Das Lemma von Sperner: Anwendung und Schulbezug

Diplomarbeit

im Lehramtsstudium Mathematik - Physik

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften

eingereicht an der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

von

Magdalena Berger

Betreuer: Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr. Netzer Tim

Innsbruck, März 2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

Datum	Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen herzlich bedanken, die mich beim Erstellen dieser Diplomarbeit, insbesondere aber während meines ganzen Studiums unterstützt haben:

Ein großer Dank geht zunächst an Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr. Netzer Tim, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Mit Ihren stets raschen und äußerst hilfreichen Erklärungen und Rückmeldungen auf all meine Fragen haben Sie mir sehr weitergeholfen. Vielen Dank für Ihre Mühen.

Ein besonderer Dank gilt auch meiner Familie, die mir das Studium überhaupt erst ermöglicht hat. Ob mit dem nötigen Geld, mit leckeren Essensvorräten oder mit wertvollen Tipps zum Studium allgemein - immer seid ihr mir mit Rat und Tat zu Seite gestanden. Liebe Mama, lieber Tata, liebe Tina und liebe Lia, a gonz groaßes Vergelt's Gott für olles!

Danken möchte ich auch meinen Freunden zu Hause, mit denen ich jederzeit alle meine Freuden und Sorgen teilen konnte. Ihr habt mit mir auf Erfolge angestoßen, mich aber auch immer wieder aufgemuntert und motiviert, wenn ich einmal verzagt war. Danke für eure Freundschaft.

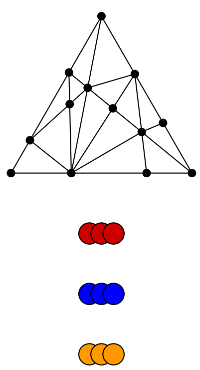
Nicht zuletzt möchte ich mich bei all meinen Kommilitonen und neuen Freunden aus der Uni bedanken, mit denen ich viele tolle und besondere Momente erlebt habe. Gemeinsam haben wir uns durch schwierige Prüfungen gekämpft, uns gegenseitig mit Lernunterlagen unterstützt und uns motiviert, wenn die Lust zum Lernen einmal nicht so groß war. In, aber auch außerhalb der Uni ist dabei der Spaß nie zu kurz gekommen. Ob beim Lernen in der Bib oder beim Feiern am Abend - wir waren ein tolles Team. Danke, dass ihr das Studium für mich zu einer unvergesslichen Zeit gemacht habt.

Die vergangenen Jahre in Innsbruck waren für mich eine sehr intensive und herausfordernde, aber auch sehr spannende und lehrreiche Zeit, in der ich viele neue, tolle Erfahrungen sammeln durfte. Euch allen, die ihr in irgendeiner Weise dazu beigetragen habt, diese Zeit für mich so einzigartig zu machen, nochmals ein großes Dankeschön!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Liebe Leserin und lieber Leser meiner Diplomarbeit,
bevor ich dir die nötigen Informationen zu den Inhalten und dem Aufbau dieser Arbeit gebe, möchte ich dich kurz zurück in deine Kindheit entführen. Stell dir dazu vor, du spielst mit einem lieben Bekannten folgendes Spiel:



Ihr habt ein Spielfeld, das aus einem großen Dreieck besteht und mittels schwarzer Linien in viele kleine Dreiecke unterteilt ist. Außerdem habt ihr genügend viele Spielplättchen in drei unterschiedlichen Farben zur Verfügung. Nun sollt ihr abwechselnd solange jeweils ein farbiges Plättchen auf einen Kreuzungspunkt der Dreiecke legen, bis ein kleines Dreieck entsteht, an dessen Ecken alle drei Farben auftreten. Der Spieler, der als erster ein solches Dreieck vollendet, hat verloren. Das Ziel des Spiels besteht also nicht darin, möglichst schnell Dreiecke zu erzeugen, die alle drei Farben an ihren Ecken aufweisen, sondern genau jene zu vermeiden.

Natürlich gibt es dabei auch ein paar Regeln:
Die drei Außenecken des großen Dreiecks müssen mit drei unterschiedlichen Farben gefärbt werden. Und Punkte auf den Außenkanten des großen Dreiecks dürfen nur mit jenen Farben gefärbt werden, die auch an den entsprechenden Enden der Kanten auftreten. Im Inneren gelten hingegen keine Einschränkungen.

Da dein (nun nicht mehr so lieber) Bekannter dich unbedingt besiegen will und du logischerweise keine Niederlage ertragen kannst, beginnst du sofort mit dem Überlegen: Wie kann ich ihn am sichersten schlagen? Welche Strategie soll ich verfolgen? Kann das Spiel auch unentschieden enden und meine Bemühungen sind alle umsonst?

Nun, um deine Fragen zu beantworten, hast du jetzt mehrere Möglichkeiten: Du kannst im Internet recherchieren (was schon eher langweilig wäre), selbst herumtüfteln (das ist schon ziemlich cool) oder aber auch meine Diplomarbeit lesen und so die Antwort herausfinden (die beste aller Varianten).
In dieser wirst du nämlich neben vielem mehr herausfinden, was es mit diesem Spiel und dem Lemma von Sperner auf sich hat.

Wie der Titel schon sagt, ist das zentrale Thema der Diplomarbeit das Lemma von Sperner. Was ist das, wird sich der eine oder andere bestimmt fragen. Außerhalb von Spezialistenkreisen ist dieses bedeutende mathematische Resultat nämlich wahrscheinlich den wenigsten ein Begriff. Dabei ist die Aussage des Lemmas (zumindest im 2-dimensionalen Fall) nicht weiter kompliziert und lässt sich auf sehr einfache Weise erklären und veranschaulichen.

Damit wären wir auch schon bei einem entscheidenden Punkt dieser Arbeit, der Veranschaulichung: Neben einer mathematisch korrekten Aufarbeitung der einzelnen Sätze und Beweise soll nämlich genau untersucht werden, ob und wie das Lemma von Sperner inklusive dessen Beweis auf anschauliche Weise auch jenen Leuten, die sich auf diesem Gebiet wenig bis gar nicht auskennen, erklärt werden kann.

Im Sinne einer fachlich korrekten Ausarbeitung des Themas setzt sich das erste Kapitel also zunächst mit den Voraussetzungen auseinander, die für die Formulierung des Lemmas notwendig sind. Anschließend wird das Lemma im allgemeinen n-dimensionalen Fall wiedergegeben und ausführlich bewiesen. Zum Schluss erfolgt dann eine sehr detaillierte Betrachtung des 2-dimensionalen Falls inklusive zahlreicher, aussagekräftiger Skizzen und Abbildungen.

