathrm{CL}}$, leicht auf CL_D übertragen. Zu zeigen bleibt also, dass auch die Regeln

$$
\mathit{SEQ}_{\Gamma,\Gamma'}:\ \ \frac{\Gamma}{\Gamma'} \qquad \text{für alle } \Gamma, \Gamma' \in {}^{\star}L_D \setminus \langle\rangle \text{ mit } \Gamma =_S \Gamma'
$$

korrekt sind. Hierzu zeigen wir für die Relation $=_I \subseteq L_D \sqcap L_D$ mit

$$
\varphi =_I \psi \quad \text{:gdw.} \quad \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\psi\lrcorner \text{ für alle Interpretationen } \mathfrak{I}\ ,
$$

---

[18] Man beachte $\mathrm{rg}\,\alpha{}^{\tilde u}_{u} = \mathrm{rg}\,\alpha$.

[19] Siehe Seite 108.

[20] D.h. es gelten die Aussagen von Lemma 2.1 auch für $\alpha, \beta \in L_D$ und $\tilde{\mathfrak{I}}$ anstatt $\overline{\mathfrak{I}}$.

[21] Auch die anderen Aussagen aus Lemma 2.2 und Lemma 2.6 gelten in CL_D. Wir benötigen sie hier jedoch nicht.

dass $=_S \subseteq =_I$, woraus offenbar die Korrektheit von $SEQ_{\Gamma,\Gamma'}$ folgt. Es reicht zu zeigen, dass $=_I$ die Eigenschaften (i) - (v) von Seite 109 hat.

(i) Seien $\big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle, \big\langle i, \langle\rangle, \langle\gamma,\delta\rangle\big\rangle \in L_D$ mit $i \in I_{\mathrm{GJ}}$, $\alpha =_I \gamma$ und $\beta =_I \delta$. Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt dann

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\big\rangle\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha\lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\beta\lrcorner\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\delta\lrcorner\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle\rangle, \langle\gamma,\delta\rangle\big\rangle\lrcorner$$

(ii) Seien $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle, \big\langle i, \langle u\rangle, \langle\beta\rangle\big\rangle \in L_D$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $\alpha =_I \beta$. Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt dann

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\left\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\; \tilde{\mathfrak{I}}{}^{\,b}_{u}\ulcorner\alpha\lrcorner\right\}\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\left\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\; \tilde{\mathfrak{I}}{}^{\,b}_{u}\ulcorner\beta\lrcorner\right\}\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle u\rangle, \langle\beta\rangle\big\rangle\lrcorner$$

(iii) Sei $\big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle \in L_D$ mit $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und $w \in \mathcal{V}$ mit $w \notin \mathrm{frei}_D\,\alpha \setminus u$. Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt dann mit dem Analogon von Lemma 2.6 (ii)

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle w\rangle, \langle\alpha{}^{w}_{u}\rangle\big\rangle\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\left\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\; \tilde{\mathfrak{I}}{}^{\,b}_{w}\ulcorner\alpha{}^{w}_{u}\lrcorner\right\}\lrcorner = H_i^{\mathfrak{I}\ulcorner}\left\{b \in D_{\mathfrak{I}}\,;\; \tilde{\mathfrak{I}}{}^{\,b}_{u}\ulcorner\alpha\lrcorner\right\}\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\big\langle i, \langle u\rangle, \langle\alpha\rangle\big\rangle\lrcorner$$

(iv) Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L_D$ mit $\alpha =_I \beta$ und $\gamma =_I \delta$ und $u \in \mathcal{V}$. Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt dann

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha{}^{\gamma}_{u}\lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma\lrcorner}_{u}}\ulcorner\alpha\lrcorner = \widetilde{\mathfrak{I}{}^{\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\delta\lrcorner}_{u}}\ulcorner\beta\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\beta{}^{\delta}_{u}\lrcorner$$

(v) Hierfür ist einige Vorarbeit notwendig. Wir werden deshalb ein paar allgemeinere Überlegungen einschieben. Auf Seite 204 kommen wir wieder auf den Nachweis von (v) für $=_I$ zurück.

* * *

Wir wollen zunächst eine alternative Beschreibung des freien Vorkommens von Variablen angeben. Hierzu beschreiben wir, wie in den allgemeinen Operatoren die Bindungsvariablen auf die Parameter wirken. Für jedes $i \in \overline{I}_D$ definieren wir eine Abbildung $\mathrm{BIF}_i : n_i \to \mathcal{P}({}^{\star}m_i)$, die jedem „Parameter-Index“ die auf diesen Parameter zugreifenden „Bindungsvariablen-Indice-Folgen“ zuordnet. Die Definition geschieht per Induktion über den Rang von i (bzgl. $\prec_D$).

IA $\mathrm{rg}_{\prec_D}\, i = 0$:

a) Fall $i \in I_{\mathrm{GJ}}$ und damit $n_i = 2$ und $m_i = 0$:[22]

$$\mathrm{BIF}_i : 2 \to \mathcal{P}({}^{\star}0),\;\; x \mapsto \{\langle\rangle\}$$

b) Fall $i \in I_{\mathrm{GQ}}$ und damit $n_i = 1$ und $m_i = 1$:

$$\mathrm{BIF}_i : 1 \to \mathcal{P}({}^{\star}1),\;\; 0 \mapsto \{\langle 0\rangle\}$$

c) Fall $i \in I_D$ mit $\delta_i \in \mathcal{V}$, d.h. $\delta_i = v_2$ und damit $n_i = 1$ und $m_i = 0$:

$$\mathrm{BIF}_i : 1 \to \mathcal{P}({}^{\star}0),\;\; 0 \mapsto \{\langle\rangle\}$$

[22] Beachte ${}^{\star}0 = \{\langle\rangle\}$

IS $\mathrm{rg}_{\prec_D} i > 0$:

Sei $L_i := L_{\leq(\mathrm{rg}_{\prec_D} i-1)}$. Offenbar gilt $\delta_i \in L_i$. Wir definieren rekursiv $\mathrm{BF}_i : L_i \to \mathcal{P}(^\star\mathcal{V})$ durch

$$\varphi \mapsto \begin{cases} \{\langle\varphi\rangle\}, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \bigcup_{l\in\mathrm{len}\,\vec{\beta}} \bigcup_{\tau\in\mathrm{BIF}_j\ulcorner l\lrcorner} \{(\vec{w} \triangleleft \tau)\star\sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}_i\ulcorner\beta_l\lrcorner\}\,, & \text{falls } \varphi = \langle j, \vec{w}, \vec{\beta}\rangle \end{cases}$$

Man beachte, dass mit $\langle j, \vec{w}, \vec{\beta}\rangle \in L_i$ auch $\beta_l \in L_i$ für alle $l \in \mathrm{len}\,\vec{\beta}$.

Mit $\mathrm{In} : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$, $v_k \mapsto k$

$$\mathrm{del} : \mathbb{N} \to {}^\star\mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} \langle m\rangle, & \text{falls } n = 3m+1 \\ \langle\rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\mathrm{Del} : {}^\star\mathbb{N} \to {}^\star\mathbb{N}, \tau \mapsto \mathop{\bigstar}_{k\in\mathrm{len}\,\tau} \mathrm{del}\,\tau_k$$

definieren wir nun

$$\mathrm{BIF}_i : n_i \to \mathcal{P}(^\star m_i),\ n \mapsto \{\mathrm{Del}\ulcorner\,\mathrm{In} \triangleleft \tau\lrcorner\,;\ \tau \star \langle v_{3n+2}\rangle \in \mathrm{BF}_i\ulcorner\delta_i\lrcorner\}$$

Warum ist BIF_i wohldefiniert, d.h. warum gilt $\mathrm{im}\,\mathrm{BIF}_i \subseteq \mathcal{P}(^\star m_i)$?

Sei $a \in \mathrm{im}\,\mathrm{Del}\ulcorner\,\mathrm{In} \triangleleft \tau\lrcorner$, wobei $\tau\star\langle v_{3n+2}\rangle \in \mathrm{BF}_i\ulcorner\delta_i\lrcorner$. Nach Definition von BF_i gilt $\tau \in {}^\star(\mathrm{bind}\,\delta_i)$. Es gibt dann ein $k \in \mathrm{len}\,\tau$ mit $a \in \mathrm{im}\,\mathrm{del}\,\mathrm{In}\ulcorner\tau_k\lrcorner$, d.h. mit $\mathrm{In}\ulcorner\tau_k\lrcorner = 3a+1$, d.h. $v_{3a+1} = \tau_k \in \mathrm{bind}\,\delta_i$. Damit ist natürlich $a \in m_i$ und folglich $\mathrm{Del}\ulcorner\,\mathrm{In} \triangleleft \tau\lrcorner \in {}^\star m_i$.

Wir können nun ein globales $\mathrm{BF} : L_D \to \mathcal{P}(^\star\mathcal{V})$ definieren durch

$$\varphi \mapsto \begin{cases} \{\langle\varphi\rangle\}, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \bigcup_{l\in\mathrm{len}\,\vec{\beta}} \bigcup_{\tau\in\mathrm{BIF}_j\ulcorner l\lrcorner} \{(\vec{w} \triangleleft \tau)\star\sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\ulcorner\beta_l\lrcorner\}\,, & \text{falls } \varphi = \langle j, \vec{w}, \vec{\beta}\rangle \end{cases}$$

Es gilt offenbar $\mathrm{BF}\restriction L_i = \mathrm{BF}_i$.

B.5 Lemma

Für alle $\varphi \in L_D$, $\vec{\gamma} \in {}^\star L_D$ und $\vec{w} \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\langle\varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \in \mathrm{SK}$ gilt:

(a) *Wenn $\tau \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}$, dann existieren $j \in \mathrm{len}\,\vec{w}$ und $\rho, \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi$ und $\sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\gamma_j$, sodass $\tau = \rho\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma$.*

(b) *Sind $j \in \mathrm{len}\,\vec{w}$ und $\rho, \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi$ und $\sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\gamma_j$, so gilt $\rho\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}$.*

Beweis:

(a) per struktureller Induktion:

SI: Ist $\varphi \in \mathcal{V}$, so muss $\varphi = w_j$ für ein $j \in \mathrm{len}\,\vec{w}$ gelten. Da $\langle\rangle \star \langle w_j\rangle \in \{\langle w_j\rangle\} = \mathrm{BF}\,\varphi$ und $\tau \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} = \mathrm{BF}\,\gamma_j$, ist wegen $\tau = \langle\rangle\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \tau$ alles gezeigt.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Mit $\tau \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} = \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}, \vec{\alpha}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\rangle$ gibt es $l \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}$, $\tau' \in \mathrm{BIF}_i\, l$, $\sigma' \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma' \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_l\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}$, sodass $\tau = (\vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \triangleleft \tau') \star \sigma'$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren also $j \in \mathrm{len}\,\vec{w}$ und $\rho', \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho' \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_l$ und

$$\sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\gamma_j \ ,$$

sodass $\sigma' = \rho'\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma$. Sei $\rho := (\vec{u} \triangleleft \tau') \star \rho'$. Es gilt damit

$$\rho \star \langle w_j\rangle = (\vec{u} \triangleleft \tau') \star \rho' \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle = \mathrm{BF}\,\varphi \ .$$

Wegen

$$\tau = (\vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \triangleleft \tau') \star \sigma' = (\vec{u} \triangleleft \tau')\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \rho'\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma = ((\vec{u} \triangleleft \tau') \star \rho')\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma = \rho\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma$$

ist alles gezeigt.

(b) per struktureller Induktion:

SI: Ist $\varphi \in \mathcal{V}$, so muss $\varphi = w_j$ und $\rho = \langle\rangle$ gelten. Also gilt

$$\rho\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle = \sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\gamma_j = \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \ .$$

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Da $\rho \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi$, gibt es $l \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}$, $\tau' \in \mathrm{BIF}_i\, l$, $\sigma' \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma' \star \langle w_j\rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_l$, sodass $\rho = (\vec{u} \triangleleft \tau') \star \sigma'$. Induktiv folgt $\sigma'\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_l\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}$ und damit gilt

$$\rho\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle = ((\vec{u} \triangleleft \tau') \star \sigma')\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle = (\vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \triangleleft \tau') \star \sigma'\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \star \sigma \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \ .$$

■

Es sei nun

$$\mathrm{BFV} : L_D \sqcap \mathcal{V} \to \mathcal{P}({}^\star\mathcal{V}),\ \langle \varphi, v\rangle \mapsto \{\tau\,;\ \tau \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi\} \ .$$

B.6 Lemma

Sei $\varphi \in L_D$ und $v \in \mathcal{V}$. Es gilt dann

(i) $\tau \in {}^\star(\mathrm{bind}\,\varphi)$ *für alle* $\tau \in \mathrm{BFV}\ulcorner\varphi, v\lrcorner$

(ii) $v \in \mathrm{var}\,\varphi$ *gdw.* $\mathrm{BFV}\ulcorner\varphi, v\lrcorner \neq \emptyset$

(iii) $v \in \mathrm{frei}_D\,\varphi$ *gdw.* *es gibt ein* $\tau \in \mathrm{BFV}\ulcorner\varphi, v\lrcorner$ *mit* $v \notin \mathrm{im}\,\tau$

Beweis:
(i) folgt unmittelbar aus der Definition von BFV.

(ii) Zu zeigen ist

$$v \in \mathrm{var}\,\varphi \quad \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v\rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi$$

Betrachten wir zuerst den Fall $\varphi \in \mathcal{V}$. Ist $\varphi = v$, so gilt natürlich $v \in \operatorname{var} \varphi$ und $\langle\rangle \star \langle v \rangle \in \{\langle v \rangle\} = \operatorname{BF} \varphi$. Ist $\varphi \neq v$, so gilt andererseits $v \notin \operatorname{var} \varphi$ und für alle $\tau \in {}^{\star}\mathcal{V}$ gilt $\tau \star \langle v \rangle \notin \{\langle \varphi \rangle\} = \operatorname{BF} \varphi$.

„$\Leftarrow$“ per struktureller Induktion:

SI: Den Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ haben wir gerade gezeigt.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ und $\tau \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \operatorname{BF} \varphi$. Es muss $\tau \star \langle v \rangle = (\vec{u} \triangleleft \tau') \star \sigma$ mit $\tau' \in \operatorname{BIF}_i l$, $l \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$ und $\sigma \in \operatorname{BF} \alpha_l$ gelten. Da offenbar $\langle\rangle \notin \operatorname{BF} \alpha_l$, muss ein $\sigma' \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\sigma' \star \langle v \rangle = \sigma \in \operatorname{BF} \alpha_l$ existieren. Nach IV gilt also $v \in \operatorname{var} \alpha_l \subseteq \operatorname{var} \varphi$.

„$\Rightarrow$“ per doppelter Induktion:

IA: Sei $\varphi \in L_{\leq 0}$.

SI: Den Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ haben wir oben gezeigt.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ und gelte $v \in \operatorname{var} \varphi$. Es gibt also ein $j \in \operatorname{len} \vec{\alpha} = n_i$ mit $v \in \operatorname{var} \alpha_j$. Natürlich ist $\alpha_j \in L_{\leq 0}$. Nach SIV gibt es daher ein $\tau \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \operatorname{BF} \alpha_j$. Da $\operatorname{rg}_{\prec_D} i = 0$, folgt nach Definition von BIF_i sofort $\operatorname{BIF}_i j \neq \emptyset$. Sei $\rho \in \operatorname{BIF}_i j$ beliebig. Es gilt nun

$$(\vec{u} \triangleleft \rho) \star \tau \star \langle v \rangle \in \bigcup_{l \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} \bigcup_{\tau' \in \operatorname{BIF}_i l} \{(\vec{u} \triangleleft \tau') \star \sigma \,;\, \sigma \in \operatorname{BF} \alpha_l\} = \operatorname{BF} \varphi \,.$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Aussage für alle $\varphi \in L_{\leq n}$. Sei nun $\varphi \in L_{\leq n+1}$.

SI: Den Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ haben wir oben gezeigt.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ und gelte $v \in \operatorname{var} \varphi$. Es gibt also ein $j \in \operatorname{len} \vec{\alpha} = n_i$ mit $v \in \operatorname{var} \alpha_j$. Natürlich gilt auch $\alpha_j \in L_{\leq n+1}$. Also gibt es nach SIV ein $\tau \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \operatorname{BF} \alpha_j$. Ist $\operatorname{rg}_{\prec_D} i = 0$, so folgt wieder nach Definition von BIF_i sofort $\operatorname{BIF}_i j \neq \emptyset$. Ist $\operatorname{rg}_{\prec_D} i \neq 0$, so gilt $i \in I_D$ und $v_{3j+2} \in \operatorname{var} \delta_i$. (Siehe die Definition der potentiellen Definientia auf Seite 105.) Wegen $\operatorname{rg}_{\prec_D} i \leq n+1$ gilt $\delta_i \in L_{\leq n}$. Nach der äußeren Induktionsvoraussetzung gibt es somit ein $\tau' \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\tau' \star \langle v_{3j+2} \rangle \in \operatorname{BF} \delta_i = \operatorname{BF}_i \delta_i$. Also ist auch in diesem Falle $\operatorname{BIF}_i j \neq \emptyset$. Sei $\rho \in \operatorname{BIF}_i j$ beliebig. Es gilt nun

$$(\vec{u} \triangleleft \rho) \star \tau \star \langle v \rangle \in \bigcup_{l \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} \bigcup_{\tau' \in \operatorname{BIF}_i l} \{(\vec{u} \triangleleft \tau') \star \sigma \,;\, \sigma \in \operatorname{BF} \alpha_l\} = \operatorname{BF} \varphi \,.$$

(iii) Bezeichne $A(\varphi)$ die Aussage

$$v \in \operatorname{frei}_D \varphi \quad \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } \tau \in {}^{\star}\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \operatorname{BF} \varphi \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \qquad \text{für alle } v \in \mathcal{V} \,.$$

Zu zeigen ist $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L_D$.

Betrachten wir zuerst den Fall $\varphi \in L_{\mathrm{CL}}$.