Wozu brauchen wir dieses Lemma von Sperner nun aber eigentlich? Auf diese Frage wird im zweiten Teil der Arbeit genauer eingegangen. Am Beispiel des Brouwerschen Fixpunktsatzes wird nämlich aufgezeigt, wie das Lemma von Sperner sinnvoll beim Beweisen von Sätzen eingesetzt werden kann und damit für Mathematikerinnen und Mathematiker ein äußerst wertvolles Werkzeug darstellt.

Um den Beweis aber für jedermann verständlich durchführen zu können, ist einiges an mathematischem Vorwissen unerlässlich. Die wesentlichen Voraussetzungen werden daher zu Beginn des zweiten Kapitels angeführt. Im Anschluss daran wird der allgemeine n-dimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes formuliert und mithilfe des Lemmas von Sperner Schritt für Schritt bewiesen. Da auch in diesem Zusammenhang ein wesentlicher Schwerpunkt auf die Veranschaulichung und das allgemeine Verständnis des Satzes gelegt wird, rundet eine ausführliche Behandlung des 2-dimensionalen Falls anhand aussagekräftiger Grafiken[1] das Kapitel ab.

Im dritten und letzten Teil der Arbeit soll schließlich noch den Fragen nachgegangen werden, inwiefern der österreichische Lehrplan eine Behandlung des Lemmas von Sperner im Unterricht zulässt und wie diese konkret aussehen könnte. Basierend auf dem vorhergehenden theoretischen Hintergrund wird deshalb im abschließenden Teil der Arbeit ein didaktisches Konzept vorgelegt, welches auf ein selbständiges Erarbeiten des Lemmas von Sperner im 2-dimensionalen Fall bei den Schülerinnen und Schülern hinzielt. Das spielerische Lösen komplexer, mathematischer Aufgaben soll bei den Lernenden auch über den Unterricht hinaus die Freude an der Mathematik fördern und dazu beitragen, das Lemma von Sperner und seine Anwendungsbereiche bekannter zu machen.

[1] Bei der Wahl der Farben in den verschiedenen Abbildungen habe ich so gut wie möglich darauf geachtet, dass alle Personen die Unterschiede erkennen können, auch solche mit einer Rot-Grün-Schwäche. Danken möchte ich deswegen an dieser Stelle meinem Bekannten, der genau diese Schwäche aufweist und deswegen für mich die einzelnen Farben ausgetestet hat.

Kapitel 1

Lemma von Sperner

Das Lemma von Sperner ist ein wichtiges Resultat aus der kombinatorischen Topologie, einem Teilgebiet der Mathematik. Mit seiner Hilfe sind zahlreiche Beweise mathematischer Sätze auf elementare Weise durchführbar. Unter anderem kann auch der Brouwersche Fixpunktsatz, welcher bis zur Veröffentlichung des Lemmas von Sperner nur anhand komplizierter und aufwändiger Methoden bewiesen werden konnte, mit Hilfe des Lemmas auf relativ einfache Weise gezeigt werden (siehe dazu Kapitel 2).
Benannt ist das Lemma nach dem deutschen Mathematiker Emanuel Sperner (1905 - 1980), welcher es 1928 in seiner Dissertation *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes* erstmals veröffentlichte. [Bac82, S. 45f.]

1.1 Der allgemeine n-dimensionale Fall

In diesem Abschnitt wird das Lemma von Sperner im allgemeinen n-dimensionalen Fall thematisiert. Dabei werden zunächst schrittweise alle Voraussetzungen angeführt, die für die Formulierung des Lemmas notwendig sind. Daraufhin wird dann das Lemma selbst angegeben und ausführlich bewiesen.

1.1.1 Voraussetzungen

Sehr zentral für die Formulierung des Lemmas von Sperner ist der Begriff des *Simplexes*. Um diesen jedoch definieren zu können, benötigt man weitere mathematische Fachtermini, wie etwa *konvexe Hülle* oder *allgemeine Lage*. Um die einzelnen Begriffe folgerichtig und systematisch einzuführen, wird daher zunächst näher auf die Konvexität von Mengen eingegangen. Anschließend werden das Simplex definiert und wesentliche Aussagen dazu angeführt.

Konvexität

Definition 1.1. *[Fis01, S. 95] (Konvexe Menge)*
*Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $p, q \in K$ auch*

$$[p, q] = \{(1 - \lambda)\, p + \lambda q \,|\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\} \subset K$$

gilt, d.h., wenn die Verbindungsstrecke $[p, q]$ der Punkte $p, q \in K$ wiederum in K liegt (siehe Abb. 1).

(a) Menge ist konvex (b) Menge ist nicht konvex

Abb. 1: Konvexe und nicht konvexe Mengen

Definition 1.2. *[Fis01, S. 96] (Konvexe Hülle)*
*Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren die **konvexe Hülle** $\mathrm{kon}(M)$ als den Durchschnitt aller konvexen Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset K$. Das ist offenbar die kleinste konvexe Menge, die M umfasst.*

Beispiel 1.3. Am Beispiel eines Nagelbretts lässt sich die konvexe Hülle einer Menge von Nägeln sehr gut veranschaulichen: Dazu stellt man sich ein

Holzbrett vor, in welches eine beliebige Anzahl an Nägeln geschlagen ist. Nun legt man rund um die Nägel einen Faden herum, so dass sich alle Nägel innerhalb dieses geschlossenen „Fadenkreises“ befinden (braune Linie in Abb. 2). Der braune „Fadenkreis“ ist der Rand einer beliebigen konvexen Menge, welche die Nägel enthält.
Nach Definition 1.2 ist die konvexe Hülle die kleinste konvexe Menge, welche die Punkte, sprich in diesem Fall die Nägel, enthält. Damit ergibt sich als Rand der konvexen Hülle der Nägel die geschlossene orange Linie. Die konvexe Hülle der Nägel wäre also die Menge der Nägel, die sich innerhalb bzw. auf der orangen Begrenzungslinie befinden.

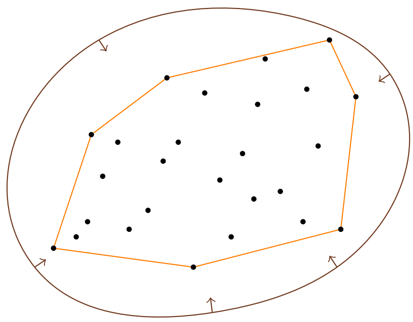


Abb. 2: Konstruktion der konvexen Hülle (orange) am Bsp. eines Nagelbretts

Um ein mathematisch handlicheres Kriterium zur Beschreibung einer konvexen Hülle formulieren zu können, benötigt man den Begriff der Konvexkombination.

Definition 1.4. *[Fis01, S. 96] (Konvexkombination)*
Sind (endlich viele) Punkte $u_0, ..., u_N \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so heißt eine Linearkombination

$$\alpha_0 u_0 + ... + \alpha_N u_N \quad \text{mit} \quad \alpha_0, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$$

***konvex** (oder **Konvexkombination**), wenn*

$$\alpha_0 \geq 0, ..., \alpha_N \geq 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 + ... + \alpha_N = 1.$$

Satz 1.5. *[Fis01, S. 97]*
Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{kon}(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j \,\middle|\, u_j \in M, N \in \mathbb{N}, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1 \right\},$$

d.h. gleich der Menge der Konvexkombinationen von je endlich vielen Punkten aus M.

Beweis. Siehe dazu [Fis01, S. 97]. $\square$

Definition 1.6. *[Zei95, S. 45f.] (Allgemeine Lage)*
*Es sei $N = 1, 2, ...$ Man sagt, die Punkte $u_0, ..., u_N$ des $\mathbb{R}^n$ befinden sich in **allgemeiner Lage**, falls*

$$u_1 - u_0, u_2 - u_0, ..., u_N - u_0$$

linear unabhängig sind.

Beispiel 1.7. Drei Punkte des $\mathbb{R}^2$ befinden sich genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie nicht auf einer Strecke liegen, sondern ein Dreieck bilden.

(a) Punkte in allgemeiner Lage (b) Punkte nicht in allgemeiner Lage

Abb. 3: Allgemeine Lage von Punkten

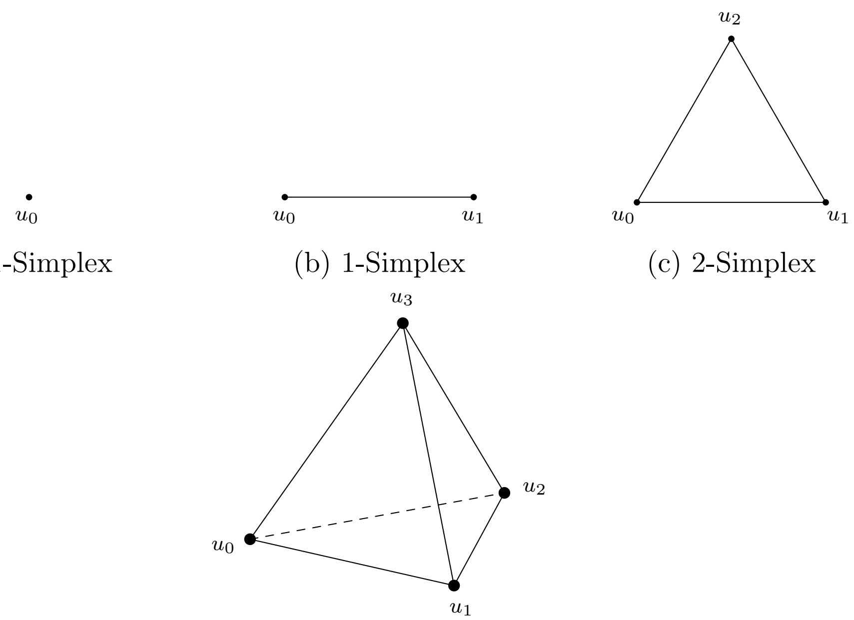
Simplex

Definition 1.8. *[Jän08, S. 109; Zei95, S. 46] (Simplex)*
*Es sei $N \in \mathbb{N}$. Unter einem **N-dimensionalen Simplex** oder **N-Simplex** im $\mathbb{R}^n$ versteht man die Menge*

$$\mathcal{S} := \operatorname{kon}(\{u_0, ..., u_N\}) = \left\{ \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_j \,\middle|\, u_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=0}^{N} \alpha_j = 1 \right\}$$

von $N+1$ Punkten $u_0, ..., u_N \in \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage. Die Punkte $u_0, ..., u_N$ werden dabei als Eckpunke des Simplexes $\mathcal{S}$ bezeichnet.

Beispiel 1.9. [Jän08, S. 109] Unter einem 0-Simplex versteht man einen Punkt, unter einem 1-Simplex eine Strecke, unter einem 2-Simplex eine Dreiecksfläche und unter einem 3-Simplex ein (volles) Tetraeder.



(a) 1-Simplex (b) 1-Simplex (c) 2-Simplex

(d) 3-Simplex

Abb. 4: Verschiedener Simplexe

Bemerkung 1.10. [Toe17, 160] Worin unterscheiden sich eine konvexe Hülle und ein Simplex? Bei einem Simplex befinden sich die Punkte in allgemeiner Lage, während dies bei einer konvexen Hülle nicht gegeben sein muss (siehe Abb. 5).

Definition 1.11. *[Hat02, S. 103; Toe17, S. 160; Zei95, S. 47] (Seite bzw. k-Seite eines N-Simplexes)*
Es sei $\mathcal{S}$ ein N-Simplex.

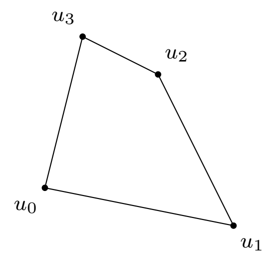


Abb. 5: Beispiel einer konvexen Hülle, die aber kein Simplex ist.

1. *Unter einer **Seite** von $\mathcal{S}$ versteht man die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{u_0, ..., u_N\}$. (Es muss sich dabei nicht um eine echte Teilmenge handeln: Die Seite* $\operatorname{kon}(\{u_0, ..., u_N\})$ *wird als Seite von sich selbst aufgefasst.)*

2. *Unter einer **k-Seite** von $\mathcal{S}$ versteht man die konvexe Hülle von $k+1$ verschiedenen Ecken von $\mathcal{S}$, wobei $k = 0, 1, ..., N$ (siehe Abb. 6):*

   (a) *Eine 0-Seite ist laut Definition die konvexe Hülle einer Ecke eines N-Simplexes, also ein Punkt. Sie wird **Ecke** genannt.*

   (b) *Eine 1-Seite ist laut Definition die konvexe Hülle von zwei verschiedenen Ecken eines N-Simplexes, also eine Strecke. Sie wird **Kante** genannt.*

   (c) *Eine 2-Seite ist laut Definition die konvexe Hülle von drei verschiedenen Ecken eines N-Simplexes, also eine Dreiecksfläche.*

   (d) *Eine $(N-1)$-Seite ist laut Definition die konvexe Hülle von N verschiedenen Ecken eines N-Simplexes, also ein $(N-1)$-Simplex. Sie wird **Seitenfläche** genannt.*

Bemerkung 1.12. Anstelle der Bezeichnung *k-Seite* sind in der Literatur auch die Begriffe *k-Facette* [Neu17, S. 149] oder *k-dimensionales Teilsimplex* [Jän08, S. 109] üblich.