SI: Sei $\varphi \in \mathcal{V}$. Ist $\varphi = v$, so gilt $v \in \operatorname{frei} \varphi$ und $\langle\rangle \star \langle v \rangle \in \{\langle v \rangle\} = \operatorname{BF} \varphi$ sowie $v \notin \operatorname{im}\langle\rangle$. Ist andererseits $\varphi \neq v$, so gilt $v \notin \operatorname{frei} \varphi$ und es gibt kein $\tau \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \{\langle \varphi \rangle\} = \operatorname{BF} \varphi$.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$. Es gilt

$$\mathrm{BF}\,\varphi = \bigcup_{j \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} \bigcup_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \{(\vec{u} \triangleleft \tau) \star \sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\,\alpha_j\} \ .$$

Fall $i \in I_{\mathrm{GJ}}$, d.h. es gilt $\varphi = \big\langle i, \langle\rangle, \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \big\rangle$ und für $j \in 2$ ist $\mathrm{BIF}_i\, j = \{\langle\rangle\}$ und damit $\mathrm{BF}\,\varphi = \mathrm{BF}\,\alpha_0 \cup \mathrm{BF}\,\alpha_1$. Es gilt somit induktiv

$$\begin{array}{lll} v \in \operatorname{frei} \varphi & \text{gdw.} & v \in \operatorname{frei} \alpha_0 \text{ oder } v \in \operatorname{frei} \alpha_1 \\ & \text{gdw.} & \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_0 \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \\ & & \quad \text{oder} \quad \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_1 \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \\ & \text{gdw.} & \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_0 \cup \mathrm{BF}\,\alpha_1 = \mathrm{BF}\,\varphi \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \end{array}$$

Fall $i \in I_{\mathrm{GQ}}$, d.h. es gilt $\varphi = \big\langle i, \langle u \rangle, \langle \alpha \rangle \big\rangle$ und $\mathrm{BIF}_i\, 0 = \{\langle 0 \rangle\}$ und damit

$$\mathrm{BF}\,\varphi = \{(\langle u \rangle \triangleleft \langle 0 \rangle) \star \sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\,\alpha\} = \{\langle u \rangle \star \sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\,\alpha\} \ .$$

Ist $u = v$, so gilt $v \notin \operatorname{frei} \varphi$ und wegen $\langle\rangle \notin \mathrm{BF}\,\alpha$ folgt $v \in \operatorname{im} \tau$ für jedes $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit

$$\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi = \{\langle v \rangle \star \sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\,\alpha\} \ .$$

Ist $u \neq v$, so gilt induktiv

$$\begin{array}{lll} v \in \operatorname{frei} \varphi & \text{gdw.} & v \in \operatorname{frei} \alpha \\ & \text{gdw.} & \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \\ & \text{gdw.} & \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \langle u \rangle \star \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \\ & \text{gdw.} & \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi \text{ und } v \notin \operatorname{im} \tau \end{array}$$

(IV) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte für alle $m \in n$ die Aussage $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L_{\leq m}$.

Wir zeigen zunächst zwei Hilfsaussagen:

($\#$) Ist $i \in I_D$ mit $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_{\leq n}$ und $v \in \mathcal{V}$, so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$ gilt $v \in \operatorname{im} \tau$.

(b) Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha})$ gilt $v \in \operatorname{im} \tau$.

($\#\#$) Ist $\varphi \in L_{\leq n}$ und $v \in \mathcal{V}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi$ gilt $v \in \operatorname{im} \tau$.

(b) Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\mathrm{R}_D\,\varphi$ gilt $v \in \operatorname{im} \tau$.

(c) Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\mathrm{Red}_D\,\varphi$ gilt $v \in \operatorname{im} \tau$.

Beweis von ($\#$):

Ist $\mathrm{rg}_{\prec_D} i = 0$, so muss $\delta_i = v_2$, $m_i = \operatorname{len} \vec{u} = 0$, $n_i = \operatorname{len} \vec{\alpha} = 1$ gelten. Damit ist die Äquivalenz klar; denn wegen $\mathrm{BIF}_i\, 0 = \{\langle\rangle\}$ gilt

$$\mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle = \{(\langle\rangle \triangleleft \langle\rangle) \star \sigma\,;\ \sigma \in \mathrm{BF}\,\alpha_0\} = \mathrm{BF}\,\alpha_0 = \mathrm{BF}\,\delta_i \frac{\alpha_0}{v_0} = \mathrm{BF}\,\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) \ .$$

Sei nun $\mathrm{rg}_{\prec_D} i > 0$ angenommen.[23]

(b) $\Rightarrow$ (a): Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha})$ gelte $v \in \mathrm{im}\,\tau$. Gibt es kein $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$, so ist nichts zu zeigen.

Andernfalls gilt nach (ii) $v \in \mathrm{var}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Insbesondere gilt dann $v \neq \mathfrak{v}_k(\vec{u}\ \vec{\alpha})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Es gibt also $l \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}$, $\rho \in \mathrm{BIF}_i\, l$, $\sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\alpha_l$, sodass $\tau = (\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma$. Da $\rho \in \mathrm{BIF}_i\, l$ (und $\mathrm{rg}_{\prec_D} i > 0$), ist $\rho = \mathrm{Del}\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau' \lrcorner$ für ein $\tau' \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau' \star \langle v_{3l+2} \rangle \in \mathrm{BF}_i\,\delta_i = \mathrm{BF}\,\delta_i$. Gemäß Lemma B.5 (b) gilt somit[24]

$$\tau' \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} \star \sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} = \mathrm{BF}\,\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) \ .$$

Nach Annahme ist also

$$v \in \mathrm{im}\left(\tau' \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} \star \sigma\right) \ .$$

Ist $v \in \mathrm{im}\,\sigma$, so ist sofort klar, dass $v \in \mathrm{im}\,((\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma) = \mathrm{im}\,\tau$. Sei also

$$v \in \mathrm{im}\left(\tau' \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2}\right)$$

angenommen. Gemäß (i) ist $\tau' \in {}^\star(\mathrm{bind}\,\delta_i)$. Da $v_2, v_5, \ldots \notin \mathrm{bind}\,\delta_i$ und $v \neq \mathfrak{v}_k(\vec{u}\ \vec{\alpha})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, muss also $v = u_j$ und $v_{3j+1} \in \mathrm{im}\,\tau'$ für ein $j \in \mathrm{len}\,\vec{u}$ gelten. Wegen $\mathrm{del}\,\mathrm{In}\ulcorner v_{3j+1} \lrcorner = \mathrm{del}(3j+1) = \langle j \rangle$, gilt also

$$j \in \mathrm{im}\,\mathrm{del}\,\mathrm{In}\ulcorner v_{3j+1} \lrcorner \subseteq \mathrm{im}\,\mathrm{Del}\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau' \lrcorner = \mathrm{im}\,\rho$$

und damit

$$v = u_j \in \mathrm{im}(\vec{u} \triangleleft \rho) \subseteq \mathrm{im}\,((\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma) = \mathrm{im}\,\tau \ .$$

(a) $\Rightarrow$ (b): Für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$ gelte $v \in \mathrm{im}\,\tau$. Sei $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit

$$\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) = \mathrm{BF}\,\delta_i \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} \ .$$

Gemäß Lemma B.5 (a) tritt einer der folgenden Fälle ein:

1. Es existieren $j \in k_i$ und $\rho, \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho \star \langle v_{3j} \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i$ und

$$\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\mathfrak{v}_j(\vec{u}\ \vec{\alpha}) = \{\langle \mathfrak{v}_j(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \rangle\} \ ,$$

d.h. $\sigma = \langle\rangle$ und $v = \mathfrak{v}_j(\vec{u}\ \vec{\alpha})$, sodass

$$\tau = \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} \star \sigma = \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} \ .$$

Da $\delta_i \in L_i \subseteq L_{\leq n-1}$ und $v_{3j} \notin \mathrm{frei}_D\,\delta_i$, gilt dann $v_{3j} \in \mathrm{im}\,\rho$ mit (IV). Damit ist

$$v = \mathfrak{v}_j(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \in \mathrm{im}\,\rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2} = \mathrm{im}\,\tau \ .$$

[23] Dies ist natürlich nur im Falle $n > 0$ möglich.

[24] Man beachte, dass α_l in der Substitution $\frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\varphi}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ \ v_2}$ für v_{3l+2} substituiert wird.

2. Es existieren $j \in m_i = \operatorname{len} \vec{u}$ und $\rho, \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho \star \langle v_{3j+1} \rangle \in \mathrm{BF}\, \delta_i$ und
$$\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, u_j = \{\langle u_j \rangle\} \ ,$$
d.h. $\sigma = \langle\rangle$ und $v = u_j$, sodass
$$\tau = \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \star \sigma = \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \ .$$
Da $\delta_i \in L_i \subseteq L_{\leq n-1}$ und $v_{3j+1} \notin \mathrm{frei}_D\, \delta_i$, gilt dann $v_{3j+1} \in \operatorname{im} \rho$ mit (IV). Damit ist
$$v = u_j \in \operatorname{im} \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} = \operatorname{im} \tau \ .$$

3. Es existieren $j \in n_i = \operatorname{len} \vec{\alpha}$ und $\rho, \sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\rho \star \langle v_{3j+2} \rangle \in \mathrm{BF}\, \delta_i = \mathrm{BF}_i\, \delta_i$ und $\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \alpha_j$, sodass $\tau = \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \star \sigma$.

   Wegen $\mathrm{rg}_{\prec_D} i > 0$ folgt $\mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \rho_\lrcorner \in \mathrm{BIF}_i\, j$ aus der Definition von BIF_i. Somit gilt weiter
$$(\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \rho_\lrcorner) \star \sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \ ,$$
   d.h. es ist nach Annahme $v \in \operatorname{im}((\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \rho_\lrcorner) \star \sigma)$. Ist $v \in \operatorname{im} \sigma$, so gilt natürlich $v \in \operatorname{im} \left(\rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \star \sigma \right) = \operatorname{im} \tau$. Sei also $v \in \operatorname{im}(\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \rho_\lrcorner)$. D.h. es gibt ein $m \in \operatorname{len} \vec{u}$ mit $v = u_m$ und $m \in \operatorname{im} \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \rho_\lrcorner$. Es gibt also ein $l \in \operatorname{len} \rho$ mit $\mathrm{del}\, \mathrm{In}^\ulcorner \rho_{l\lrcorner} = \langle m \rangle$. Folglich gilt $\mathrm{In}^\ulcorner \rho_{l\lrcorner} = 3m + 1$, d.h. $\rho_l = v_{3m+1}$ und damit
$$v = u_m \in \operatorname{im} \rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \subseteq \operatorname{im} \left(\rho \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1\ v_2} \star \sigma \right) = \operatorname{im} \tau \ .$$

Beweis von (##):

(a) $\Leftrightarrow$ (b) per struktureller Induktion:

SI: Ist $\varphi \in \mathcal{V}$, so gilt $\mathrm{R}_D\, \varphi = \varphi$ und die Behauptung ist trivial.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$.

Fall $i \in I_{\mathrm{GO}}$: Es gilt also $\mathrm{R}_D\, \varphi = \langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Gelte $v \in \operatorname{im} \tau$ für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \varphi$. Nun sei $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle$ beliebig. Es gibt also $l \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$, $\rho \in \mathrm{BIF}_i\, l$, $\sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \mathrm{R}_D\, \alpha_l$, sodass $\tau = (\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma$. O.E. sei $v \notin \operatorname{im}(\vec{u} \triangleleft \rho)$. Für alle $\sigma' \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma' \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \alpha_l$ muss also wegen $(\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma' \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \varphi$ nach Annahme $v \in \operatorname{im} \sigma'$ gelten. Mit der Induktionsvoraussetzung (natürlich ist auch $\alpha_l \in L_{\leq n}$) folgt also $v \in \operatorname{im} \sigma \subseteq \operatorname{im} \tau$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Gelte $v \in \operatorname{im} \tau$ für alle $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle$. Nun sei $\tau \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \varphi$ beliebig. Es gibt also $l \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$, $\rho \in \mathrm{BIF}_i\, l$, $\sigma \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \alpha_l$, sodass $\tau = (\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma$. O.E. sei $v \notin \operatorname{im}(\vec{u} \triangleleft \rho)$. Für alle $\sigma' \in {}^\star\mathcal{V}$ mit $\sigma' \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\, \mathrm{R}_D\, \alpha_l$ muss also wegen $(\vec{u} \triangleleft \rho) \star \sigma' \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\langle i, \vec{u}, \mathrm{R}_D \triangleleft \vec{\alpha} \rangle$ nach Annahme $v \in \operatorname{im} \sigma'$ gelten. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt also $v \in \operatorname{im} \sigma \subseteq \operatorname{im} \tau$.

Fall $i \in I_D$: Es gilt also $\mathrm{R}_D\,\varphi = \delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha})$ und die Aussage folgt unmittelbar mit $(\#)$.

Da mit $\varphi \in L_{\leq n}$ auch $\mathrm{R}_D\,\varphi \in L_{\leq n}$, folgt (a) $\Leftrightarrow$ (c) mit trivialer Induktion aus (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Für alle $\varphi \in L_{\leq n}$ und $v \in \mathcal{V}$ können wir mit dem Gezeigten (d.h. $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in L_{\mathrm{CL}}$ und $(\#\#)$) nun endlich schließen:

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{frei}_D\,\varphi \quad & \text{gdw.} \quad v \in \mathrm{frei}\,\mathrm{Red}_D\,\varphi \\ & \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\mathrm{Red}_D\,\varphi,\ \text{sodass } v \notin \mathrm{im}\,\tau \\ & \text{gdw.} \quad \text{es gibt ein } \tau \in {}^\star\mathcal{V} \text{ mit } \tau \star \langle v \rangle \in \mathrm{BF}\,\varphi,\ \text{sodass } v \notin \mathrm{im}\,\tau \end{aligned}$$

Induktiv folgt $A(\varphi)$ für alle $\varphi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{\leq n} = L_D$.

■

Für $\varphi \in L_D$ und $\vec{w} \in {}^\star\mathcal{V}$ injektiv mit $\mathrm{bind}\,\varphi \cup \mathrm{var}\,\varphi \subseteq \mathrm{im}\,\vec{w}$ setzen wir

$$\mathrm{Bind}^{\vec{w}}_\varphi := \{l \in \mathrm{len}\,\vec{w}\,;\ w_l \in \mathrm{bind}\,\varphi\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_\varphi := \{l \in \mathrm{len}\,\vec{w}\,;\ w_l \in \mathrm{frei}_D\,\varphi\}$$

sowie

$$\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi : \mathrm{bind}\,\varphi \cup \mathrm{var}\,\varphi \to \mathbb{N},\ v \mapsto \text{dasjenige } k \in \mathbb{N} \text{ mit } v = w_k\ .$$

Mit der Aussage (a) im nun folgenden Satz ist gezeigt, dass sich auch für die eingeführten Operatoren Interpretations-Grundfunktionen[25] finden lassen. Eine solche ist gewissermaßen der semantische „Inhalt“ eines Operators. Natürlich sind diese Funktionen Struktur-abhängig. Bei Operatoren mit mehreren Bindungsvariablen ist zudem entscheidend, ob und welche Bindungsvariablen gleich sind.[26]

Ist $\vec{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in {}^\star L_D$ und $\vec{u} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle \in {}^\star\mathcal{V}$, so schreiben wir im Folgenden

$$\mathfrak{I}^{\vec{a}}_{\vec{u}}$$

für

$$(\ldots(\mathfrak{I}^{a_1}_{u_1})\ldots)^{a_n}_{u_n}\ .$$

Weiter schreiben wir für die zugehörige Abbildung $\widetilde{\mathfrak{I}^{\vec{a}}_{\vec{u}}}$ einfach $\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{a}}_{\vec{u}}$.

[25]Man erinnere sich an die Interpretations-Grundfunktionen der Grundoperatoren auf Seite 55.

[26]Dies wird in (a) durch die Äquivalenzrelation S erfasst.

B.7 Satz

(a) *Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, alle $i \in \overline{I}_D$ und alle Äquivalenzrelationen S auf m_i gibt es eine Abbildung*

$$G^{\mathfrak{A}}_{i,S} : \left(\prod_{j \in n_i} \prod_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} {}^{(\mathrm{len}\, {}^{\tau}U_{\mathfrak{A}})}U_{\mathfrak{A}} \right) \to U_{\mathfrak{A}} \ ,$$

sodass für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $i \in \overline{I}_D$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$ und $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \lrcorner = G^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_{i,S} \ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{u} \,\triangleleft\, \tau} \ulcorner \alpha_j \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\, \tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \lrcorner \ ,$$

wobei $S := \{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i \,;\ u_k = u_l\}$.

(b) *Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, alle $\varphi \in L_D$, alle injektiven $\vec{w} \in {}^{\star}\mathcal{V}$ mit $\mathrm{bind}\, \varphi \cup \mathrm{var}\, \varphi \subseteq \mathrm{im}\, \vec{w}$ und alle Äquivalenzrelationen S auf $\mathrm{Bind}^{\vec{w}}_{\varphi}$ gibt es eine Abbildung*

$$\tilde{G}^{\mathfrak{A}, \vec{w}}_{\varphi,S} : \left(\prod_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}} \prod_{\tau \in \mathrm{BFV}\ulcorner \varphi, w_k \lrcorner} {}^{(\mathrm{len}\, {}^{\tau}U_{\mathfrak{A}})}U_{\mathfrak{A}} \right) \to U_{\mathfrak{A}} \ ,$$

sodass für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w} \rangle \in \mathrm{SK}$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \varphi \frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \lrcorner = \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}, \vec{w}}_{\varphi,S} \ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \,\triangleleft\, \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\varphi} \,\triangleleft\, \tau} \ulcorner \gamma_k \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\, \tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BFV}\ulcorner \varphi, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}} \lrcorner \ ,$$

wobei $S := \Big\{ \langle r, s \rangle \in \mathrm{Bind}^{\vec{w}}_{\varphi} \sqcap \mathrm{Bind}^{\vec{w}}_{\varphi} \,;\ \gamma_r = \gamma_s \Big\}$.

Beweis: Da die beiden Aussagen eng miteinander verknüpft sind, müssen wir sie gemeinsam beweisen. Hierzu beweisen wir (a) per Induktion über $n = \mathrm{rg}_{\prec_D} i$ und zeigen im Induktionsschritt ($n \to n{+}1$) zunächst mit der Induktionsvoraussetzung (von (a)) die Aussage (b) für alle $\varphi \in L_{\leq n}$ um dann mit dieser den Induktionsschluss für (a) abzuschließen. Wegen $L_D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{\leq n}$ ist klar, dass wir damit auch (b) gezeigt haben.

IA $\mathrm{rg}_{\prec_D} i = 0$:

Fall $i \in I_{\mathrm{GJ}}$: Es gilt $m_i = 0$, $n_i = 2$, $\mathrm{BIF}_i\, 0 = \mathrm{BIF}_i\, 1 = \{\langle\rangle\}$ und für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\alpha_0, \alpha_1 \in L_D$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \rangle \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner \langle i, \langle\rangle, \langle \mathrm{Red}_D\, \alpha_0, \mathrm{Red}_D\, \alpha_1 \rangle \rangle \lrcorner = H^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_i \ulcorner \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha_0 \lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha_1 \lrcorner \lrcorner$$

Wir definieren daher $G^{\mathfrak{A}}_{i,S}$ durch

$$\Big\langle \big\langle \langle c_{j,\tau,\vec{b}} \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\, \tau}U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \{\langle\rangle\}} \Big\rangle_{j \in 2} \mapsto H^{\mathfrak{A}}_i \ulcorner c_{0,\langle\rangle,\langle\rangle}, c_{1,\langle\rangle,\langle\rangle} \lrcorner$$

Damit gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ (und alle Äquivalenzrelationen S auf m_i):

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_{i,S} \ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{u} \,\triangleleft\, \tau} \ulcorner \alpha_j \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\, \tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \lrcorner &= H^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_i \ulcorner \tilde{\mathfrak{I}}^{\langle\rangle}_{\langle\rangle \,\triangleleft\, \langle\rangle} \ulcorner \alpha_0 \lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}^{\langle\rangle}_{\langle\rangle \,\triangleleft\, \langle\rangle} \ulcorner \alpha_1 \lrcorner \lrcorner \\ &= H^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_i \ulcorner \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha_0 \lrcorner, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \alpha_1 \lrcorner \lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \langle i, \langle\rangle, \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \rangle \lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \lrcorner \end{aligned}$$

Fall $i \in I_{\mathrm{GQ}}$: Es gilt $m_i = 1$, $n_i = 1$, $\mathrm{BIF}_i\, 0 = \{\langle 0\rangle\}$ und für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\alpha_0 \in L_D$, $u_0 \in \mathcal{V}$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i, \langle u_0\rangle, \langle \alpha_0\rangle\rangle\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner\langle i, \langle u_0\rangle, \langle \mathrm{Red}_D\, \alpha_0\rangle\rangle\lrcorner = H_i^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\ulcorner\left\{b_0 \in U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\,;\ \tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{b_0}_{u_0}\ulcorner\alpha_0\lrcorner = V_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\right\}\lrcorner$$

Wir definieren daher $G^{\mathfrak{A}}_{i,S}$ durch

$$\left\langle\left\langle\langle c_{j,\tau,\vec{b}}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}}}\right\rangle_{\tau\in\{\langle 0\rangle\}}\right\rangle_{j\in 1} \mapsto H_i^{\mathfrak{A}}\ulcorner\left\{b_0 \in U_{\mathfrak{A}}\,;\ c_{0,\langle 0\rangle,\langle b_0\rangle} = V_{\mathfrak{A}}\right\}\lrcorner$$

Damit gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ (und alle Äquivalenzrelationen S auf m_i):

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}_{i,S}\ulcorner\left\langle\left\langle\langle\tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{\vec{b}}_{\vec{u}\,\triangleleft\,\tau}\ulcorner\alpha_j\lrcorner\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}}\right\rangle_{\tau\in\mathrm{BIF}_i\, j}\right\rangle_{j\in n_i}\lrcorner &= H_i^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\ulcorner\left\{b_0 \in U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\,;\ \tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{\langle b_0\rangle}_{\langle u_0\rangle\,\triangleleft\,\langle 0\rangle}\ulcorner\alpha_0\lrcorner = V_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\right\}\lrcorner \\ &= H_i^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\ulcorner\left\{b_0 \in U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\,;\ \tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{b_0}_{u_0}\ulcorner\alpha_0\lrcorner = V_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}\right\}\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i, \langle u_0\rangle, \langle\alpha_0\rangle\rangle\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle\lrcorner \end{aligned}$$

Fall $i \in I_D$: Es gilt $k_i = 0$, $m_i = 0$, $n_i = 1$, $\mathrm{BIF}_i\, 0 = \{\langle\rangle\}$, $\delta_i = v_2$ und für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\alpha_0 \in L_D$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha_0\rangle\rangle\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\delta_i\frac{\alpha_0}{v_2}\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha_0\lrcorner$$

Wir definieren daher $G^{\mathfrak{A}}_{i,S}$ durch

$$\left\langle\left\langle\langle c_{j,\tau,\vec{b}}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}}}\right\rangle_{\tau\in\{\langle\rangle\}}\right\rangle_{j\in 1} \mapsto c_{0,\langle\rangle,\langle\rangle}$$

Damit gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ (und alle Äquivalenzrelationen S auf m_i):

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}_{i,S}\ulcorner\left\langle\left\langle\langle\tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{\vec{b}}_{\vec{u}\,\triangleleft\,\tau}\ulcorner\alpha_j\lrcorner\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}}\right\rangle_{\tau\in\mathrm{BIF}_i\, j}\right\rangle_{j\in n_i}\lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\,{}^{\langle\rangle}_{\langle\rangle\,\triangleleft\,\langle\rangle}\ulcorner\alpha_0\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\alpha_0\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle\lrcorner \end{aligned}$$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte (a) für alle $i \in \overline{I}_D$ mit $\mathrm{rg}_{\prec_D}\, i \leq n$.

Wir zeigen nun (b) für alle $\varphi \in L_{\leq n}$.

SI: Sei $\varphi \in \mathcal{V}$ und $\vec{w} \in {}^\star\mathcal{V}$ injektiv mit $\mathrm{bind}\,\varphi \cup \mathrm{var}\,\varphi \subseteq \mathrm{im}\,\vec{w}$. Dann gibt es ein $k_{\varphi,\vec{w}} \in \mathrm{len}\,\vec{w}$ mit $\varphi = w_{k_{\varphi,\vec{w}}}$. Es gilt somit $\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_\varphi = \{k_{\varphi,\vec{w}}\}$ und $\mathrm{BF}\,\varphi = \{\langle w_{k_{\varphi,\vec{w}}}\rangle\}$, d.h. $\mathrm{BFV}\ulcorner\varphi, w_{k_{\varphi,\vec{w}}}\lrcorner = \{\langle\rangle\}$. Weiter gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\vec{\gamma} \in {}^\star L_D$ mit $\langle\varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \in \mathrm{SK}$:

$$\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\gamma_{k_{\varphi,\vec{w}}}\lrcorner$$

Wir definieren daher $\tilde{G}^{\mathfrak{A},\vec{w}}_{\varphi,S}$ durch

$$\left\langle\left\langle\langle c_{k,\tau,\vec{b}}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}}\right\rangle_{\tau\in\{\langle\rangle\}}\right\rangle_{k\in\{k_{\varphi,\vec{w}}\}} \mapsto c_{k_{\varphi,\vec{w}},\langle\rangle,\langle\rangle}$$

Damit gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ und alle $\vec{\gamma} \in {}^{\star}L_D$ mit $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w} \rangle \in \mathrm{SK}$ (und alle Äquivalenzrelationen $S \subseteq \mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}} \sqcap \mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}}$):

$$G_{\varphi,S}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}},\vec{w}\ulcorner}\Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}_{\varphi}^{\vec{w}}\,\triangleleft\,\tau}{}^{\ulcorner}\gamma_k{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}}\big\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\varphi,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}_{\varphi}^{\vec{w}}}{}^{\lrcorner} = \tilde{\mathfrak{I}}^{\langle\rangle}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}_{\varphi}^{\vec{w}}\,\triangleleft\,\langle\rangle}{}^{\ulcorner}\gamma_{k_{\varphi,\vec{w}}}{}^{\lrcorner}$$
$$= \tilde{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\gamma_{k_{\varphi,\vec{w}}}{}^{\lrcorner}$$
$$= \tilde{\mathfrak{I}}^{\ulcorner}\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}{}^{\lrcorner}$$

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_{\leq n}$ und $\vec{w} \in {}^{\star}\mathcal{V}$ injektiv mit $\mathrm{bind}\,\varphi \cup \mathrm{var}\,\varphi \subseteq \mathrm{im}\,\vec{w}$. Wir definieren[27]

$$\rho_{\varphi}^{\vec{w}} := \mathrm{VIN}_{\varphi}^{\vec{w}} \triangleleft \vec{u} \in {}^{m_i}(\mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}}) \ .$$

Ist S eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}}$, so setzen wir

$$R_{\varphi,S}^{\vec{w}} := \Big\{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i\,;\ \langle \mathrm{pr}_k\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}}, \mathrm{pr}_l\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}} \rangle \in S\Big\}$$

und

$$T_{\varphi,S}^{\vec{w},j} := S \cap (\mathrm{Bind}_{\alpha_j}^{\vec{w}} \sqcap \mathrm{Bind}_{\alpha_j}^{\vec{w}}) \qquad \text{für } j \in n_i \ .$$

Offenbar sind dann auch $R_{\varphi,S}^{\vec{w}}$ und die $T_{\varphi,S}^{\vec{w},j}$ Äquivalenzrelationen (auf m_i bzw. $\mathrm{Bind}_{\alpha_j}^{\vec{w}}$). Weiter sei für alle $j \in n_i$, $\tau \in \mathrm{BIF}_i\,j$, $k \in \mathrm{Frei}_{\alpha_j}^{\vec{w}}$ und $\sigma \in \mathrm{BFV}^{\ulcorner}\alpha_j, w_k{}^{\lrcorner}$:[28]

$$l_{\varphi,\tau,\sigma,k}^{\vec{w},S} := \max{}^{*}\Big\{l \in \mathrm{len}((\vec{u} \triangleleft \tau) \star \sigma)\,;\ \big\langle \mathrm{pr}_l(\mathrm{VIN}_{\varphi}^{\vec{w}} \triangleleft ((\vec{u} \triangleleft \tau) \star \sigma)), k \big\rangle \in S\Big\} \ .$$

Seien nun $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, $\vec{\gamma} \in {}^{\star}L_D$ mit $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w} \rangle \in \mathrm{SK}$ und

$$S := \Big\{\langle r, s \rangle \in \mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}} \sqcap \mathrm{Bind}_{\varphi}^{\vec{w}}\,;\ \gamma_r = \gamma_s\Big\} \ .$$

Es gilt offenbar

$$\vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} = \vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}_{\varphi}^{\vec{w}} \triangleleft \vec{u} = \vec{\gamma} \triangleleft \rho_{\varphi}^{\vec{w}}$$

und

$$\begin{aligned} R_{\varphi,S}^{\vec{w}} &= \Big\{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i\,;\ \langle \mathrm{pr}_k\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}}, \mathrm{pr}_l\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}} \rangle \in S\Big\} \\ &= \Big\{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i\,;\ \gamma_{\mathrm{pr}_k\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}}} = \gamma_{\mathrm{pr}_l\,\rho_{\varphi}^{\vec{w}}}\Big\} \\ &= \Big\{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i\,;\ \mathrm{pr}_k(\vec{\gamma} \triangleleft \rho_{\varphi}^{\vec{w}}) = \mathrm{pr}_l(\vec{\gamma} \triangleleft \rho_{\varphi}^{\vec{w}})\Big\} \end{aligned}$$

sowie

$$T_{\varphi,S}^{\vec{w},j} = \Big\{\langle r, s \rangle \in \mathrm{Bind}_{\alpha_j}^{\vec{w}} \sqcap \mathrm{Bind}_{\alpha_j}^{\vec{w}}\,;\ \gamma_r = \gamma_s\Big\} \qquad \text{für } j \in n_i \ .$$

[27] Man beachte, dass die Abhängigkeiten der eingeführten Bezeichnungen (wie etwa $\rho_{\varphi}^{\vec{w}}$ und $R_{\varphi,S}^{\vec{w}}$) durch entsprechende Indices explizit angegeben sind. Dies ist eine große Hilfe beim Überprüfen der Wohldefiniertheit der Abbildungen $G_{\varphi,S}^{\mathfrak{A},\vec{w}}$ und $G_{i,S}^{\mathfrak{A}}$.

[28] Auf nichtleeren Mengen entspreche $\max^{*}$ der kanonischen Maximumsfunktion auf den natürlichen Zahlen. Im Falle der leeren Menge sei $\max^{*}\emptyset := 0$.

Da $\mathrm{rg}_{\prec_D} i \leq n$, erhalten wir mit **IV** also

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner \varphi \frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner \langle i, \vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}, \vec{\alpha}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \rangle \lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner \langle i, \vec{\gamma} \lhd \rho^{\vec{w}}_\varphi, \vec{\alpha}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \rangle \lrcorner \\ &= G^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}_{i,R^{\vec{w}}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \lhd \rho^{\vec{w}}_\varphi \lhd \tau} {}^\ulcorner \alpha_j \frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \lrcorner \end{aligned} \tag{B.4}$$

wobei nach SIV

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \lhd \rho^{\vec{w}}_\varphi \lhd \tau} {}^\ulcorner \alpha_j \frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}} \lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I},\vec{w}}_{\alpha_j, T^{\vec{w},j}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle (\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \lhd \rho^{\vec{w}}_\varphi \lhd \tau})^{\vec{d}}_{\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\alpha_j} \lhd \sigma} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner \rangle_{\vec{d} \in {}^{\mathrm{len}\,\sigma} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}} \big\rangle_{\sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \alpha_j, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}} \lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I},\vec{w}}_{\alpha_j, T^{\vec{w},j}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}\star\vec{d}}_{(\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd \vec{u} \lhd \tau)\star(\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd \sigma)} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner \rangle_{\vec{d} \in {}^{\mathrm{len}\,\sigma} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}} \big\rangle_{\sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \alpha_j, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}} \lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_\mathfrak{I},\vec{w}}_{\alpha_j, T^{\vec{w},j}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}\star\vec{d}}_{\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd ((\vec{u} \lhd \tau)\star\sigma)} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner \rangle_{\vec{d} \in {}^{\mathrm{len}\,\sigma} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}} \big\rangle_{\sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \alpha_j, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}} \lrcorner \end{aligned} \tag{B.5}$$

Seien $j \in n_i$, $\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j$, $\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}$, $k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}$, $\sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \alpha_j, w_k \lrcorner$ und $\vec{d} \in {}^{\mathrm{len}\,\sigma} U_{\mathfrak{A}_\mathfrak{I}}$ beliebig. Nach Definition von BF gilt $(\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma \star \langle w_k \rangle \in \mathrm{BF}\, \varphi$, d.h.

$$(\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \varphi, w_k \lrcorner\, .$$

Ist $k \notin \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_\varphi$, d.h. $w_k \notin \mathrm{frei}_D\, \varphi$, so ist also nach Lemma B.6 (iii) $w_k \in (\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma$ und damit

$$\gamma_k \in \mathrm{im}\left(\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd ((\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma)\right) \;,$$

d.h. in diesem Falle existiert das Maximum

$$\begin{aligned} &\max\left\{ l \in \mathrm{len}((\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma)\, ;\; \mathrm{pr}_l(\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd ((\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma)) = \gamma_k \right\} \\ &= \max\left\{ l \in \mathrm{len}((\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma)\, ;\; \left\langle \mathrm{pr}_l(\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd ((\vec{u} \lhd \tau) \star \sigma)), k \right\rangle \in S \right\} \\ &= l^{\vec{w},S}_{\varphi,\tau,\sigma,k} \end{aligned}$$

und

$$\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}\star\vec{d}}_{\vec{\gamma} \lhd \mathrm{VIN}^{\vec{w}}_\varphi \lhd ((\vec{u} \lhd \tau)\star\sigma)} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner = \mathrm{pr}_{l^{\vec{w},S}_{\varphi,\tau,\sigma,k}} \left(\vec{b} \star \vec{d}\right) \;. \tag{B.6}$$

Wir definieren daher $\tilde{G}^{\mathfrak{A},\vec{w}}_{\varphi,S}$ durch

$$\begin{aligned} &\Big\langle \big\langle \langle c_{k,\tau,\vec{b}} \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \varphi, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_\varphi} \mapsto \\ &G^{\mathfrak{A}}_{i,R^{\vec{w}}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{G}^{\mathfrak{A},\vec{w}}_{\alpha_j, T^{\vec{w},j}_{\varphi,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle C^{\vec{w},S,\vec{b},\vec{d}}_{\varphi,\tau,\sigma,k} \rangle_{\vec{d} \in {}^{\mathrm{len}\,\sigma} D_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\sigma \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \alpha_j, w_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}} \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} D_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \lrcorner \end{aligned}$$

wobei

$$C^{\vec{w},S,\vec{b},\vec{d}}_{\varphi,\tau,\sigma,k} := \begin{cases} c_{k,(\vec{u} \lhd \tau)\star\sigma,\vec{b}\star\vec{d}}\,, & \text{falls } k \in \mathrm{Frei}^{\vec{w}}_\varphi \\ \mathrm{pr}_{l^{\vec{w},S}_{\varphi,\tau,\sigma,k}} \left(\vec{b} \star \vec{d}\right) \;, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $\vec{\gamma} \in {}^\star L_D$ mit $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w} \rangle \in \mathrm{SK}$ und

$$S := \left\{ \langle r, s \rangle \in \mathrm{Bind}^{\vec{w}}_\varphi \sqcap \mathrm{Bind}^{\vec{w}}_\varphi\, ;\; \gamma_r = \gamma_s \right\}$$

erhalten wir damit

$$\tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}},\vec{w}}_{\varphi,S}{}^{\ulcorner}\Big\langle\big\langle\langle\tilde{\mathfrak{J}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\varphi}\,\triangleleft\,\tau}{}^{\ulcorner}\gamma_k{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\operatorname{len}\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\varphi,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}}{}^{\lrcorner} \tag{B.7}$$

$$= G^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}_{i,R^{\vec{w}}_{\varphi,S}}{}^{\ulcorner}\Big\langle\big\langle\langle\tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}},\vec{w}}_{\alpha_j,T^{\vec{w},j}_{\varphi,S}}{}^{\ulcorner}\quad(*)\quad{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\operatorname{len}\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\tau\in\mathrm{BIF}_i\,j}\Big\rangle_{j\in n_i}{}^{\lrcorner}\ ,$$

wobei[29]

$$\begin{aligned}(*) &= \Big\langle\big\langle\langle\tilde{\mathfrak{J}}^{\vec{b}\star\vec{d}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\varphi}\,\triangleleft((\vec{u}\,\triangleleft\,\tau)\star\sigma)}{}^{\ulcorner}\gamma_k{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{d}\in{}^{\operatorname{len}\sigma}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\sigma\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\alpha_j,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}\cap\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}}\\
&\quad\cup\Big\langle\big\langle\langle\mathrm{pr}_{l^{\vec{w},S}_{\varphi,\tau,\sigma,k}}\left(\vec{b}\star\vec{d}\right)\rangle_{\vec{d}\in{}^{\operatorname{len}\sigma}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\sigma\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\alpha_j,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}\setminus\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}}\\
&= \Big\langle\big\langle\langle\tilde{\mathfrak{J}}^{\vec{b}\star\vec{d}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\varphi}\,\triangleleft((\vec{u}\,\triangleleft\,\tau)\star\sigma)}{}^{\ulcorner}\gamma_k{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{d}\in{}^{\operatorname{len}\sigma}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\sigma\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\alpha_j,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\alpha_j}}\ .\end{aligned}$$

Mit (B.4), (B.5) und (B.7) folgt also

$$\tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}},\vec{w}}_{\varphi,S}{}^{\ulcorner}\Big\langle\big\langle\langle\tilde{\mathfrak{J}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{\vec{w}}_{\varphi}\,\triangleleft\,\tau}{}^{\ulcorner}\gamma_k{}^{\lrcorner}\rangle_{\vec{b}\in{}^{\operatorname{len}\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}}}\big\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}^{\ulcorner}\varphi,w_k{}^{\lrcorner}}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{w}}_{\varphi}}{}^{\lrcorner} = \tilde{\mathfrak{J}}^{\ulcorner}\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}{}^{\lrcorner}\ .$$

Damit ist (b) für alle $\varphi \in L_{\leq n}$ gezeigt.