Definition 1.13. *[Rot88, S. 37] (Rand eines Simplexes)*
*Der **Rand** $\partial\mathcal{S}$ eines N-Simplexes $\mathcal{S}$ ist die Vereinigung seiner Seitenflächen. Die Seitenflächen, sprich die (den Punkten $u_0, ..., u_N$ gegenüberliegenden)*

$(N-1)$-Seiten von $\mathcal{S}$ sind mit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gegeben durch die $(N-1)$-Simplexe

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 :=& \operatorname{kon}\left(\{u_1, ..., u_N\}\right), \\
\mathcal{S}_1 :=& \operatorname{kon}\left(\{u_0, u_2, ..., u_N\}\right), \\
& ..., \\
\mathcal{S}_N :=& \operatorname{kon}\left(\{u_0, ..., u_{N-1}\}\right).
\end{aligned}$$

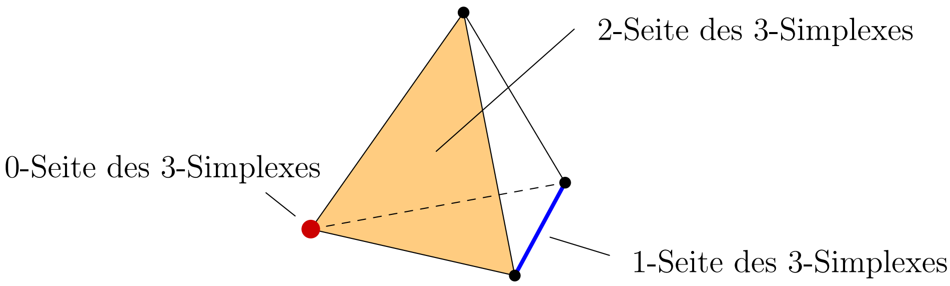


Abb. 6: Seiten am Tetraeder (Bild nach [Jän08, S. 109])

Beispiel 1.14. Ein 2-Simplex enthält somit insgesamt folgende Seiten:

1. Drei Ecken bzw. 0-Seiten:
   (a) $u_0 := \operatorname{kon}\left(\{u_0\}\right) = \{u_0\}$
   (b) $u_1 := \operatorname{kon}\left(\{u_1\}\right) = \{u_1\}$
   (c) $u_2 := \operatorname{kon}\left(\{u_2\}\right) = \{u_2\}$
2. Drei Kanten bzw. 1-Seiten:
   (a) $\mathcal{S}_0 := \operatorname{kon}\left(\{u_1, u_2\}\right)$
   (b) $\mathcal{S}_1 := \operatorname{kon}\left(\{u_0, u_2\}\right)$
   (c) $\mathcal{S}_2 := \operatorname{kon}\left(\{u_0, u_1\}\right)$
3. Eine 2-Seite:
   (a) $\mathcal{S} := \operatorname{kon}\left(\{u_0, u_1, u_2\}\right)$

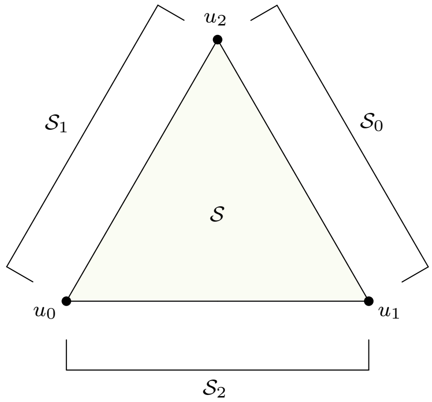


Abb. 7: Seiten eines 2-Simplexes

Der Rand des 2-Simplexes ergibt sich aus der Vereinigung der drei Kanten $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ (siehe Abb. 7).

Definition 1.15. *[Jac83, S. 228] (Simpliziale Zerlegung bzw. Triangulation) Es sei $\mathcal{S} = \operatorname{kon}(\{u_0, ..., u_N\})$ ein N-Simplex mit $N \geq 1$. Unter einer **simplizialen Zerlegung** bzw. **Triangulation** versteht man eine endliche Menge $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_J$ von N-Simplexen $\mathcal{S}_j$, $J \in \mathbb{N}$, sodass Folgendes gilt:*

1. $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{S}_j$
2. *Wenn $j \neq k$ ist, dann ist der Schnitt $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ entweder leer oder eine gemeinsame Seite.*

Beispiel 1.16. Was kann man sich unter einer simplizialen Zerlegung bzw. Triangulation vorstellen? Anschaulich lässt sich dies am bestem am Beispiel eines 2-Simplexes erklären. Eine Triangulation ist in diesem Fall nichts anderes als die Unterteilung des ursprünglichen Dreiecks (also des 2-Simplexes) in mehrere kleine Dreiecke (siehe Abb. 8). Dabei müssen aber zwei Regeln berücksichtigt werden:

1. Vereinigt man alle kleinen Dreiecke, so entsteht wieder das ursprüngliche Dreieck.

2. Schneidet man zwei kleine Dreiecke, so haben sie entweder nichts gemeinsam (ihr Durchschnitt ist also leer) oder eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Ecke.