IS: Sei jetzt $i \in \overline{I}_D$ mit $\mathrm{rg}_{\prec_D} i = n+1$. Es muss natürlich $i \in I_D$ gelten. Wir setzen

$$w^i := \langle \upsilon_{3k}\rangle_{k\in k_i} \star \langle \upsilon_{3m+1}\rangle_{m\in m_i} \star \langle \upsilon_{3n+2}\rangle_{n\in n_i}\ .$$

Ist S eine Äquivalenzrelation auf m_i, so sei weiter

$$Q_{i,S} := \{\langle k_i + r, k_i + s\rangle\ ;\ \langle r,s\rangle \in S\} \cup \{\langle t,t\rangle\ ;\ t \in k_i\}\ .$$

Offenbar ist $Q_{i,S}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Bind}^{w^i}_{\delta_i} = k_i + m_i$.[30] Schließlich setzen wir für $k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}$ und $\tau \in \mathrm{BFV}^{\ulcorner}\delta_i, w^i_k{}^{\lrcorner}$

$$\rho_{i,\tau} := \mathop{\bigstar}_{r\in\operatorname{len}\tau}(g_{i,\tau}{}^{\ulcorner}r^{\lrcorner}) \quad \text{mit} \quad g_{i,\tau} : \operatorname{len}\tau \to {}^{\star}\!\operatorname{len}\tau,\ r \mapsto \begin{cases}\langle\rangle, & \mathrm{pr}_r(\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau) \in k_i\\ \langle r\rangle, & \text{sonst}\end{cases}$$

sowie

$$l_{i,k} := k - (k_i + m_i)\ .$$

Wegen $\mathrm{frei}_D\,\delta_i \subseteq \{\upsilon_2, \upsilon_5, \dots\}$ muss $k_i + m_i \leq k < k_i + m_i + n_i$, d.h. $l_{i,k} \in n_i$ gelten. Offenbar gilt $w^i_k = \upsilon_{3l_{i,k}+2}$.

Seien nun $\mathfrak{J}$ eine Interpretation, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ und damit

$$S := \{\langle k,l\rangle \in m_i \sqcap m_i\ ;\ u_k = u_l\}$$

und

$$\vec{\gamma} := \vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \star \vec{u} \star \vec{\alpha}\ .$$

[29]Für die zweite Gleichheit beachte man (B.6).

[30]Die Bindungsvariablen von δ_i sind genau die Variablen $\{\upsilon_{3k}\ ;\ k \in k_i\} \cup \{\upsilon_{3m+1}\ ;\ m \in m_i\}$, d.h. die ersten $k_i + m_i$ Komponenten von w^i.

Es gilt dann

$$\begin{aligned}Q_{i,S} &= \{\langle k_i + r, k_i + s\rangle \,;\, \langle r,s\rangle \in S\} \cup \{\langle t,t\rangle \,;\, t \in k_i\} \\ &= \left\{\langle r,s\rangle \in \mathrm{Bind}^{w^i}_{\delta_i} \sqcap \mathrm{Bind}^{w^i}_{\delta_i} \,;\, \gamma_r = \gamma_s\right\}\end{aligned}$$

und damit (wegen $\delta_i \in L_{\leq n}$) nach dem schon gezeigten Teil von (b):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\langle i,\vec{u},\vec{\alpha}\rangle\lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\delta_i(\vec{u},\vec{\alpha})\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner\delta_i\frac{\vec{\gamma}}{w^i}\lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}},w^i}_{\delta_i,Q_{i,S}}\ulcorner\Big\langle\Big\langle\langle\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i}\,\triangleleft\,\tau}\ulcorner\gamma_k\lrcorner\rangle_{\vec{b}\in{}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}}\Big\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}\ulcorner\delta_i,w^i_k\lrcorner}\Big\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}}\lrcorner\,.\end{aligned} \tag{B.8}$$

Seien $k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}$, $\tau \in \mathrm{BFV}\ulcorner\delta_i, w^i_k\lrcorner$ und $\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau}U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}$ beliebig. Ist $r \in \mathrm{len}\,\tau$ mit

$$s := \mathrm{pr}_r(\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau) \in k_i\ ,$$

so gilt

$$\mathrm{pr}_r(\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau) = \gamma_s = \mathfrak{v}_s(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \notin \mathrm{frei}_D\,\alpha_{l_{i,k}}\ .$$

Wegen $\gamma_k = \alpha_{l_{i,k}}$ und dem Koinzidenzlemma folgt also

$$\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i}\,\triangleleft\,\tau}\ulcorner\gamma_k\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}\,\triangleleft\,\rho_{i,\tau}}_{\vec{\gamma}\,\triangleleft\,\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i}\,\triangleleft\,\tau\,\triangleleft\,\rho_{i,\tau}}\ulcorner\alpha_{l_{i,k}}\lrcorner\,. \tag{B.9}$$

Wir zeigen nun

$$\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft \rho_{i,\tau} = \vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}\ulcorner\mathrm{In} \triangleleft \tau\lrcorner\,. \tag{B.10}$$

Da

$$\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft \rho_{i,\tau} = \vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft \mathop{\bigstar}_{r\in\mathrm{len}\,\tau}(g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner) = \mathop{\bigstar}_{r\in\mathrm{len}\,\tau}\Big(\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner\Big)$$

und

$$\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}\ulcorner\mathrm{In} \triangleleft \tau\lrcorner = \vec{u} \triangleleft \mathop{\bigstar}_{r\in\mathrm{len}\,\tau}\mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\tau_r\lrcorner = \mathop{\bigstar}_{r\in\mathrm{len}\,\tau}(\vec{u} \triangleleft \mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\tau_r\lrcorner)\ ,$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner = \vec{u} \triangleleft \mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\tau_r\lrcorner \qquad \text{für alle } r \in \mathrm{len}\,\tau\ .$$

Sei $r \in \mathrm{len}\,\tau$ und $s := \mathrm{pr}_r(\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau) = \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i}\ulcorner\tau_r\lrcorner$, d.h. $\tau_r = w^i_s$.

Fall $s \in k_i$: Es gilt $g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner = \langle\rangle$ und damit $\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner = \langle\rangle$. Weiter gilt

$$\mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\tau_r\lrcorner = \mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,w^i_s\lrcorner = \mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\upsilon_{3s}\lrcorner = \mathrm{del}\ulcorner 3s\lrcorner = \langle\rangle\ ,$$

d.h. auch $\vec{u} \triangleleft \mathrm{del}\ulcorner\mathrm{In}\,\tau_r\lrcorner = \langle\rangle$.

Fall $s \notin k_i$: Es ist $g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner = \langle r\rangle$ und somit

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft g_{i,\tau}\ulcorner r\lrcorner &= \vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft \langle r\rangle \\ &= \vec{\gamma} \triangleleft \langle\mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i}\ulcorner\tau_r\lrcorner\rangle \\ &= \vec{\gamma} \triangleleft \langle s\rangle \\ &= \vec{\gamma} \triangleleft \langle k_i + (s - k_i)\rangle \\ &= \langle u_{s-k_i}\rangle\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit beachte man, dass $k_i \leq s < k_i + m_i$ und damit $s - k_i \in m_i$ (mit $\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, w^i_k \lrcorner$ gilt nämlich $w^i_s = \tau_r \in \mathrm{bind}\,\delta_i$ nach Lemma B.6 (i)). Weiter gilt damit $\tau_r = w^i_s = \upsilon_{3(s-k_i)+1}$ und folglich auch

$$\begin{aligned}\vec{u} \triangleleft \mathrm{del}^\ulcorner \mathrm{In}\,\tau_r \lrcorner &= \vec{u} \triangleleft \mathrm{del}^\ulcorner \mathrm{In}\,\upsilon_{3(s-k_i)+1} \lrcorner \\ &= \vec{u} \triangleleft \mathrm{del}^\ulcorner 3(s-k_i)+1 \lrcorner \\ &= \vec{u} \triangleleft \langle s - k_i \rangle \\ &= \langle u_{s-k_i} \rangle\end{aligned}$$

Es ist also (B.10) gezeigt. Wegen (B.9) erhalten wir folglich

$$\tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b} \triangleleft \rho_{i,\tau}}_{\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau \triangleleft \rho_{i,\tau}} {}^\ulcorner \alpha_{l_{i,k}} \lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b} \triangleleft \rho_{i,\tau}}_{\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau \lrcorner} {}^\ulcorner \alpha_{l_{i,k}} \lrcorner\,. \tag{B.11}$$

Wir definieren daher $G^{\mathfrak{A}}_{i,S}$ durch:

$$\Big\langle \big\langle \langle c_{j,\tau,\vec{b}} \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \mapsto \tilde{G}^{\mathfrak{A}, w^i}_{\delta_i, Q_{i,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle c_{l_{i,k}, \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau \lrcorner, \vec{b} \triangleleft \rho_{i,\tau}} \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, w^i_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}} \lrcorner$$

Hierbei beachte man: Für alle $k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}$ und $\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, w^i_k \lrcorner = \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, \upsilon_{3l_{i,k}+2} \lrcorner$ gilt

$$\tau \star \langle \upsilon_{3l_{i,k}+2} \rangle \in \mathrm{BF}\,\delta_i = \mathrm{BF}_i\,\delta_i$$

und somit

$$\mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau \lrcorner \in \mathrm{BIF}_i\, l_{i,k}$$

nach Definition von BIF_i. Weiter ergibt sich

$$\mathrm{len}(\vec{b} \triangleleft \rho_{i,\tau}) = \mathrm{len}\,\rho_{i,\tau} = \mathrm{len}\,\mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau \lrcorner \qquad \text{für alle } \vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}$$

leicht aus (B.10).

Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, $\vec{u} \in {}^{m_i}\mathcal{V}$, $\vec{\alpha} \in {}^{n_i}L_D$ und $S := \{\langle k, l \rangle \in m_i \sqcap m_i\,;\ u_k = u_l\}$ erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
&G^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}_{i,S} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{u} \triangleleft \tau} {}^\ulcorner \alpha_j \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BIF}_i\, j} \Big\rangle_{j \in n_i} \lrcorner \\
&= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}, w^i}_{\delta_i, Q_{i,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b} \triangleleft \rho_{i,\tau}}_{\vec{u} \triangleleft \mathrm{Del}^\ulcorner \mathrm{In} \triangleleft \tau \lrcorner} {}^\ulcorner \alpha_{l_{i,k}} \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, w^i_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}} \lrcorner \\
&= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}, w^i}_{\delta_i, Q_{i,S}} {}^\ulcorner \Big\langle \big\langle \langle \tilde{\mathfrak{I}}^{\vec{b}}_{\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{w^i}_{\delta_i} \triangleleft \tau} {}^\ulcorner \gamma_k \lrcorner \rangle_{\vec{b} \in {}^{\mathrm{len}\,\tau} U_{\mathfrak{A}}} \big\rangle_{\tau \in \mathrm{BFV}^\ulcorner \delta_i, w^i_k \lrcorner} \Big\rangle_{k \in \mathrm{Frei}^{w^i}_{\delta_i}} \lrcorner && \text{gemäß (B.11)} \\
&= \tilde{\mathfrak{I}}^\ulcorner \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \lrcorner && \text{gemäß (B.8)}
\end{aligned}$$

■

* * *

Kommen wir nun endlich wieder auf den Nachweis von (v) für $=_S$ zurück.

Sei $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_D$ mit $i \in I_D$ und sei $\vec{w} \in {}^{k_i}\mathcal{V}$ injektiv mit $w_j \notin \mathrm{frei}(\vec{u}\ \vec{\alpha})$ für alle $j \in \mathrm{len}\,\vec{w}$. Wir setzen

$$\vec{\beta} := \vec{w} \star \vec{u} \star \vec{\alpha} \qquad \text{und} \qquad \vec{\gamma} := \vec{\mathfrak{v}}_\varphi(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \star \vec{u} \star \vec{\alpha}$$

sowie

$$\vec{x} := \langle v_{3k}\rangle_{k\in k_i} \star \langle v_{3m+1}\rangle_{m\in m_i} \star \langle v_{3n+2}\rangle_{n\in n_i} \ .$$

Da $\mathrm{Bind}^{\vec{x}}_{\delta_i} = k_i + m_i$ und da die Variablen in $\vec{w}$ paarweise verschieden und verschieden von allen Variablen in $\vec{u}$ sind, ist

$$\begin{aligned} S &:= \left\{\langle s,t\rangle \in \mathrm{Bind}^{\vec{x}}_{\delta_i} \sqcap \mathrm{Bind}^{\vec{x}}_{\delta_i} \ ; \ \beta_s = \beta_t\right\} \\ &= \{\langle s,s\rangle \ ; \ s \in k_i + m_i\} \cup \{\langle k_i+s, k_i+t\rangle \ ; \ s,t \in m_i, \ u_s = u_t\} \\ &= \left\{\langle s,t\rangle \in \mathrm{Bind}^{\vec{x}}_{\delta_i} \sqcap \mathrm{Bind}^{\vec{x}}_{\delta_i} \ ; \ \gamma_s = \gamma_t\right\} \end{aligned}$$

Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt nun mit dem gerade bewiesenen Satz B.7 (ii)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \delta_i \frac{\vec{w} \ \ \vec{u} \ \ \vec{\alpha}}{v_0 \ v_1 \ v_2}\lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \delta_i \frac{\vec{\beta}}{\vec{x}}\lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}},\vec{x}\ulcorner}_{\delta_i,S}\left\langle\left\langle\langle \tilde{\mathfrak{I}}\frac{\vec{b}}{\vec{\beta} \triangleleft \mathrm{VIN}^{\vec{x}}_{\delta_i} \triangleleft \tau}\ulcorner\beta_k\lrcorner\rangle_{\vec{b}\in^{\mathrm{len}\,\tau}D_{\mathfrak{I}}}\right\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}\ulcorner\delta_i,x_k\lrcorner}\right\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{x}}_{\delta_i}}\lrcorner \\ &= \tilde{G}^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}},\vec{x}\ulcorner}_{\delta_i,S}\left\langle\left\langle\langle \tilde{\mathfrak{I}}\frac{\vec{b}}{\vec{\gamma} \triangleleft \mathrm{VIN}^{\vec{x}}_{\delta_i} \triangleleft \tau}\ulcorner\gamma_k\lrcorner\rangle_{\vec{b}\in^{\mathrm{len}\,\tau}D_{\mathfrak{I}}}\right\rangle_{\tau\in\mathrm{BFV}\ulcorner\delta_i,x_k\lrcorner}\right\rangle_{k\in\mathrm{Frei}^{\vec{x}}_{\delta_i}}\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \delta_i \frac{\vec{\gamma}}{\vec{x}}\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \delta_i \frac{\mathfrak{v}_\varphi(\vec{u}\ \vec{\alpha}) \ \ \vec{u} \ \ \vec{\alpha}}{v_0 \qquad\quad v_1 \ v_2}\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \delta_i(\vec{u},\vec{\alpha})\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner R_D\langle i,\vec{u},\vec{\alpha}\rangle\lrcorner \\ &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner \langle i,\vec{u},\vec{\alpha}\rangle\lrcorner \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichheit verwende man das Koinzidenzlemma und beachte, dass

$$\mathrm{Frei}^{\vec{x}}_{\delta_i} = (k_i + m_i + n_i) \setminus (k_i + m_i) \ ,$$

d.h. für alle $k \in \mathrm{Frei}^{\vec{x}}_{\delta_i}$ gilt $\beta_k = \gamma_k$ sowie $\beta_j, \gamma_j \notin \mathrm{frei}_D\,\beta_k = \mathrm{frei}_D\,\gamma_k$ für alle $j \in k_i$.

B.3. Wohldefiniertheit der Reduktionsfunktion (ursprünglicher Beweis)

Den hier angegebenen deutlich längeren Beweis von Satz 3.1 habe ich zuerst gefunden. Mit dem Beweis aus Unterabschnitt B.1 ist er im Grunde überflüssig geworden. Da er aber ein tragender Bestandteil der eingereichten Diplomarbeit war und er eigentlich auch recht schön ist, soll er trotzdem auch hier wiedergegeben werden.

Anders als in Unterabschnitt B.1 liegt diesem Beweis keine „Rang-Funktion“ $L_D \to \omega$, sondern eine „Rang-Funktion“ $L_D \to \omega^{\omega^\omega}$ zugrunde.