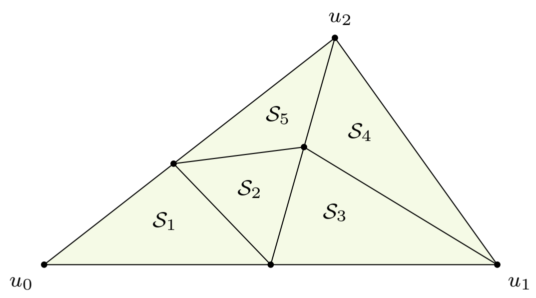


Abb. 8: Beispiel einer simplizialen Zerlegung eines 2-Simplexes

Beispiel 1.17. Sperner formulierte eine **simpliziale Zerlegung** sehr anschaulich: *Es ist gemeint eine simpliziale Zerlegung im Sinne der kombinatorischen Topologie, also eine Zerlegung von $\sum$ [in unserem Fall $\mathcal{S}$] in endlich viele Teilsimplizes, so daß die gemeinsame Punktmenge zweier benachbarter Teilsimplizes stets ein ganzes Randstück beider ist, also entweder ein Punkt, oder eine ganze Kante oder ein ganzes Seitendreieck, usw..* [Spe28, S. 3]

Definition 1.18. *[Zei95, S. 57] (Sperner Simplex)*
Ein N-Simplex $\mathcal{S}$ wird ***Sperner Simplex*** *genannt, wenn alle seine Ecken unterschiedliche Nummern tragen.*

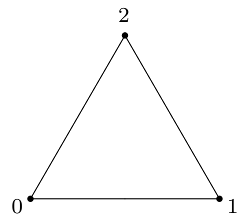


Abb. 9: Sperner Dreieck

Beispiel 1.19. Bei einem 2-Simplex handelt es sich genau dann um ein Sperner Dreieck, wenn seine Ecken die Nummern 0, 1 und 2 aufweisen (siehe Abb. 9).

1.1.2 Satz und Beweis

Nach der Einführung all der vorangegangen Begriffe, kann nun das Lemma von Sperner formuliert werden.

Lemma 1.20. *[Zei95, S. 57] (Lemma von Sperner, Version 1)*
Es sei $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_J$, $J \in \mathbb{N}$, *eine simpliziale Zerlegung eines* N*-Simplexes* $\mathcal{S}$*. Jeder Ecke* x *der Simplexe* $\mathcal{S}_j$, $j \in \{1, ..., J\}$ *sei eine der Zahlen* $0, 1, ..., N$ *derart zugeordnet, dass Folgendes gilt: Wenn*

$$x \in \operatorname{kon}\left(\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}\right), \quad k = 0, ..., N, \tag{1.1}$$

so wird x *eine der Nummern* $i_0, ..., i_k$ *zugeordnet.*
Dann ist die Anzahl der Sperner Simplexe unter den $\mathcal{S}_j$ *ungerade. Damit muss insbesondere mindestens ein solches Sperner Simplex existieren.*

Beispiel 1.21. Was bedeutet die Bedingung (1.1) des Lemmas von Sperner jetzt genau? Dies soll am Beispiel eines 2-Simplexes veranschaulicht werden. Es sei also $N = 2$, woraus folgt, dass jeder Ecke eine der Zahlen 0, 1 oder 2 zugeordnet werden muss. Auch k kann ausschließlich die Zahlen 0, 1 und 2 annehmen.
Man hat nun als Ausgangslage ein 2-Simplex $\mathcal{S}$ mit den Ecken u_0, u_1 und u_2 sowie mit $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_J$, $J \in \mathbb{N}$, eine simpliziale Zerlegung davon. Jetzt können die verschiedenen Fälle durchgespielt werden, wobei man sich von den niedrigstdimensionalen Seiten des Simplexes ausgehend Schritt für Schritt vorarbeiten muss:

1. Als Erstes müssen die Ecken u_0, u_1 und u_2 des Ausgangssimplexes $\mathcal{S}$ betrachtet werden, da man nur von diesen die Bezeichnungen kennt:

    - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_0\})$, so erhält x die Nummer 0.
    - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_1\})$, so erhält x die Nummer 1.
    - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_2\})$, so erhält x die Nummer 2.

    Somit ergibt sich, dass jede Ecke u_j des ursprünglichen Simplexes $\mathcal{S}$ die Nummer j erhält.

2. Anschließend können jene Ecken betrachtet werden, die auf den Außenkanten des Ausgangssimplexes $\mathcal{S}$ liegen, da sie Teil der konvexen Hülle der Menge zweier bereits bezeichneter Punkte sind:

   - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_0, u_1\})$, so erhält x die Nummer 0 oder 1.
   - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_0, u_2\})$, so erhält x die Nummer 0 oder 2.
   - Ist $x \in \operatorname{kon}(\{u_1, u_2\})$, so erhält x die Nummer 1 oder 2.

   Jede Ecke auf einer Außenkante des ursprünglichen Simplexes $\mathcal{S}$ trägt also eine der Nummern der Eckpunkte der jeweiligen Kante.

3. Zuletzt werden schließlich jene Ecken betrachtet, die im Inneren des Ausgangssimplexes $\mathcal{S}$ liegen:
   Da in diesem Fall stets $x \in \operatorname{kon}(\{u_0, u_1, u_2\})$ ist, können die Ecken im Inneren des ursprünglichen Simplexes $\mathcal{S}$ alle drei Nummern 0, 1 oder 2 annehmen.

Bei der Nummerierung gilt also folgende Regel: Die Ecke x bekommt eine der Nummern der Ecken der niedrigstdimensionalen Seite des ursprünglichen Simplexes $\mathcal{S}$, welche x enthält.

Bemerkung 1.22. Der Grund, warum in Bedingung (1.1) Doppelindizes benutzt werden, ist folgender: Bei der Bildung der konvexen Hülle werden nicht immer die ersten k der Ecken benutzt. So kann eventuell auch einmal die erste, dritte und vierzehnte Ecke verwendet werden. Würde man in Bedingung (1.1) anstelle von $\operatorname{kon}(\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\})$ aber $\operatorname{kon}(\{u_0, ..., u_k\})$ schreiben, so wäre das nicht möglich.

Nach diesen Überlegungen kann das Lemma von Sperner somit auch wie folgt formuliert werden:

Lemma 1.23. *[Jac83, S. 229] (Lemma von Sperner, Version 2)*
Es sei $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_J$, $J \in \mathbb{N}$, eine simpliziale Zerlegung eines N-Simplexes $\mathcal{S}$. Jedem Punkt, der als Ecke eines Simplexes $\mathcal{S}_j$ auftritt, sei eine der Zahlen $0, 1, ..., N$ so zugeordnet, dass Folgendes gilt:

1. *An den $(N+1)$ Ecken von $\mathcal{S}$ stehen die Nummern $0, 1, ..., N$ in irgendeiner eindeutigen Zuordnung.*

2. *Ist eine Seite A eines $\mathcal{S}_j$ in einer Seite F von $\mathcal{S}$ enthalten, so kommen an den Ecken von A nur Nummern vor, die auch an den Ecken von F vorkommen.*

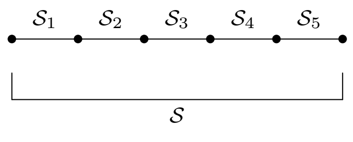
Dann gibt es eine ungerade Anzahl an j derart, dass die Ecken von $\mathcal{S}_j$ in eindeutiger Zuordnung mit den Nummern $0, 1, ..., N$ versehen sind. Insbesondere gibt es mindestens ein solches j.

Beweis. [Fox09, S. 1f.; Jac83, S. 229; Spe28, S. 3f.; Zei95, S. 57f.]
Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Dimension N.

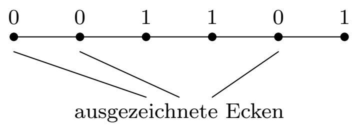
(IA) $N = 1$. Im Fall $N = 1$ handelt es sich beim Simplex $\mathcal{S}$ um eine Strecke, die in kleinere Strecken $\mathcal{S}_j$ unterteilt wird. Jedem Eckpunkt der Simplexe $\mathcal{S}_j$ wird eine Zahl 0 oder 1 zugeordnet, wobei berücksichtigt werden muss, dass eine Ecke des Simplexes $\mathcal{S}$ die Nummer 0 und die andere die Nummer 1 trägt (siehe Abb. 10).
Man bezeichnet eine Ecke von $\mathcal{S}_j$ als *ausgezeichnet*, wenn sie die Nummer 0 trägt. Dann gibt es die folgenden zwei Möglichkeiten:

1. Die Strecke $\mathcal{S}_j$ hat genau eine ausgezeichnete Ecke (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist ein Sperner Simplex).
2. Die Strecke $\mathcal{S}_j$ hat genau zwei oder keine ausgezeichneten Ecken (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist kein Sperner Simplex).

Wenn man nun von der Ecke 0 des Simplexes $\mathcal{S}$ zur Ecke 1 desselben kommen will, muss man ungerade oft die Nummer wechseln. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Sperner Simplexe ungerade ist.

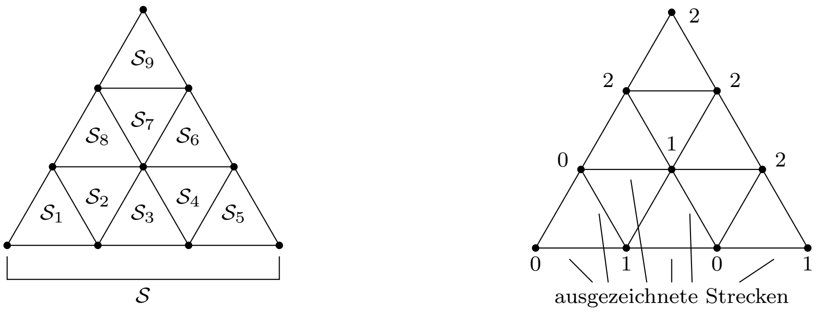


(a) Simplex mit simplizialer Zerlegung



(b) Nummerierung mit ausgez. Ecken

Abb. 10: Lemma von Sperner, 1-dimensional



(a) Simplex mit simplizialer Zerlegung (b) Nummerierung mit ausgez. Strecken

Abb. 11: Lemma von Sperner, 2-dimensional

$N = 2$. Im Fall $N = 2$ handelt es sich beim Simplex $\mathcal{S}$ um ein Dreieck, welches entsprechend den Kriterien des Lemmas 1.20 in kleinere Dreiecke $\mathcal{S}_j$ unterteilt und nummeriert ist (siehe Abb. 11).

Man bezeichnet eine Strecke von $\mathcal{S}_j$ als *ausgezeichnet*, wenn sie die Nummern 0 und 1 trägt. Dann gibt es wiederum die folgenden beiden Möglichkeiten:

Typ 1 Das Dreieck $\mathcal{S}_j$ hat genau eine ausgezeichnete Strecke (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist ein Sperner Simplex).

Typ 2 Das Dreieck $\mathcal{S}_j$ hat genau zwei oder keine ausgezeichneten Strecken (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist kein Sperner Simplex).

Nun führt man folgende Bezeichnungen ein:

- e bezeichne die Anzahl der Sperner Simplexe $\mathcal{S}_j$.
- f bezeichne die Anzahl der Dreiecke $\mathcal{S}_j$, welche die Nummern $(0, 0, 1)$ bzw. $(0, 1, 1)$ tragen.
- g bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten Strecken eines $\mathcal{S}_j$, die im Inneren des Simplexes $\mathcal{S}$ liegen.
- h bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten Strecken eines $\mathcal{S}_j$, die auf dem Rand des Simplexes $\mathcal{S}$ liegen.

Anschließend werden die ausgezeichneten Strecken im Simplex $\mathcal{S}$ gezählt:

1. Man summiert dazu über die kleinen Dreiecke $\mathcal{S}_j$: Bei jedem

Dreieck $\mathcal{S}_j$ mit den Nummern $(0, 0, 1)$ bzw. $(0, 1, 1)$ erhält man zwei ausgezeichnete Strecken, während man bei einem Sperner Simplex $\mathcal{S}_j$ nur eine ausgezeichnete Strecke bekommt.

2. Zählt man auf diese Weise, so wird jede ausgezeichnete Strecke, die im Inneren des Simplexes $\mathcal{S}$ liegt, genau zweimal gezählt. Nach der Definition einer simplizialen Zerlegung gehört nämlich jede Strecke im Inneren von $\mathcal{S}$ zu genau zwei $\mathcal{S}_j$. Ausgezeichnete Strecken, die hingegen auf dem Rand von $\mathcal{S}$ liegen, also eine Teilmenge von kon $(\{u_0, u_1\})$ sind, werden nur einmal gezählt. Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$e + 2f = 2g + h \tag{1.2}$$

3. Wegen der Bedingung (1.1) können ausgezeichnete Strecken auf dem Rand nur innerhalb der Strecke des Simplexes $\mathcal{S}$ mit den Nummern 0 und 1 vorkommen, d.h., man befindet sich im Fall $N = 1$. Bei diesem wurde aber schon bewiesen, dass die Anzahl von Sperner Simplexen ungerade ist. Damit ist h ungerade. Und deswegen muss in der Gleichung (1.2) auch e ungerade sein. Damit ist für den Fall $N = 2$ bewiesen, dass die Anzahl der Sperner Simplexe ungerade ist.

(IV) Die Aussage des Lemmas gelte nun für ein $N - 1 \in \mathbb{N}$.