* * *

Zunächst sind ein paar allgemeine Vorüberlegungen notwendig.

Sei $\alpha \in \mathrm{ON}$. Wir wollen die Menge

$$^{[\alpha]}\mathbb{N} := \{\tau \in {}^{\alpha}\mathbb{N}\,;\ \tau \text{ fast überall } 0\} = \left\{\tau \in {}^{\alpha}\mathbb{N}\,;\ \tau\lfloor\mathbb{N}^\times\rceil \text{ endlich}\right\}$$

aller α-Tupel in $\mathbb{N}$ mit endlichem Support untersuchen. Auf $^{[\alpha]}\mathbb{N}$ ist durch die komponentenweise Addition eine kommutative und assoziative Addition $+_\alpha$ erklärt. Setzen wir

$$0_\alpha := \langle 0\rangle_{\beta\in\alpha} \ ,$$

so ist damit $\left\langle {}^{[\alpha]}\mathbb{N}, +_\alpha, 0_\alpha\right\rangle$ ein kommutativer Monoid. Für $\tau, \sigma \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ sei

$$\tau \prec_\alpha \sigma \quad \text{gdw.} \quad \tau \neq \sigma \text{ und } \mathrm{pr}_{\gamma_{\tau,\sigma}}\,\tau < \mathrm{pr}_{\gamma_{\tau,\sigma}}\,\sigma \ ,$$

wobei $\gamma_{\tau,\sigma} := \max\left\{\gamma \in \alpha\,;\ \mathrm{pr}_\gamma\,\tau \neq \mathrm{pr}_\gamma\,\sigma\right\}$.

B.8 Lemma

$\prec_\alpha$ ist eine strikte Totalordnung (d.h. eine transitive Trichotomie) auf $^{[\alpha]}\mathbb{N}$.

Beweis:
Die Trichotomie folgt unmittelbar aus der Definition. Gelte nun $\tau \prec_\alpha \sigma$ und $\sigma \prec_\alpha \rho$.
Fall $\gamma_{\tau,\sigma} \geq \gamma_{\sigma,\rho}$: Es ist dann $\mathrm{pr}_\gamma\,\tau = \mathrm{pr}_\gamma\,\sigma = \mathrm{pr}_\gamma\,\rho$ für alle $\gamma \in \alpha$ mit $\gamma > \gamma_{\tau,\sigma}$ und außerdem $\mathrm{pr}_{\gamma_{\tau,\sigma}}\,\tau < \mathrm{pr}_{\gamma_{\tau,\sigma}}\,\sigma \leq \mathrm{pr}_{\gamma_{\tau,\sigma}}\,\rho$, d.h. $\tau \prec_\alpha \rho$.
Fall $\gamma_{\tau,\sigma} < \gamma_{\sigma,\rho}$: Hier ist $\mathrm{pr}_\gamma\,\tau = \mathrm{pr}_\gamma\,\sigma = \mathrm{pr}_\gamma\,\rho$ für alle $\gamma \in \alpha$ mit $\gamma > \gamma_{\sigma,\rho}$ und $\mathrm{pr}_{\gamma_{\sigma,\rho}}\,\tau = \mathrm{pr}_{\gamma_{\sigma,\rho}}\,\sigma < \mathrm{pr}_{\gamma_{\sigma,\rho}}\,\rho$, d.h. $\tau \prec_\alpha \rho$.
Somit ist $\prec_\alpha$ auch transitiv. ■

Wir setzen[31]

$$\deg : {}^{[\alpha]}\mathbb{N} \setminus 0_\alpha \to \alpha,\ \ \tau \mapsto \max\left\{\gamma \in \alpha\,;\ \mathrm{pr}_\gamma\,\tau \neq 0\right\}$$

und

$$\mathrm{lc} : {}^{[\alpha]}\mathbb{N} \setminus 0_\alpha \to \mathbb{N}^\times,\ \ \tau \mapsto \mathrm{pr}_{\deg\tau}\,\tau \ .$$

[31] Im Falle $\alpha = \omega = \mathbb{N}$ lässt sich $^{[\alpha]}\mathbb{N}$ als die Menge aller Polynome mit einer Variablen und Koeffizienten in $\mathbb{N}$ auffassen. Durch die beiden Abbildungen deg und lc wird einem Polynom dann gerade der Grad bzw. der Leitkoeffizient zugeordnet.

B.9 Lemma

Seien $\tau, \sigma \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N} \setminus 0_\alpha$. Ist $\deg \tau < \deg \sigma$, so gilt $\tau \prec_\alpha \sigma$. Umgekehrt folgt aus $\tau \prec_\alpha \sigma$ aber nur $\deg \tau \leq \deg \sigma$.[32]

Beweis:
(i) Gelte $\deg \tau < \deg \sigma$. Für $\gamma \in \alpha$ mit $\gamma > \deg \sigma$ gilt dann $\mathrm{pr}_\gamma \tau = 0 = \mathrm{pr}_\gamma \sigma$. Da $\mathrm{pr}_{\deg \sigma} \tau = 0 < \mathrm{lc}\, \sigma = \mathrm{pr}_{\deg \sigma} \sigma$, ist also $\gamma_{\tau,\sigma} = \deg \sigma$ und $\tau \prec_\alpha \sigma$.
(ii) Kontraposition: Gelte $\deg \tau > \deg \sigma$. Mit (i) folgt $\sigma \prec_\alpha \tau$. Wegen der Trichotomie von $\prec_\alpha$ gilt also $\tau \not\prec_\alpha \sigma$. ∎

B.10 Lemma

Die Ordnung $\prec_\alpha$ ist sogar eine Wohlordnung.[33]

Beweis: Zu zeigen bleibt die Wohlfundiertheit. Sei dazu $\mathcal{M} \subseteq {}^{\mathbb{N}}({}^{[\alpha]}\mathbb{N})$ die Menge aller unendlich $\prec_\alpha$-absteigenden Folgen in ${}^{[\alpha]}\mathbb{N}$. Angenommen $\mathcal{M} \neq \emptyset$. (Beachte im Folgenden, dass 0_α nie als Glied einer absteigenden Folge vorkommen kann, da 0_α minimal ist in ganz ${}^{[\alpha]}\mathbb{N}$. Somit ist deg für alle Glieder der Folgen aus $\mathcal{M}$ definiert.) Dann ist

$$\mathcal{M}_0 := \{a \in \mathcal{M}\,;\; \deg a_0 = \min\{\deg b_0\,;\; b \in \mathcal{M}\}\} \neq \emptyset$$

und damit

$$\mathcal{M}_1 := \{a \in \mathcal{M}_0\,;\; \mathrm{lc}\, a_0 = \min\{\mathrm{lc}\, b_0\,;\; b \in \mathcal{M}_1\}\} \neq \emptyset\ .$$

Sei nun $a \in \mathcal{M}_1$. Nach Lemma B.9 ist $\langle \deg a_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Angenommen es gäbe ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\deg a_{i_0} < \deg a_0$. Mit $b := \langle a_{i_0+i} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ hätten wir dann ein Element von $\mathcal{M}$ mit kleinerem „Anfangsgrad“ $\deg b_0 = \deg a_{i_0} < \deg a_0$ im Widerspruch zur Wahl von a. Also ist $\langle \deg a_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ konstant.

Natürlich ist somit auch $\langle \mathrm{lc}\, a_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Gäbe es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{lc}\, a_{i_0} < \mathrm{lc}\, a_0$, so hätten wir mit $b := \langle a_{i_0+i} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ ein Element von $\mathcal{M}_1$ mit kleinerem „Anfangsleitkoeffizient“ $\mathrm{lc}\, b_0 = \mathrm{lc}\, a_{i_0} < \mathrm{lc}\, a_0$, im Widerspruch zur Wahl von a. Also ist auch $\langle \mathrm{lc}\, a_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ konstant.

Offenbar ist also $\gamma_{a_i,a_j} < \deg a_0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Dies bedeutet aber, dass durch

$$b_i := \left\langle \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta \geq \deg a_0 \\ \mathrm{pr}_\beta\, a_i, & \text{sonst} \end{cases} \right\rangle_{\beta \in \alpha}$$

für $i \in \mathbb{N}$ ein Element $b = \langle b_i \rangle_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ mit $\deg b_0 < \deg a_0$ gegeben ist, im Widerspruch zur Wahl von a. Es muss also $\mathcal{M} = \emptyset$ gelten, d.h. $\prec_\alpha$ ist wohlfundiert. ∎

B.11 Lemma

Seien $\sigma, \sigma' \tau, \tau' \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ mit ($\sigma \prec_\alpha \sigma'$ oder $\sigma = \sigma'$) und $\tau \prec_\alpha \tau'$. Dann gilt auch

$$\sigma +_\alpha \tau \prec_\alpha \sigma' +_\alpha \tau'$$

Beweis:
Sei

$$\gamma_0 := \begin{cases} \max\{\gamma_{\sigma,\sigma'}, \gamma_{\tau,\tau'}\}, & \text{falls } \sigma \prec_\alpha \sigma' \\ \gamma_{\tau,\tau'}, & \text{falls } \sigma = \sigma' \end{cases}$$

[32] Für $\alpha = 2$ sind etwa $\langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ mit $\langle 0,1 \rangle \prec_\alpha \langle 1,1 \rangle$ aber $\deg \langle 0,1 \rangle = 1 = \deg \langle 1,1 \rangle$.
[33] ${}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ entspricht gerade der Ordinalzahlpotenz $\mathbb{N}^\alpha = \omega^\alpha$, d.h. es gilt $\langle {}^{[\alpha]}\mathbb{N}, \prec_\alpha \rangle \cong \langle \omega^\alpha, \in \rangle$.

Es gilt dann

$$\operatorname{pr}_\gamma(\sigma +_\alpha \tau) = \operatorname{pr}_\gamma \sigma + \operatorname{pr}_\gamma \tau = \operatorname{pr}_\gamma \sigma' + \operatorname{pr}_\gamma \tau' = \operatorname{pr}_\gamma(\sigma' +_\alpha \tau')$$

für alle $\gamma \in \alpha$ mit $\gamma > \gamma_0$ und

$$\operatorname{pr}_{\gamma_0}(\sigma +_\alpha \tau) = \operatorname{pr}_{\gamma_0} \sigma + \operatorname{pr}_{\gamma_0} \tau < \operatorname{pr}_{\gamma_0} \sigma' + \operatorname{pr}_{\gamma_0} \tau' = \operatorname{pr}_{\gamma_0}(\sigma' +_\alpha \tau') \ ,$$

d.h. $\sigma +_\alpha \tau \prec_\alpha \sigma' +_\alpha \tau'$. ■

Ist $f : \alpha \to \alpha$ strikt wachsend (und damit insbesondere injektiv) und $\tau \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$, so sei $\tau/_f \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ gegeben durch

$$\beta \mapsto \begin{cases} \operatorname{pr}_\gamma \tau, & \text{falls } \beta = f^\ulcorner \gamma_\lrcorner \text{ für ein } \gamma \in \alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Es gilt dann offenbar $\tau/_f \lhd f = \tau$.

B.12 Lemma

Sei $f : \alpha \to \alpha$ strikt wachsend. Für $\sigma, \tau \in {}^{[\alpha]}\mathbb{N}$ mit $\sigma \prec_\alpha \tau$ gilt dann auch $\sigma/_f \prec_\alpha \tau/_f$.

Beweis:
Wir setzen $\gamma_0 := f^\ulcorner \gamma_{\sigma,\tau\lrcorner}$.
Sei $\gamma \in \alpha$ mit $\gamma > \gamma_0$ beliebig. Ist $\gamma \notin \operatorname{im} f$, so gilt

$$\operatorname{pr}_\gamma(\sigma/_f) = 0 = \operatorname{pr}_\gamma(\tau/_f) \ .$$

Andernfalls gibt es ein $\beta \in \alpha$ mit $\gamma = f^\ulcorner \beta_\lrcorner$. Es muss dann natürlich $\beta > \gamma_{\sigma,\tau}$ gelten (ansonsten wäre $\gamma = f^\ulcorner \beta_\lrcorner \leq f^\ulcorner \gamma_{\sigma,\tau\lrcorner} = \gamma_0$ wegen der Monotonie von f). Also gilt auch hier

$$\operatorname{pr}_\gamma(\sigma/_f) = \operatorname{pr}_\beta \sigma = \operatorname{pr}_\beta \tau = \operatorname{pr}_\gamma(\tau/_f) \ .$$

Da $\operatorname{pr}_{\gamma_0}(\sigma/_f) = \operatorname{pr}_{\gamma_{\sigma,\tau}} \sigma < \operatorname{pr}_{\gamma_{\sigma,\tau}} \tau = \operatorname{pr}_{\gamma_0}(\tau/_f)$, ist also $\gamma_{(\sigma/_f),(\tau/_f)} = \gamma_0$ und $\sigma/_f \prec_\alpha \tau/_f$. ■

Für den Rest des Abschnitts sei $\langle M, \prec\rangle$ wohlfundiert.

Mithilfe des Kronecker-Deltas[34] $\delta_{i,j}$ definieren wir die „Rang-Zähl-Funktion“

$$\mathrm{RZ}_\prec : {}^\star M \to {}^{[\operatorname{ord}_\prec]}\mathbb{N}$$

durch

$$\vec{m} \mapsto \Big\langle \sum_{k \in \operatorname{len} \vec{m}} \delta_{\beta, \operatorname{rg}_\prec m_k} \Big\rangle_{\beta \in \operatorname{ord}_\prec} .$$

B.13 Lemma

Durch

$$\vec{m} \prec_\star \vec{n} \quad \textit{gdw.} \quad \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} \prec_{\operatorname{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n}$$

ist eine wohlfundierte Relation auf ${}^\star M$ erklärt mit

$$\operatorname{rg}_{\prec_\star} = \operatorname{rg}_{\prec_{\operatorname{ord}_\prec}} \lhd \mathrm{RZ}_\prec \ .$$

[34] D.h. $\delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Beweis: Wegen Lemma A.3 (i), reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{RZ}_\prec$ surjektiv ist. Da $\mathrm{rg}_\prec : M \to \mathrm{ord}_\prec$ surjektiv ist, existiert ein $f : \mathrm{ord}_\prec \to M$ mit $\mathrm{rg}_\prec \triangleleft f = \mathrm{id}_{\mathrm{ord}_\prec}$. Sei nun $\tau \in {}^{[\mathrm{ord}_\prec]}\mathbb{N}$ beliebig und $\vec{\alpha} \in {}^\star\mathrm{ord}_\prec$ injektiv mit $\mathrm{im}\,\vec{\alpha} = \{\beta \in \mathrm{ord}_\prec\,;\ \mathrm{pr}_\beta\,\tau \neq 0\}$. Für

$$\vec{m} := \bigstar_{i \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \left(\left\langle f^\ulcorner \alpha_i {}_\lrcorner \right\rangle_{k \in \mathrm{pr}_{\alpha_i}\tau} \right)$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{RZ}_\prec \vec{m} &= \Big\langle \sum_{k \in \mathrm{len}\,\vec{m}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec m_k} \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \Big\langle \sum_{i \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \Big(\sum_{k \in \mathrm{pr}_{\alpha_i}\tau} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec f^\ulcorner \alpha_i {}_\lrcorner} \Big) \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \Big\langle \sum_{i \in \mathrm{len}\,\vec{\alpha}} \mathrm{pr}_{\alpha_i}\tau \cdot \delta_{\beta, \alpha_i} \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \big\langle \mathrm{pr}_\beta\,\tau \big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \tau
\end{aligned}$$

■

B.14 Lemma

(i) *Für* $\vec{m} \in {}^\star M \setminus \langle\rangle$ *gilt*

$$\deg \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} = \max\{\mathrm{rg}_\prec x\,;\ x \in \mathrm{im}\,\vec{m}\}$$

(ii) *Für* $\vec{m}, \vec{n} \in {}^\star M$ *gilt*

$$\mathrm{RZ}_\prec {}^\ulcorner \vec{m} \star \vec{n} {}_\lrcorner \;=\; \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n} \;=\; \mathrm{RZ}_\prec {}^\ulcorner \vec{n} \star \vec{m} {}_\lrcorner$$

(iii) *Sind* $\vec{m}, \vec{n}, \vec{a}, \vec{b} \in {}^\star M$ *mit* ($\vec{m} \prec_\star \vec{a}$ *oder* $\vec{m} = \vec{a}$) *und* $\vec{n} \prec_\star \vec{b}$, *so gilt auch*

$$\vec{m} \star \vec{n} \prec_\star \vec{a} \star \vec{b} \qquad \textit{und} \qquad \vec{n} \star \vec{m} \prec_\star \vec{b} \star \vec{a}$$

(iv) *Seien* $\vec{m}, \vec{n} \in {}^\star M$, $\vec{n} \neq \langle\rangle$ *sodass für alle* $x \in \mathrm{im}\,\vec{m}$ *ein* $y \in \mathrm{im}\,\vec{n}$ *existiert mit* $\mathrm{rg}_\prec x < \mathrm{rg}_\prec y$. *Dann gilt* $\vec{m} \prec_\star \vec{n}$.

Beweis:
(i) Da $\vec{m} \neq \langle\rangle$, ist $\mathrm{RZ}_\prec \vec{m} \neq 0_{\mathrm{ord}_\prec}$. Für beliebiges $\beta \in \mathrm{ord}_\prec$ gilt

$$0 \neq \mathrm{pr}_\beta \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} = \sum_{k \in \mathrm{len}\,\vec{m}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec m_k} \quad \text{gdw.} \quad \text{es existiert ein } x \in \mathrm{im}\,\vec{m} \text{ mit } \beta = \mathrm{rg}_\prec x$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\deg \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} &= \max\{\beta \in \mathrm{ord}_\prec\,;\ \mathrm{pr}_\beta \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} \neq 0\} \\
&= \max\{\beta \in \mathrm{ord}_\prec\,;\ \exists x \in \mathrm{im}\,\vec{m} \text{ mit } \beta = \mathrm{rg}_\prec x\} \\
&= \max\{\mathrm{rg}_\prec x\,;\ x \in \mathrm{im}\,\vec{m}\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \vec{m} \star \vec{n} \lrcorner &= \Big\langle \sum_{k \in \operatorname{len} \vec{m}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec m_k} + \sum_{l \in \operatorname{len} \vec{n}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec n_l} \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \Big\langle \sum_{k \in \operatorname{len} \vec{m}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec m_k} \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} +_{\mathrm{ord}_\prec} \Big\langle \sum_{l \in \operatorname{len} \vec{n}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_\prec n_l} \Big\rangle_{\beta \in \mathrm{ord}_\prec} \\
&= \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n}
\end{aligned}$$

Die zweite zu zeigende Gleichheit folgt mit der Kommutativität von $+_{\mathrm{ord}_\prec}$.

(iii) Nach Voraussetzung gilt ($\mathrm{RZ}_\prec \vec{m} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a}$ oder $\mathrm{RZ}_\prec \vec{m} = \mathrm{RZ}_\prec \vec{a}$) und $\mathrm{RZ}_\prec \vec{n} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b}$. Mit (ii) und Lemma B.11 gilt also

$$\mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \vec{m} \star \vec{n} \lrcorner = \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a} +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b} = \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \vec{a} \star \vec{b} \lrcorner \,,$$

d.h. $\vec{m} \star \vec{n} \prec_\star \vec{a} \star \vec{b}$. Die zweite Aussage folgt mit (ii).

(iv) Der Fall $\vec{m} = \langle\rangle$ gilt trivialerweise: $\mathrm{RZ}_\prec \langle\rangle = 0_{\mathrm{ord}_\prec} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n} \neq 0_{\mathrm{ord}_\prec}$. Sei also zusätzlich $\vec{m} \neq \langle\rangle$ angenommen. Gemäß (i) gibt es ein $x \in \operatorname{im} \vec{m}$ mit $\deg \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} = \mathrm{rg}_\prec x$. Weiter existiert nach Voraussetzung ein $y \in \operatorname{im} \vec{n}$ mit $\mathrm{rg}_\prec x < \mathrm{rg}_\prec y$. Damit folgt

$$\deg \mathrm{RZ}_\prec \vec{m} = \mathrm{rg}_\prec x < \mathrm{rg}_\prec y \leq \max \{\mathrm{rg}_\prec z\,;\; z \in \operatorname{im} \vec{n}\} = \deg \mathrm{RZ}_\prec \vec{n} \;.$$

Mit Lemma B.9 ist daher $\mathrm{RZ}_\prec \vec{m} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{n}$, d.h. $\vec{m} \prec_\star \vec{n}$. ■

B.15 Lemma

Sei $m \in M$. Wir definieren $T_m \subseteq \mathrm{ord}_{\prec_\star} \sqcap \mathrm{ord}_{\prec_\star}$ durch

$$\langle \beta, \beta' \rangle \in T_m \quad \text{gdw.} \quad \text{es existiert ein } \vec{a} \in {}^\star M \text{ mit } \beta = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \vec{a} \text{ und } \beta' = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m \rangle \star \vec{a} \lrcorner \;.$$

Dann ist T_m eine strikt wachsende Abbildung auf $\mathrm{ord}_{\prec_\star}$.

Beweis:
Offenbar ist $\operatorname{def} T_m = \mathrm{ord}_{\prec_\star}$.

Eindeutigkeit: Sei $\beta \in \mathrm{ord}_{\prec_\star}$ beliebig und $\vec{a}, \vec{b} \in {}^\star M$ mit

$$\mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a} = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \vec{a} = \beta = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \vec{b} = \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b}$$

Nach Lemma B.10 ist $\prec_{\mathrm{ord}_\prec}$ eine Wohlordnung. Damit ist $\mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}}$ ein Isomorphismus, d.h. insbesondere injektiv. Es folgt somit

$$\mathrm{RZ}_\prec \vec{a} = \mathrm{RZ}_\prec \vec{b}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m \rangle \star \vec{a} \lrcorner &= \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m \rangle \star \vec{a} \lrcorner \\
&= \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \ulcorner \mathrm{RZ}_\prec \langle m \rangle +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a} \lrcorner && \text{Lemma B.14 (ii)} \\
&= \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \ulcorner \mathrm{RZ}_\prec \langle m \rangle +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b} \lrcorner \\
&= \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m \rangle \star \vec{b} \lrcorner && \text{Lemma B.14 (ii)} \\
&= \mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m \rangle \star \vec{b} \lrcorner
\end{aligned}$$

Strikte Monotonie: Gelte nun für $\vec{a}, \vec{b} \in {}^\star M$

$$\mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a} = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \vec{a} < \mathrm{rg}_{\prec_\star} \vec{b} = \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b}\,,$$

d.h. wieder wegen der Isomorphie $\mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}}$

$$\mathrm{RZ}_\prec \vec{a} \prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{a} \lrcorner &= \mathrm{RZ}_\prec \langle m\rangle +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{a} && \text{Lemma B.14 (ii)}\\
&\prec_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \langle m\rangle +_{\mathrm{ord}_\prec} \mathrm{RZ}_\prec \vec{b} && \text{Lemma B.11}\\
&= \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{b} \lrcorner && \text{Lemma B.14 (ii)}
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{a} \lrcorner = \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{a} \lrcorner = \mathrm{rg}_{\prec_{\mathrm{ord}_\prec}} \mathrm{RZ}_\prec \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{b} \lrcorner = \mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m\rangle \star \vec{b} \lrcorner\,.$$

■

B.16 Lemma

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in {}^\star({}^\star M)$ mit $\vec{a}\,(\prec_\star)_\star\,\vec{b}$ und $m \in M$. Dann ist auch

$$\langle \langle m\rangle \star a_k\rangle_{k\in \mathrm{len}\,\vec{a}}\ (\prec_\star)_\star\ \langle \langle m\rangle \star b_l\rangle_{l\in \mathrm{len}\,\vec{b}}\,.$$

Beweis:

Wir zeigen zuerst, dass

$$(*) \qquad \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \langle \langle m\rangle \star c_i\rangle_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \lrcorner = \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \vec{c} \lrcorner / T_m \qquad \text{für alle } \vec{c} \in {}^\star({}^\star M)$$

Für $\beta \in \mathrm{ord}_{\prec_\star}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_{T_m \ulcorner \beta \lrcorner} (\mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \vec{c} \lrcorner / T_m) &= \mathrm{pr}_\beta \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \vec{c} && \text{Definition von } \tau/_f\\
&= \sum_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \delta_{\beta, \mathrm{rg}_{\prec_\star} c_i}\\
&= \sum_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \delta_{T_m\ulcorner \beta \lrcorner, T_m \ulcorner \mathrm{rg}_{\prec_\star} c_i \lrcorner} && \text{da } T_m \text{ injektiv}\\
&= \sum_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \delta_{T_m\ulcorner \beta \lrcorner, \mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m\rangle \star c_i \lrcorner} && \text{Definition von } T_m\\
&= \mathrm{pr}_{T_m \ulcorner \beta \lrcorner} \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \langle \langle m\rangle \star c_i\rangle_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \lrcorner
\end{aligned}$$

und für $\gamma \in \mathrm{ord}_{\prec_\star} \setminus \mathrm{im}\, T_m$

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_\gamma (\mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \vec{c} \lrcorner / T_m) &= 0\\
&= \sum_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \delta_{\gamma, \mathrm{rg}_{\prec_\star} \ulcorner \langle m\rangle \star c_i \lrcorner} && \text{da } \gamma \notin \mathrm{im}\, T_m\\
&= \mathrm{pr}_\gamma \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \langle \langle m\rangle \star c_i\rangle_{i\in \mathrm{len}\,\vec{c}} \lrcorner
\end{aligned}$$

Also ist $(*)$ gezeigt. Da nach Voraussetzung

$$\mathrm{RZ}_{\prec_\star} \vec{a} \prec_{\mathrm{ord}_{\prec_\star}} \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \vec{b}\ ,$$

ist somit wegen $(*)$ und Lemma B.12

$$\mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \langle \langle m \rangle \star a_k \rangle_{k \in \operatorname{len} \vec{a}} \lrcorner = \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \vec{a} \lrcorner / T_m \prec_{\mathrm{ord}_{\prec_\star}} \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \vec{b} \lrcorner / T_m = \mathrm{RZ}_{\prec_\star} \ulcorner \langle \langle m \rangle \star b_l \rangle_{l \in \operatorname{len} \vec{b}} \lrcorner$$

d.h.

$$\langle \langle m \rangle \star a_k \rangle_{k \in \operatorname{len} \vec{a}} \, (\prec_\star)_\star \, \langle \langle m \rangle \star b_l \rangle_{l \in \operatorname{len} \vec{b}}\ .$$

■

* * *

Sei $\underline{\leftsquigarrow}_D \subseteq L_D \sqcap L_D$ die kleinste Relation mit

(i)
$$\varphi \,\underline{\leftsquigarrow}_D\, \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L_D$$

(ii)
$$\langle i, \vec{u}, \vec{\beta} \rangle \,\underline{\leftsquigarrow}_D\, \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle$$

für alle $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle, \langle i, \vec{u}, \vec{\beta} \rangle \in L_D$ mit $\operatorname{len} \vec{\alpha} = \operatorname{len} \vec{\beta}$ und $\beta_k \,\underline{\leftsquigarrow}_D\, \alpha_k$ für alle $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$

(iii)
$$\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) \,\underline{\leftsquigarrow}_D\, \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \qquad \text{für alle } \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \in L_D \text{ mit } i \in I_D$$

Sei ferner

$$\leftsquigarrow_D := \underline{\leftsquigarrow}_D \setminus =$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\leftsquigarrow_D$ wohlfundiert ist. Hierzu definieren wir eine andere wohlfundierte Relation $\prec_D^{\mathrm{Of}}$ auf L_D und zeigen, dass $\leftsquigarrow_D \subseteq \prec_D^{\mathrm{Of}}$.

Sei $I := \overline{I}_D$. Zuerst ordnen wir jedem Ausdruck alle in ihm vorkommenden „Operatorindice-Folgen" zu:

$$\mathrm{Of} : L_D \to {}^\star({}^\star I),\ \varphi \mapsto \begin{cases} \langle \langle \rangle \rangle, & \text{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \langle \langle i \rangle \rangle, & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \langle \rangle \rangle \\ \bigstar_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} \left(\left\langle \langle i \rangle \star \mathrm{pr}_l \, \mathrm{Of}\, \alpha_k \right\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\, \alpha_k} \right), & \text{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha} \rangle \text{ mit } \vec{\alpha} \neq \langle \rangle \end{cases}$$

Sei $\prec_D$ die mit der Prä-Syntaxerweiterung D auf I gegebene Wohlfundierung. Wegen Lemma B.13 ist dann durch

$$\prec_\star := (\prec_D)_\star$$

eine Wohlfundierung auf ${}^\star I$ und durch

$$\prec_{\star\star} := (\prec_\star)_\star$$

eine Wohlfundierungen auf ${}^\star({}^\star I)$ gegeben.

Also erhalten wir mit

$$\varphi \prec_D^{\mathrm{Of}} \psi \quad :\text{gdw.} \quad \mathrm{Of}\,\varphi \prec_{\star\star} \mathrm{Of}\,\psi$$

eine Wohlfundierung auf L_D (siehe Lemma A.3).

B.17 Lemma

Seien $\vec{w} \in {}^\star\mathcal{V}$ *injektiv,* $\vec{\gamma} \in {}^\star L_D$ *mit* $\operatorname{len}\vec{\gamma} = \operatorname{len}\vec{w}$ *und* $\varphi \in L_D$ *mit* $\operatorname{bind}\varphi \cup \operatorname{var}\varphi \subseteq \operatorname{im}\vec{w}$ *und* $\forall j \in \operatorname{len}\vec{w} : (w_j \in \operatorname{bind}\varphi \Rightarrow \gamma_j \in \mathcal{V})$*, d.h.* $\langle \varphi, \vec{\gamma}, \vec{w}\rangle \in \mathrm{SK}$*. Ist*

$$\tau \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\ulcorner\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner\ ,$$

so gibt es $\sigma \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\varphi$*,* $m \in \operatorname{len}\vec{\gamma}$ *und* $\rho \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\gamma_m$ *mit*

$$\tau = \sigma \star \rho\ .$$

Beweis durch strukturelle Induktion bzgl. φ**:**

SI: Sei $\varphi \in \mathcal{V}$. Es gilt $\varphi = w_m$ für ein $m \in \operatorname{len}\vec{w}$. Da

$$\tau \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\ulcorner\varphi\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner = \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\gamma_m$$

und

$$\operatorname{im}\mathrm{Of}\,\varphi = \operatorname{im}\big\langle\langle\rangle\big\rangle = \{\langle\rangle\}$$

ist wegen $\tau = \langle\rangle \star \tau$ alles gezeigt.

SII: Sei $\varphi = \big\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\big\rangle$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\tau \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\ulcorner\big\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\big\rangle\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner &= \mathrm{Of}\ulcorner\big\langle i, \vec{u}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}, \vec{\alpha}\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\big\rangle\lrcorner \\ &= \operatorname{im}\bigstar_{k\in\operatorname{len}\vec{\alpha}}\Big(\big\langle\langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l\,\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner\big\rangle_{l\in\operatorname{len}\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner}\Big)\ ,\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\tau = \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l\,\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner \qquad \text{für ein } k \in \operatorname{len}\vec{\alpha} \text{ und ein } l \in \operatorname{len}\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner\ .$$

Da $\tau' := \mathrm{pr}_l\,\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\frac{\vec{\gamma}}{\vec{w}}\lrcorner$, folgt induktiv die Existenz von $\sigma' \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\alpha_k$, $m \in \operatorname{len}\vec{\gamma}$ und $\rho \in \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\gamma_m$ mit

$$\tau' = \sigma' \star \rho\ .$$

Wegen

$$\langle i\rangle \star \sigma' \in \operatorname{im}\bigstar_{k\in\operatorname{len}\vec{\alpha}}\Big(\big\langle\langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l\,\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\lrcorner\big\rangle_{l\in\operatorname{len}\mathrm{Of}\ulcorner\alpha_k\lrcorner}\Big) = \operatorname{im}\mathrm{Of}\,\varphi$$

und

$$\tau = \langle i\rangle \star \tau' = \langle i\rangle \star (\sigma' \star \rho) = (\langle i\rangle \star \sigma') \star \rho$$

ist damit alles gezeigt.

■

B.18 Lemma

Es gilt $\leftsquigarrow_D \subseteq \prec_D^{\mathrm{Of}}$. Insbesondere ist $\leftsquigarrow_D$ wohlfundiert auf L_D.

Beweis:
Es reicht zu zeigen, dass $\prec_D^{\mathrm{Of}} \cup =$ die Bedingungen (i) - (iii) aus der Definition von $\underline{\leftsquigarrow}$ erfüllt.

(i) $\prec_D^{\mathrm{Of}} \cup =$ ist natürlich reflexiv.

(ii) Seien nun $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle, \langle i, \vec{u}, \vec{\beta}\rangle \in L_D$ mit $\operatorname{len} \vec{\alpha} = \operatorname{len} \vec{\beta}$ und $\beta_k \prec_D^{\mathrm{Of}} \alpha_k$ oder $\beta_k = \alpha_k$ für alle $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$. Für $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$ gilt im Falle $\beta_k \prec_D^{\mathrm{Of}} \alpha_k$ wegen Lemma B.16 mit $\mathrm{Of}\,\beta_k \prec_{\star\star} \mathrm{Of}\,\alpha_k$ auch

$$\big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\beta_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\beta_k} \prec_{\star\star} \big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\alpha_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\alpha_k}$$

und im Falle $\beta_k = \alpha_k$ natürlich

$$\big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\beta_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\beta_k} = \big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\alpha_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\alpha_k} \; .$$

Gilt $\beta_k = \alpha_k$ für alle $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$, so gilt $\langle i, \vec{u}, \vec{\beta}\rangle = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Im anderen Falle folgt mit (mehrmalig angewendetem) Lemma B.14 (iii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Of}\,\ulcorner\langle i, \vec{u}, \vec{\beta}\rangle\lrcorner &= \mathop{\bigstar}_{k \in \operatorname{len} \vec{\beta}} \Big(\big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\beta_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\beta_k} \Big) \\
&\prec_{\star\star} \mathop{\bigstar}_{k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}} \Big(\big\langle \langle i\rangle \star \mathrm{pr}_l \,\mathrm{Of}\,\alpha_k \big\rangle_{l \in \operatorname{len} \mathrm{Of}\,\alpha_k} \Big) \\
&= \mathrm{Of}\,\ulcorner\langle i, \vec{u}, \vec{\beta}\rangle\lrcorner \; ,
\end{aligned}$$

d.h. $\langle i, \vec{u}, \vec{\beta}\rangle \prec_D^{\mathrm{Of}} \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$.

(iii) Sei nun $\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \in L_D$ mit $i \in I_D$. Vorbemerkung: Ist $\tau \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\delta_i$ und $j \in \operatorname{im} \tau$, so gilt $j \in \operatorname{opi} \delta_i$, d.h. $j \prec_D i$ und somit $\mathrm{rg}_{\prec_D} j < \mathrm{rg}_{\prec_D} i$. Mit Lemma B.14 (iv) gilt also $\tau \prec_\star \langle i\rangle$.

Sei nun $\tau \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\ulcorner\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha})\lrcorner = \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\ulcorner\delta_i \frac{\vec{\mathfrak{v}}_{\delta_i}(\vec{u}\ \vec{\alpha})\ \ \vec{u}\ \ \vec{\alpha}}{v_0\ \ \ \ v_1\ \ v_2}\lrcorner$. Beachtet man, dass $\operatorname{im} \mathrm{Of}\, v = \{\langle\rangle\}$ für alle $v \in \mathcal{V}$, so erhält man mit Lemma B.17, dass $\tau \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\delta_i$ oder dass $\tau = \sigma \star \rho$, mit $\sigma \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\delta_i$, $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$ und $\rho \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\alpha_k$.