(IS) $N - 1 \mapsto N$: Man hat eine simpliziale Zerlegung $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_J$, $J \in \mathbb{N}$, eines N-Simplexes $\mathcal{S}$ vorliegen. Die Ecken eines jeden $\mathcal{S}_j$ sind entsprechend den Kriterien des Lemmas 1.20 nummeriert. Man bezeichnet eine $(N - 1)$-Seite von $\mathcal{S}_j$ als *ausgezeichnet*, wenn deren Ecken die Nummern $0, 1, ..., N - 1$ tragen. Dann gibt es wiederum die folgenden beiden Möglichkeiten:

Typ 1 Das N-Simplex $\mathcal{S}_j$ hat genau eine ausgezeichnete $(N-1)$-Seite (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist ein Sperner Simplex).

Typ 2 Das N-Simplex $\mathcal{S}_j$ hat genau zwei oder keine ausgezeichneten $(N - 1)$-Seiten (d.h., $\mathcal{S}_j$ ist kein Sperner Simplex).

Nun führt man folgende Bezeichnungen ein:

- e bezeichne die Anzahl der Sperner Simplexe $\mathcal{S}_j$ (d.h. die Anzahl jener Simplexe, die an ihren Ecken alle $N+1$ Nummern $0, ..., N$ aufweisen).
- f bezeichne die Anzahl jener Simplexe $\mathcal{S}_j$, welche an ihren Ecken alle Nummern außer N tragen (d.h., sie sind mit den Nummern $0, ..., N-1$ derart beschriftet, dass genau eine dieser Nummern zweimal auftritt und alle anderen einmal).
- g bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten $(N-1)$-Seiten eines $\mathcal{S}_j$, die im Inneren des Simplexes $\mathcal{S}$ liegen.
- h bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten $(N-1)$-Seiten eines $\mathcal{S}_j$, die auf dem Rand des Simplexes $\mathcal{S}$ liegen.

Anschließend werden die ausgezeichneten $(N-1)$-Seiten im Simplex $\mathcal{S}$ gezählt:

1. Jedes Simplex $\mathcal{S}_j$, das an seinen Ecken alle Nummern $0, ..., N$ aufweist, liefert genau eine ausgezeichnete $(N-1)$-Seite. Jedes Simplex $\mathcal{S}_j$, an dessen Ecken alle Nummern außer N auftreten, liefert genau zwei $(N-1)$-Seiten.
2. Zählt man auf diese Weise, so wird jede ausgezeichnete $(N-1)$-Seite, die im Inneren des Simplexes $\mathcal{S}$ liegt, genau zweimal gezählt. Nach der Definition einer simplizialen Zerlegung gehört nämlich jede Seite im Inneren von $\mathcal{S}$ zu genau zwei $\mathcal{S}_j$. Ausgezeichnete $(N-1)$-Seiten, die hingegen auf dem Rand von $\mathcal{S}$ liegen, also eine Teilmenge von $\operatorname{kon}(\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\})$ sind, werden nur einmal gezählt. Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$e + 2f = 2g + h \tag{1.3}$$

3. Wegen der Bedingung (1.1) können ausgezeichnete $(N-1)$-Seiten auf dem Rand nur innerhalb des Simplexes $\mathcal{S}$ mit den Nummern $0, ..., N-1$ vorkommen, d.h. man befindet sich im

Fall $N-1$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt für $N-1$ bereits, dass die Anzahl von Sperner Simplexen ungerade ist. Damit ist h ungerade. Und deswegen muss in der Gleichung (1.3) auch e ungerade sein. Damit ist für den Fall N bewiesen, dass die Anzahl der Sperner Simplexe ungerade ist.

□

1.2 Der 2-dimensionale Fall

In diesem Abschnitt soll nun speziell auf den 2-dimensionalen Fall des Lemmas von Sperner eingegangen werden. Schritt für Schritt werden dabei das Lemma selbst sowie dessen Beweis anhand zahlreicher Skizzen aufgearbeitet und erklärt.[1]

Für den gesamten Abschnitt wird daher eine kleine Änderung bei der Bezeichnung der Ecken der Simplexe vorgenommen. Diese soll dazu dienen, die einzelnen Schritte besser zu veranschaulichen:

$0 \;\widehat{=}\;$ ●

$1 \;\widehat{=}\;$ ●

$2 \;\widehat{=}\;$ ●

Anstelle der Nummern 0, 1 und 2 werden in der Folge die Farben rot, blau und gelb verwendet, um die Ecken zu nummerieren bzw. zu färben.

1.2.1 Vorbereitung: Der 1-dimensionale Fall

Als Vorbereitung auf den 2-dimensionalen Fall wird zunächst der 1-dimensionale näher betrachtet.

[1]Empfehlenswert für diesen Abschnitt sind einerseits das Video *Das Spernersche Lemma* (siehe [DGW83]) und andererseits der erste Teil des Videos *A beautiful combinatorical proof of the Brouwer Fixed Point Theorem - Via Sperner's Lemma* (siehe [Baz18]).

Lemma 1.24. *(Lemma von Sperner;* 1*-dimensional)*

Voraussetzungen

Den Ausgangspunkt bildet ein 1*-Simplex, also eine Strecke.*

Diese Ausgangsstrecke wird simplizial in kleine 1*-Simplexe (sprich: Strecken) zerlegt, was Folgendes bedeutet: Alle kleinen Strecken zusammen ergeben die ursprüngliche Strecke und je zwei kleine Strecken haben entweder nichts oder eine Ecke gemeinsam.*
Links vom Text sind zwei Möglichkeiten einer solchen simplizialen Zerlegung dargestellt.
Die weiteren Schritte werden nun anhand der regelmäßigen Unterteilung der Strecke veranschaulicht, da diese etwas übersichtlicher ist. Es könnte aber auch eine Strecke mit einer beliebig anderen simplizialen Zerlegung verwendet werden.

Färbung der Ecken

Nun wird jedem Ende einer Strecke eine Farbe zugeordnet. Dabei müssen folgende Regeln beachtet werden:

Ein Eckpunkt der ursprünglichen Strecke wird mit rot gefärbt, der andere mit blau.

Die Punkte im Inneren der ursprünglichen Strecke können beliebig mit den Farben rot oder blau gefärbt werden.

Aussage des Lemmas

Sind die eben genannten Bedingungen erfüllt, so gibt es eine ungerade Anzahl an kleinen Strecken innerhalb der ursprünglichen Strecke, die an ihren Enden beide Farben rot und blau aufweisen. Insbesondere gibt es mindestens eine. Solche ausgezeichneten Strecken werden in den Skizzen mit oranger Farbe markiert.