1. Fall: $\tau \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\delta_i$, d.h. $\tau \prec_\star \langle i\rangle$ gemäß der Vorbemerkung. Wir wählen ein beliebiges $\rho \in {}^\star I$ mit $\langle i\rangle \star \rho \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Da natürlich $\langle\rangle \prec_\star \rho$ oder $\langle\rangle = \rho$, folgt mit Lemma B.14 (iii)

$$\tau = \tau \star \langle\rangle \prec_\star \langle i\rangle \star \rho \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \; .$$

2. Fall: $\tau = \sigma \star \rho$, mit $\sigma \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\delta_i$, $k \in \operatorname{len} \vec{\alpha}$ und $\rho \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\,\alpha_k$. Hier gilt $\sigma \prec_\star \langle i\rangle$ mit der Vorbemerkung und damit ebenfalls wegen Lemma B.14 (iii)

$$\tau = \sigma \star \rho \prec_\star \langle i\rangle \star \rho \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \; .$$

In beiden Fällen existiert also ein $\tau' \in \operatorname{im} \mathrm{Of}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$ mit $\tau \prec_\star \tau'$ und somit auch $\mathrm{rg}_{\prec_\star} \tau < \mathrm{rg}_{\prec_\star} \tau'$. Mit Lemma B.14 (iv) folgt also

$$\mathrm{Of}\,\ulcorner\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha})\lrcorner \prec_{\star\star} \mathrm{Of}\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \; ,$$

d.h. es gilt insbesondere

$$\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) \; (\prec_D^{\mathrm{Of}} \cup =) \; \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \; .$$

■

Mit dem folgenden Satz ist Satz 3.1 gezeigt.

B.19 Satz

Sei

$$R_D : L_D \to L_D,\ \varphi \mapsto \begin{cases} \varphi, & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{V} \\ \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha}\rangle, & \textit{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \textit{ mit } i \in I_{\mathrm{GO}} \\ \delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}), & \textit{falls } \varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \textit{ mit } i \in I_D \end{cases}$$

Dann gilt

(i)

$$R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \varphi \quad \textit{gdw.} \quad \varphi \in L_{\mathrm{CL}} \qquad \textit{für alle } \varphi \in L_D$$

(ii)

$$R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner \underline{\leftrightsquigarrow}_D\, \varphi \qquad \textit{für alle } \varphi \in L_D$$

(iii) *Für alle $\varphi \in L_D$ existiert ein $d \in \mathbb{N}$ mit*

$$(R_D)^{d\ulcorner}\varphi_\lrcorner \in L_{\mathrm{CL}}$$

Beweis:
(i) „⇒“ durch strukturelle Induktion:

SI: Der Fall $\varphi \in \mathcal{V} \subseteq L_{\mathrm{CL}}$ ist trivial.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \in L_D$ mit $R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \varphi$. Wäre $i \in I_D$, so müsste $\delta_i(\vec{u}, \vec{a}) = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$ gelten. Dies ist aber unmöglich. Im Falle $\delta_i = \langle j, \vec{w}, \vec{\beta}\rangle$ mit $j \prec_D i$ ist das klar, aber auch für $\delta_i = v_2$ und damit $\operatorname{len}\vec{u} = 0$ und $\operatorname{len}\vec{\alpha} = 1$ gilt $\delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) = \alpha_0 \neq \big\langle i, \langle\rangle, \langle\alpha_0\rangle\big\rangle = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle$. Es gilt also $i \in I_{\mathrm{GO}}$ und

$$\langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle = \varphi = R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha}\rangle$$

und damit $R_D \triangleleft \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. Induktiv folgt also $\vec{\alpha} \in {}^\star L_{\mathrm{CL}}$ und somit $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \in L_{\mathrm{CL}}$.

„⇐“ durch strukturelle Induktion:

SI: Der Fall $\varphi \in \mathcal{V}$ ist trivial.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \in L_{\mathrm{CL}}$. Damit ist natürlich $\vec{\alpha} \in {}^\star L_{\mathrm{CL}}$, d.h. induktiv $R_D \triangleleft \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. Folglich gilt

$$R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha}\rangle = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle = \varphi$$

(ii) durch strukturelle Induktion:

SI: Ist $\varphi \in \mathcal{V}$, so gilt $R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \varphi$ und damit $R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner \underline{\leftrightsquigarrow}_D\, \varphi$.

SII: Sei $\varphi = \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle \in L_D$.
Fall $i \in I_{\mathrm{GO}}$: Induktiv gilt $\mathrm{pr}_k(R_D \triangleleft \vec{\alpha}) = R_D{}^\ulcorner\alpha_{k\lrcorner} \underline{\leftrightsquigarrow}_D\, \alpha_k$ für alle $k \in \operatorname{len}\vec{\alpha}$, also

$$R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \langle i, \vec{u}, R_D \triangleleft \vec{\alpha}\rangle \underline{\leftrightsquigarrow}_D\, \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle = \varphi\ .$$

Fall $i \in I_D$: Es gilt (sogar ohne Induktionsvoraussetzung)

$$R_D{}^\ulcorner\varphi_\lrcorner = \delta_i(\vec{u}, \vec{\alpha}) \underline{\leftrightsquigarrow}_D\, \langle i, \vec{u}, \vec{\alpha}\rangle = \varphi\ .$$

(iii) Angenommen $\varphi \in L_D$ mit $(R_D)^n\ulcorner\varphi\lrcorner \notin L_{\mathrm{CL}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (i) gilt also

$$(R_D)^{n+1}\ulcorner\varphi\lrcorner = R_D\ulcorner(R_D)^n\ulcorner\varphi\lrcorner\lrcorner \neq (R_D)^n\ulcorner\varphi\lrcorner$$

und wegen (ii) somit $(R_D)^{n+1}\ulcorner\varphi\lrcorner \leftsquigarrow_D (R_D)^n\ulcorner\varphi\lrcorner$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber $\langle(R_D)^n\ulcorner\varphi\lrcorner\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendlich $\leftsquigarrow_D$-absteigende Folge, im Widerspruch zur Wohlfundiertheit von $\leftsquigarrow_D$. ■

C. Einbettung der Prädikatenlogik

Sei $\sigma = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathrm{ar}\rangle$ eine feste (prädikatenlogische) Signatur und D eine Syntaxerweiterung, die alle in Kapitel 4 eingeführten Operatoren umfasse.[35] Wir wollen zeigen, dass CL_D eine konservative Systemerweiterung von PL_σ ist.[36] Zuerst ordnen wir jedem σ-Term einen CL_D-Ausdruck zu:

$$H : T_\sigma \to L_D,\ t \mapsto \begin{cases} t\,, & \text{falls } t \in \mathcal{V}_P \subseteq \mathcal{V} \\ v_f\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \ldots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, & \text{falls } t = ft_1 \ldots t_n \end{cases}$$

Damit sei $A : L_\sigma \to L_D$ gegeben durch:

$$\varphi \mapsto \begin{cases} H\ulcorner t\lrcorner = H\ulcorner t'\lrcorner\,, & \text{falls } \varphi = (t = t') \\ \langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \ldots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle \in v_R\,, & \text{falls } \varphi = Rt_1 \ldots t_n \\ \neg A\ulcorner\psi\lrcorner\,, & \text{falls } \varphi = \neg\psi \\ A\ulcorner\psi\lrcorner \wedge A\ulcorner\chi\lrcorner\,, & \text{falls } \varphi = (\psi \wedge \chi) \\ \forall v \in v_1\,.\ A\ulcorner\psi\lrcorner\,, & \text{falls } \varphi = \forall v\psi \end{cases}$$

Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} \Psi :=& \{\mathbf{FIN}\} \cup \{[v_1]\mathbf{Class}, v_1 \neq \varnothing\} \cup \{(v \in v_1)\,;\ v \in \mathcal{V}_P\} \\ &\cup \left\{v_f : {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1 \to v_1\,;\ f \in \mathcal{F}\right\} \cup \left\{(v_R \subseteq {}^{\mathrm{ar}(R)}v_1)\,;\ R \in \mathcal{R}\right\} \end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun, dass für alle $\Phi \subseteq L_\sigma$, $\varphi \in L_\sigma$:

$$(*) \qquad \Phi \vDash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi \quad \text{gdw.} \quad A\lceil\Phi\rfloor \cup \Psi \vDash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner$$

Hierzu werden wir (a) jeder klassenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \Vdash_D \Psi$ eine prädikatenlogische σ-Interpretation $\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}$ zuordnen, sodass

$$\mathfrak{I} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L_\sigma$$

und andersherum (b) jeder prädikatenlogischen σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ eine klassenlogische Interpretation $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}$ mit $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \Psi$, sodass

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in L_\sigma\,.$$

Damit folgt dann $(*)$ unmittelbar aus der Definition der Folgerungsbeziehung.

Zu (a): Sei $\mathfrak{I}$ eine klassenlogische Interpretation mit $\mathfrak{I} \Vdash_D \Psi$. Mit $\mathfrak{I} \Vdash_D [v_1]\mathbf{Class}$ und $\mathfrak{I} \Vdash_D v_1 \neq \varnothing$ gilt gemäß Lemma 4.1 (i) und Lemma 2.2 (xii)[37]

$$\mathfrak{I}\ulcorner v_1\lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} \quad \text{und} \quad \emptyset \neq U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} := A_{\mathfrak{I}}\llcorner\mathfrak{I}\ulcorner v_1\lrcorner\urcorner \subseteq D_{\mathfrak{I}}\,.$$

Für $R \in \mathcal{R}$ setzen wir

$$R^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} := \left\{\langle a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(R)}\rangle \in {}^{\mathrm{ar}(R)}U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}\,;\ \mathfrak{I}^{a_1 \,\ldots\, a_{\mathrm{ar}(R)}}_{v_2 \,\ldots\, v_{2\,\mathrm{ar}(R)}} \Vdash_D \langle v_2, \ldots, v_{2\,\mathrm{ar}(R)}\rangle \in v_R\right\} \subseteq {}^{\mathrm{ar}(R)}U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}\,.$$

[35] Aus dem Folgenden ist leicht zu entnehmen, welche Operatoren wirklich benötigt werden.

[36] Verwendet man eine Klassenlogik mit Funktions- und Relationssymbolen, so ist die Einbettung natürlich sehr viel einfacher zu realisieren, ja geradezu trivial.

[37] Referenzen auf dieses Lemma werden wir im Folgenden nicht mehr angeben.

Weiter sei für $f \in \mathcal{F}$

$$f^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} := \left\{ \big\langle \langle a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(f)} \rangle, a \big\rangle \in {}^{\mathrm{ar}(f)}U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \sqcap U_{\mathfrak{I}} \, ; \, \mathfrak{I}^{\,a_1 \,\ldots\, a_{\mathrm{ar}(f)} \;\, a}_{\,v_2 \,\ldots\, v_{2\,\mathrm{ar}(f)} \, v_0} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2\,\mathrm{ar}(f)} \rangle, v_0 \big\rangle \in v_f \right\}$$

Seien $n := \mathrm{ar}(f)$, $a_1, \ldots, a_n \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}$ beliebig und $\mathfrak{I}' := \mathfrak{I}^{\,a_1 \,\ldots\, a_n}_{\,v_2 \,\ldots\, v_{2n}}$. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\mathfrak{I}'\ulcorner v_1 \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner v_1 \lrcorner \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}'\ulcorner v_{2k} \lrcorner = a_k \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} = A_{\mathfrak{I}}\llcorner \mathfrak{I}\ulcorner v_1 \lrcorner \urcorner = A_{\mathfrak{I}}\llcorner \mathfrak{I}'\ulcorner v_1 \lrcorner \urcorner \,,$$

d.h. $\mathfrak{I}' \Vdash_D v_{2k} \in v_1$. Es ist also auch $\mathfrak{I}' \Vdash_D \Psi$ und mit Lemma 4.10 (a) (iv) folgt

$$\mathfrak{I}' \Vdash_D \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle \in {}^n v_1 \ .$$

Wegen $\mathfrak{I}' \Vdash_D v_f : {}^n v_1 \to v_1$ gilt daher gemäß Lemma 4.11 (b)

$$\mathfrak{I}' \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_f \ulcorner \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle \lrcorner \big\rangle \in v_f$$

und

$$\mathfrak{I}' \Vdash_D v_f \ulcorner \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle \lrcorner \in v_1 \ ,$$

d.h.

$$c := \mathfrak{I}'\ulcorner v_f \ulcorner \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle \lrcorner \lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner \mathfrak{I}\ulcorner v_1 \lrcorner \urcorner = U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \ .$$

Mit dem Substitutionslemma folgt

$$\mathfrak{I}'^{\,c}_{\,v_0} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_0 \big\rangle \in v_f \ .$$

Sind $a, b \in U_{\mathfrak{I}}$ mit

$$\mathfrak{I}'^{\,a}_{\,v_0} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_0 \big\rangle \in v_f$$

und

$$\mathfrak{I}'^{\,b}_{\,v_0} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_0 \big\rangle \in v_f \ , \quad \text{d.h.}^{38} \quad \mathfrak{I}'^{\,b}_{\,v_{2n+2}} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_{2n+2} \big\rangle \in v_f \ ,$$

so gilt auch

$$\mathfrak{I}'^{\,a\;\,b}_{\,v_0 v_{2n+2}} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_0 \big\rangle \in v_f \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}'^{\,a\;\,b}_{\,v_0 v_{2n+2}} \Vdash_D \big\langle \langle v_2, \ldots, v_{2n} \rangle, v_{2n+2} \big\rangle \in v_f \ .$$

Da $\mathfrak{I}'^{\,a\;\,b}_{\,v_0 v_{2n+2}} \Vdash_D v_f : {}^n v_1 \to v_1$, folgt also

$$a = \mathfrak{I}'^{\,a\;\,b}_{\,v_0 v_{2n+2}} \ulcorner v_0 \lrcorner = \mathfrak{I}'^{\,a\;\,b}_{\,v_0 v_{2n+2}} \ulcorner v_{2n+2} \lrcorner = b$$

gemäß Lemma 4.11 (a).

Es ist also $f^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \in \mathrm{Abb}({}^{\mathrm{ar}(f)}U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}, U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}})$ gezeigt.

Für alle $v \in \mathcal{V}_P$ folgt aus $\mathfrak{I} \Vdash_D v \in v_1$ unmittelbar $h_{\mathfrak{I}}\ulcorner v \lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner v \lrcorner \in A_{\mathfrak{I}}\llcorner \mathfrak{I}\ulcorner v_1 \lrcorner \urcorner = U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}$. Wir setzen $h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} := h_{\mathfrak{I}} \restriction \mathcal{V}_P \in \mathrm{Abb}(\mathcal{V}_P, U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}})$ und erhalten damit unsere σ-Interpretation

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} := \Big\langle \big\langle U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}, \langle x^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \rangle_{x \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} \big\rangle, h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \Big\rangle$$

[38]Siehe Lemma 2.6 (ii)

C.1 Lemma

(i) $\mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_{PL}\ulcorner t\lrcorner$ *für alle* $t \in T_\sigma$

(ii) $\mathfrak{I} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner$ *gdw.* $\mathfrak{I}_{PL} \Vdash_{PL_\sigma} \varphi$ *für alle* $\varphi \in L_\sigma$

Beweis: (i) durch strukturelle Induktion:

SI: Für $t \in \mathcal{V}_P$ gilt

$$\mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner t\lrcorner = h_{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner = h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}\ulcorner t\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t\lrcorner$$

SII: Ist $t = ft_1 \dots t_n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t\lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner ft_1 \dots t_n\lrcorner \\
&= f^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}\ulcorner\tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner \\
&\overset{IV}{=} f^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}}\ulcorner\mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t_1\lrcorner\lrcorner, \dots, \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner\lrcorner \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t_1\lrcorner\lrcorner\ \dots\ \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner\ a}_{v_2\ \dots\ v_{2n}\ v_0} \Vdash_D \langle\langle v_2, \dots, v_{2n}\rangle, v_0\rangle \in v_f \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } (\mathfrak{I}^{a}_{x})^{\mathfrak{I}^{a}_{x}\ulcorner H\ulcorner t_1\lrcorner\lrcorner\ \dots\ \mathfrak{I}^{a}_{x}\ulcorner H\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner}_{x_1\ \dots\ x_n} \Vdash_D \langle\langle x_1, \dots, x_n\rangle, x\rangle \in v_f \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \mathfrak{I}^{a}_{x} \Vdash_D \langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\rangle \in v_f \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner \iota x(\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\rangle \in v_f)\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner v_f\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner ft_1 \dots t_n\lrcorner\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner
\end{aligned}$$

wobei $x, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{V} \setminus \mathrm{frei}(v_f\ H\ulcorner t_1\lrcorner\ \dots\ H\ulcorner t_n\lrcorner\ v_0\ v_2\ \dots\ v_{2n})$ paarweise verschieden. Für die fünfte Gleichheit verwende man Lemma 2.6 (ii) (und das Koinzidenzlemma); die sechste gilt nach Lemma B.4.

(ii) durch strukturelle Induktion:

SI: Fall $\varphi = (t = t')$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner \quad &\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash_D A\ulcorner t = t'\lrcorner \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I} \Vdash_D H\ulcorner t\lrcorner = H\ulcorner t'\lrcorner \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t'\lrcorner\lrcorner \\
&\text{gdw.} \quad \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}}\ulcorner t'\lrcorner \qquad \text{mit (i)} \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} t = t' \\
&\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{aligned}$$

Fall $\varphi = Rt_1 \dots t_n$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} Rt_1 \dots t_n \\
& \text{gdw.} & \langle \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}} \ulcorner t_1 \lrcorner, \dots, \tilde{\mathfrak{I}}_{\mathrm{PL}} \ulcorner t_n \lrcorner \rangle \in R^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \\
& \text{gdw.} & \langle \mathfrak{I} \ulcorner H \ulcorner t_1 \lrcorner \lrcorner, \dots, \mathfrak{I} \ulcorner H \ulcorner t_n \lrcorner \lrcorner \rangle \in R^{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \qquad \text{mit (i)} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner H \ulcorner t_1 \lrcorner \lrcorner \, \dots \, \mathfrak{I}\ulcorner H \ulcorner t_n \lrcorner \lrcorner}_{v_2 \quad \dots \quad v_{2n}} \Vdash_D \langle v_2, \dots, v_{2n} \rangle \in v_R \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}\ulcorner H \ulcorner t_1 \lrcorner \lrcorner \, \dots \, \mathfrak{I}\ulcorner H \ulcorner t_n \lrcorner \lrcorner}_{x_1 \quad \dots \quad x_n} \Vdash_D \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in v_R \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D \langle H \ulcorner t_1 \lrcorner, \dots, H \ulcorner t_n \lrcorner \rangle \in v_R \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner Rt_1 \dots t_n \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \varphi \lrcorner
\end{array}
$$

wobei $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{V} \setminus \mathrm{frei}(v_R \; H\ulcorner t_1 \lrcorner \; \dots \; H \ulcorner t_n \lrcorner \; v_2 \; \dots \; v_{2n})$ paarweise verschieden. Für die fünfte Äquivalenz verwende man Lemma 2.6 (ii); die sechste gilt nach Lemma B.4.

SII: Fall $\varphi = \neg\psi$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \varphi \lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \neg\psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D \neg A \ulcorner \psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{nicht } \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{nicht } \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \neg\psi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Fall $\varphi = (\psi \wedge \chi)$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \varphi \lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \psi \wedge \chi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \psi \lrcorner \wedge A \ulcorner \chi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \psi \lrcorner \text{ und } \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \chi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \text{ und } \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \chi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \wedge \chi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Fall $\varphi = \forall v \psi$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \varphi \lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D A \ulcorner \forall v \psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_D \forall v \in v_1 \,.\, A \ulcorner \psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in A_{\mathfrak{I}} \llcorner \mathfrak{I} \ulcorner v_1 \lrcorner \urcorner = U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \text{ gilt } \mathfrak{I}^{b}_{v} \Vdash_D A \ulcorner \psi \lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \text{ gilt } (\mathfrak{I}^{b}_{v})_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}} \text{ gilt } \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}{}^{b}_{v} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \forall v \psi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Hierbei folgt $(\mathfrak{I}^{b}_{v})_{\mathrm{PL}} = \mathfrak{I}_{\mathrm{PL}}{}^{b}_{v}$ leicht aus den entsprechenden Definitionen. Man beachte auch Lemma 4.1 (ii).

■

Zu (b): Ist X eine Menge, so bezeichne FIN(X) die kleinste Obermenge Z von X, die die folgenden Bedingungen erfüllt:[39]

- $\emptyset \in Z$
- Ist $A \subseteq Z$ mit $A \in Z$ und $b \in Z$, so gilt auch $A \cup \{b\} \in Z$

Offenbar enthält FIN(X) alle erblich endlichen Mengen und ist abgeschlossen unter Tupelbildung.

Sei $\mathfrak{I}$ eine σ-Interpretation. Wir definieren dann $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \in \mathscr{M}_{\mathrm{CL}_D}$ durch

- $D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} := \mathrm{FIN}(U_{\mathfrak{I}})$
- $V_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} := V_{\mathrm{P}}$, $F_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} := F_{\mathrm{P}}$ und $N_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ sei ein beliebiges Element, dass nicht in $D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \cup \mathcal{P}(D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}})$ vorkommt
- $U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} := D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \cup \mathcal{P}(D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}) \cup \{V_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}, F_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}, N_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\}$
- $A_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} : \mathcal{P}(D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}) \to U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$, $X \mapsto X$
- $h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} : \mathcal{V} \to U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$, $v_i \mapsto \begin{cases} h_{\mathfrak{I}}\ulcorner v_i \lrcorner\ , & \text{falls } i \text{ gerade} \\ U_{\mathfrak{I}}\ , & \text{falls } i = 1 \\ i^{\mathfrak{I}}\ , & \text{falls } i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \\ N_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ , & \text{sonst} \end{cases}$

Zur Wohldefiniertheit von $h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$: Wegen $U_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ gilt $U_{\mathfrak{I}} \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$. Weiter folgt aus unseren mengentheoretischen Definitionen von Tupeln, Abbildungen etc.[40], dass $i^{\mathfrak{I}} \subseteq \mathrm{FIN}(U_{\mathfrak{I}}) = D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ und damit $i^{\mathfrak{I}} \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ für alle $i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$.

Offenbar ist also $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}$ eine volle und natürliche Interpretation. Es gilt also

$$\mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} = \mathrm{im}\, A_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \setminus N_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} = \mathcal{P}(D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}})$$

und damit

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [v_1]\mathbf{Class} \qquad \text{wegen} \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1 \lrcorner = U_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$$

und für $i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [v_i]\mathbf{Class} \qquad \text{wegen} \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_i \lrcorner = i_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ .$$

[39] Diese Menge ließe sich auch konstruktiv beschreiben.

[40] Siehe Abschnitt 1.2. Verwendet man auf der Meta-Ebene eine andere Definition von Abbildungen und Relationen, so muss die Belegung $h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ eine Umwandlung in unsere mengentheoretischen Objekte vornehmen.

C.2 Lemma

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \Psi$$

Beweis:

(i) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D$ FIN: Wegen $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\varnothing\lrcorner = A_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ulcorner\emptyset\lrcorner = \emptyset \in \mathrm{FIN}(U_\mathfrak{I}) = D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ gilt $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \varnothing \in \mathbb{D}$. Weiter gilt gemäß Lemma 4.1 (iii)

$$\begin{aligned}&\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \forall v_0, v_1 \in \mathbb{D}\,.\; v_0 \cup \{v_1\} \in \mathbb{D}\\ &\text{gdw.}\quad \text{für alle } a, b \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ gilt } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a\ b}_{v_0 v_1}\ulcorner v_0 \cup \{v_1\}\lrcorner \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\end{aligned}$$

Da mit Lemma 4.2 (ii) und Lemma 4.3.

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a\ b}_{v_0 v_1}\ulcorner v_0 \cup \{v_1\}\lrcorner = \begin{cases} a \cup \{b\}\ , & \text{falls } a \in \mathrm{Cls}_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \\ \{b\}\ , & \text{sonst}\end{cases}$$

folgt die Behauptung aus der Definition von $D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$.

(ii) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [v_1]\mathbf{Class}$: Wurde oben bereits gezeigt.

(iii) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D v_1 \neq \varnothing$: Dies folgt aus $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1\lrcorner = U_\mathfrak{I} \neq \emptyset = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\varnothing\lrcorner$.

(iv) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D v \in v_1$ für $v \in \mathcal{V}_P$: Sei $v \in \mathcal{V}_P$ beliebig. Die Behauptung folgt mit

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v\lrcorner = h_\mathfrak{I}\ulcorner v\lrcorner \in U_\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1\lrcorner = A_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\llcorner\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1\lrcorner\urcorner\ .$$

(v) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D v_f : {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1 \to v_1$ für $f \in \mathcal{F}$: Oben wurde gezeigt, dass $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [v_1]\mathbf{Class}$ und $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [v_f]\mathbf{Class}$. Weiter gilt $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [{}^{\mathrm{ar}(f)}v_1]\mathbf{Class}$ und $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D [{}^{\mathrm{ar}(f)}v_1 \sqcap v_1]\mathbf{Class}$. Da gemäß Lemma 4.10 (b) (ii) und (iii)

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_f\lrcorner = f^\mathfrak{I} \subseteq {}^{\mathrm{ar}(f)}U_\mathfrak{I} \sqcap U_\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1\lrcorner \sqcap \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1\lrcorner = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1 \sqcap v_1\lrcorner\ ,$$

gilt $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D v_f \subseteq {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1 \sqcap v_1$ gemäß Lemma 4.2 (i). Weiter gilt gemäß Lemma 4.12

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner \mathrm{def}\, v_f\lrcorner &= \left\{a \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ ;\ \text{es gibt ein } b \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ mit } \langle a, b\rangle \in \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_f\lrcorner = f^\mathfrak{I}\right\}\\ &= \mathrm{def}\, f^\mathfrak{I} = {}^{\mathrm{ar}(f)}U_\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1\lrcorner\ ,\end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \mathrm{def}\, v_f = {}^{\mathrm{ar}(f)}v_1$. Schließlich ist mithilfe von Lemma 4.10 (b) (i)

$$\begin{aligned}&\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \forall x, y, z \in \mathbb{D}\,.\; \big(\langle x, y\rangle \in v_f \wedge \langle x, z\rangle \in v_f \to y = z\big)\\ &\text{gdw.}\quad \text{für alle } a, b, c \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ gilt } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a\,b\,c}_{x\,y\,z} \Vdash_D \langle x, y\rangle \in v_f \wedge \langle x, z\rangle \in v_f \to y = z\\ &\text{gdw.}\quad \text{für alle } a, b, c \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ mit } \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in f^\mathfrak{I} \text{ gilt } b = c\\ &\text{gdw.}\quad f^\mathfrak{I} \text{ eindeutig}\end{aligned}$$

(vi) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D v_R \subseteq {}^{\mathrm{ar}(R)}v_1$ für $R \in \mathcal{R}$: Dies folgt wegen Lemma 4.2 (i) unmittelbar aus

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_R\lrcorner = R^\mathfrak{I} \subseteq {}^{\mathrm{ar}(R)}U_\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner {}^{\mathrm{ar}(R)}v_1\lrcorner\ .$$

■

C.3 Lemma

(i) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner$ *für alle* $t \in T_\sigma$

(ii) $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner$ *gdw.* $\mathfrak{I} \Vdash_{PL_\sigma} \varphi$ *für alle* $\varphi \in L_\sigma$

Beweis: (i) durch strukturelle Induktion:
Man beachte, dass für alle $t \in T_\sigma$ wegen $\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner \in U_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ induktiv auch $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D H\ulcorner t\lrcorner \in \mathbb{D}$ gezeigt wird.

SI: Für $t \in \mathcal{V}_P$ gilt

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner t\lrcorner = h_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ulcorner t\lrcorner = h_{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner \in U_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$$

SII: Ist $t = ft_1 \dots t_n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner &= \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner ft_1 \dots t_n\lrcorner \\
&= f^{\mathfrak{I}}\ulcorner\tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner \\
&\overset{IV}{=} f^{\mathfrak{I}}\ulcorner\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t_1\lrcorner\lrcorner, \dots, \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner\lrcorner \\
&= f^{\mathfrak{I}}\ulcorner\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner\lrcorner \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}} \text{ mit } \langle\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, a\rangle \in f^{\mathfrak{I}} \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ mit } \langle\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, a\rangle \in f^{\mathfrak{I}} \\
&= \text{dasjenige } a \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}} \text{ mit } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x} \Vdash_D \big\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\big\rangle \in \upsilon_f \\
&= \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\iota x(\big\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\big\rangle \in \upsilon_f)\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\upsilon_f\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner ft_1 \dots t_n\lrcorner\lrcorner \\
&= \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner
\end{aligned}$$

wobei $x \in \mathcal{V} \setminus \mathrm{frei}(\upsilon_1\ \upsilon_f\ H\ulcorner t_1\lrcorner \dots H\ulcorner t_n\lrcorner)$. Für die vierte Gleichheit verwende man Lemma 4.10 (b) (i) und für die siebte beachte man:

Sei $a \in U_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ beliebig. Ist

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x} \Vdash_D \big\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\big\rangle \in \upsilon_f\ ,$$

so gilt

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x} \Vdash_D x \in \upsilon_1$$

wegen $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x} \Vdash_D \upsilon_f \subseteq {}^{n}\upsilon_1 \sqcap \upsilon_1$ und Lemma 4.10 (a) (iii) und damit

$$a = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x}\ulcorner x\lrcorner \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ .$$

Auch aus

$$\langle\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, a\rangle \in f^{\mathfrak{I}}$$

folgt natürlich

$$a \in U_{\mathfrak{I}} \subseteq D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\ .$$

Für alle $a \in D_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}$ gilt schließlich (mit Lemma 4.10 (b) (i))

$$\begin{aligned}
&\langle\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, a\rangle \in f^{\mathfrak{I}} \\
&\text{gdw. } \langle\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x}\ulcorner\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner, \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x}\ulcorner x\lrcorner\rangle \in f^{\mathfrak{I}} \\
&\text{gdw. } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x}\ulcorner\big\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\big\rangle\lrcorner \in f^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x}\ulcorner\upsilon_f\lrcorner \\
&\text{gdw. } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{a}_{x} \Vdash_D \big\langle\langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle, x\big\rangle \in \upsilon_f
\end{aligned}$$

(ii) durch strukturelle Induktion

SI: Fall $\varphi = (t = t')$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner t = t'\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D H\ulcorner t\lrcorner = H\ulcorner t'\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t\lrcorner\lrcorner = \mathfrak{I}\ulcorner H\ulcorner t'\lrcorner\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t\lrcorner = \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t'\lrcorner \qquad \text{mit (i)} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} t = t' \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Fall $\varphi = Rt_1 \dots t_n$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi & \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} Rt_1 \dots t_n \\
& \text{gdw.} & \langle \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, \tilde{\mathfrak{I}}\ulcorner t_n\lrcorner\rangle \in R^{\mathfrak{I}} \\
& \text{gdw.} & \langle \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t_1\lrcorner\lrcorner, \dots, \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner H\ulcorner t_n\lrcorner\lrcorner\rangle \in R^{\mathfrak{I}} \qquad \text{mit (i)} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner \langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle\lrcorner \in R^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_R\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \langle H\ulcorner t_1\lrcorner, \dots, H\ulcorner t_n\lrcorner\rangle \in v_R \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner Rt_1 \dots t_n\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner
\end{array}
$$

SII: Fall $\varphi = \neg\psi$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\neg\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \neg A\ulcorner\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{nicht } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{nicht } \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \neg\psi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Fall $\varphi = (\psi \wedge \chi)$:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\psi \wedge \chi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\psi\lrcorner \wedge A\ulcorner\chi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\psi\lrcorner \text{ und } \mathfrak{I} \Vdash_D A\ulcorner\chi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \text{ und } \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \chi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \wedge \chi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}
$$

Fall $\varphi = \forall v\psi$:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\varphi\lrcorner & \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\forall v\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}} \Vdash_D \forall v \in v_1 \,.\, A\ulcorner\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in A_{\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}}\llcorner\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}\ulcorner v_1\lrcorner\urcorner = U_{\mathfrak{I}} \text{ gilt } \mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{b}_{v} \Vdash_D A\ulcorner\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in U_{\mathfrak{I}} \text{ gilt } (\mathfrak{I}^{b}_{v})_{\mathrm{CL}} \Vdash_D A\ulcorner\psi\lrcorner \\
& \text{gdw.} & \text{für alle } b \in U_{\mathfrak{I}} \text{ gilt } \mathfrak{I}^{b}_{v} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \psi \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \forall v\psi \\
& \text{gdw.} & \mathfrak{I} \Vdash_{\mathrm{PL}_\sigma} \varphi
\end{array}$$

Hierbei folgt $\mathfrak{I}_{\mathrm{CL}}{}^{b}_{v} = (\mathfrak{I}^{b}_{v})_{\mathrm{CL}}$ leicht aus den entsprechenden Definitionen.

■

Symbolverzeichnis

Index

Bibliographie

[Bla18] Patricia Blanchette. „The Frege-Hilbert Controversy“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Fall 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[Can32] Georg Cantor. „Beitäge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin: Springer, 1932.

[Fre03] Gottlob Frege. „Über die Grundlagen der Geometrie.“ In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12 (1903), S. 319–324. URL: http://eudml.org/doc/144887.

[Fre08a] Gottlob Frege. „Funktion und Begriff“. In: *Funktion, Begriff, Bedeutung: fünf logische Studien*. Hrsg. von G. Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, 2008.

[Fre08b] Gottlob Frege. „Über Sinn und Bedeutung“. In: *Funktion, Begriff, Bedeutung: fünf logische Studien*. Hrsg. von G. Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, 2008.

[Fre84] Gottlob Frege. *Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Wilhelm Koebner, 1884.

[Fre93] Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik*. Bd. 1. H. Pohle, 1893.

[Göd40] Kurt Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Princeton University Press, 1940.

[Göd58] Kurt Gödel. „Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes“. In: *Dialectica* 12.3-4 (1958), S. 280–287. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1746-8361.1958.tb01464.x.

[Goo54] R. L. Goodstein. „Logic-free Formalisations of Recursive Arithmetic“. In: *MATHEMATICA SCANDINAVICA* 2 (Dez. 1954), S. 246–260. DOI: 10.7146/math.scand.a-10412. URL: https://www.mscand.dk/article/view/10412.

[GOT83] Jürgen-Michael Glubrecht, Arnold Oberschelp und Günter Todt. *Klassenlogik*. BI-Wiss.-Verlag, 1983.

[Hil17] David Hilbert. „Axiomatisches Denken.“ In: *Mathematische Annalen* 78 (1917), S. 405–415. URL: http://eudml.org/doc/158776.

[HS73] Horst Herrlich und George E. Strecker. *Category Theory - An Introduction*. Allyn und Bacon, Boston, 1973.

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[Kun13] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Revised edition. College Publications, 2013.

[KW07] Richard Kaye und Tin Lok Wong. „On Interpretations of Arithmetic and Set Theory“. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 48.4 (Okt. 2007), S. 497–510.

[Law64] F. William Lawvere. „An Elementary Theory of the Category of Sets“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 52 6 (1964), S. 1506–11.

[MO19] James Moody (mathoverflow.net/users/45707/james). *Termination of "unpacking" abbreviations*. MathOverflow. mathoverflow.net/q/323089 (version: 2019-02-18). URL: https://mathoverflow.net/q/323089.

[Mos+05] Till Mossakowski u. a. „What is a Logic?" In: *Logica Universalis*. Hrsg. von Jean-Yves Béziau. Birkhäuser, 2005, S. 113–133.

[Mos50] Andrzej Mostowski. „Some Impredicative Definitions in the Axiomatic Set-Theory". In: *Fundamenta Mathematicae* 37.1 (1950), S. 111–124. URL: http://eudml.org/doc/213208.

[Obe74] Arnold Oberschelp. *Elementare Logik und Mengenlehre I*. Bibliographisches Institut, 1974.

[Obe94] Arnold Oberschelp. *Allgemeine Mengenlehre*. BI-Wiss.-Verlag, 1994.

[RW50] J. Barkley Rosser und Hao Wang. „Non-Standard Models for Formal Logics". In: *The Journal of Symbolic Logic* 15.2 (1950), S. 113–129. URL: http://www.jstor.org/stable/2266971.

[Tai81] W. W. Tait. „Finitism". In: *Journal of Philosophy* 78.9 (1981), S. 524–546.

[Tar83] Alfred Tarski. „On Definable Sets of Real Numbers". In: *Logic, Semantics, Metamathematics*. Hrsg. von J. Corcoran. Hackett Publishing Company, Inc., 1983.

[Tar86] Alfred Tarski. „What Are Logical Notions?" In: *History and Philosophy of Logic* 7.2 (1986). Hrsg. von John Corcoran, S. 143–154.