Beweis.

Voraussetzungen

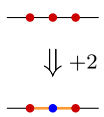
Den Ausgangspunkt stellt ein 1-Simplex, also eine Strecke, dar, die entsprechend den im Lemma 1.24 angeführten Regeln in kleine Strecken unterteilt und gefärbt ist.

Vorgehensweise

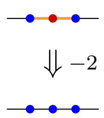
Um die Aussage beweisen zu können, werden nun alle möglichen Fälle betrachtet.

Da die ursprüngliche Strecke an ihren Endpunkten jeweils die Farbe rot bzw. blau aufweist, muss es irgendwo innerhalb der Strecke einen rot-blau-Übergang geben. Wenn man beispielsweise alle Punkte im Inneren mit rot färbt, so ist die letzte Strecke die gesuchte.

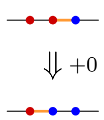
Was passiert nun aber, wenn man die Farbe eines Punktes innerhalb der ursprünglichen Strecke wechselt?
Dazu können drei Fälle unterschieden werden (Die Situation wird anhand eines ursprünglich roten Punktes veranschaulicht. Die Aussagen gelten aber gleichermaßen für einen ursprünglich blauen Punkt.):



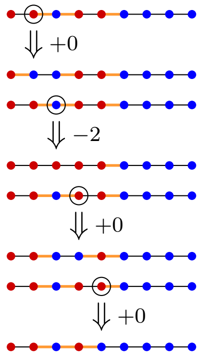
Fall 1: Ein roter Punkt, der von weiteren zwei roten Punkten umgeben ist, wird blau gefärbt.
→ 2 orange Strecken kommen dazu.



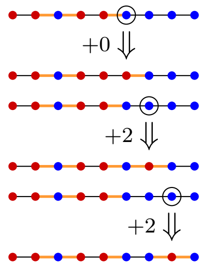
Fall 2: Ein roter Punkt, der von zwei blauen Punkten umgeben ist, wird blau gefärbt.
→ 2 orange Strecken fallen weg.



Fall 3: Ein roter Punkt, der von einem roten und einem blauen Punkt umgeben ist, wird blau gefärbt.
→ Die orange Strecke verschiebt sich um eine Position nach links oder rechts.



In den Abbildungen links und rechts des Textes ist nun zu sehen, wie sich die Änderung der Farbe eines Punktes auf die jeweilige Anzahl der orangen Strecken innerhalb der ursprünglichen Strecke auswirkt.



Man weiß nun also, dass in den ersten beiden Fällen entweder eine gerade Anzahl an orangen Strecken hinzukommt bzw. wegfällt oder, wie in Fall 3, sich nur die Position einer orangen Strecke ändert, nicht aber deren Anzahl. Aus der Tatsache, dass es immer eine orange Strecke innerhalb der ursprünglichen geben muss und den eben angestellten Überlegungen zur Veränderung der Farbe eines Punktes folgt die Aussage des Lemmas von Sperner für den 1-dimensionalen Fall. Es gibt also immer eine ungerade Anzahl an orangen Strecken innerhalb der ursprünglichen Strecke.

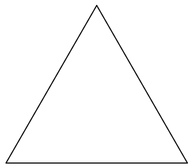
□

1.2.2 Satz und Beweis im 2-dimensionalen Fall

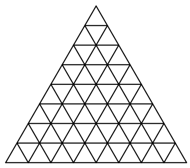
Nun kann der 2-dimensionale Fall genauer betrachtet und besprochen werden. Dazu muss zunächst das Lemma 1.23 an den 2-dimensionalen Fall angepasst werden:

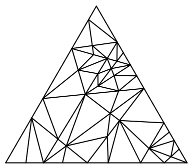
Lemma 1.25. *(Lemma von Sperner; 2-dimensional)*

Voraussetzungen



Den Ausgangspunkt bildet ein 2-Simplex, also ein Dreieck.

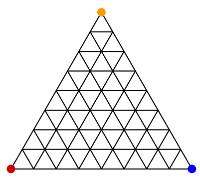




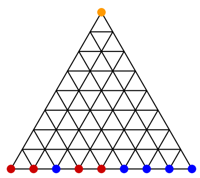
Dieses Ausgangsdreieck wird simplizial in kleine 2-Simplexe (sprich: Dreiecke) zerlegt, was Folgendes bedeutet: Alle kleinen Dreiecke zusammen ergeben das ursprüngliche Dreieck und je zwei kleine Dreiecke haben entweder eine gemeinsame Kante oder Ecke oder schneiden sich gar nicht.
Links vom Text sind zwei Möglichkeiten einer solchen simplizialen Zerlegung dargestellt.
Die weiteren Schritte werden nun anhand eines Dreiecks mit einer regelmäßigen Unterteilung in gleich große Dreiecke veranschaulicht, da dieses ewas übersichtlicher ist. Es könnte aber auch ein Dreieck mit einer beliebig anderen simplizialen Zerlegung verwendet werden.

Färbung der Ecken

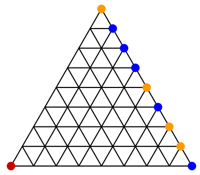
Nun wird jeder Ecke eines kleinen Dreiecks eine Farbe zugeordnet. Dabei müssen folgende Regeln beachtet werden:



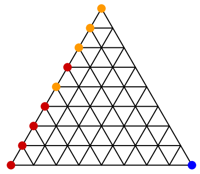
Jede Ecke des ursprünglichen Dreiecks erhält eine der Farben rot, blau und gelb, wobei jede Farbe genau einmal verwendet werden muss.



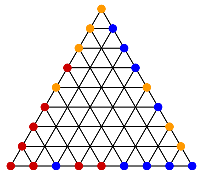
Befindet sich eine Ecke auf der rot-blau-Kante des ursprünglichen Dreiecks, so darf sie nur mit den Farben rot oder blau gefärbt werden.



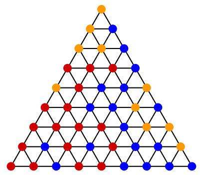
Befindet sich eine Ecke auf der blau-gelb-Kante des ursprünglichen Dreiecks, so darf sie nur mit den Farben blau oder gelb gefärbt werden.



Befindet sich eine Ecke auf der gelb-rot-Kante des ursprünglichen Dreiecks, so darf sie nur mit den Farben gelb oder rot gefärbt werden.

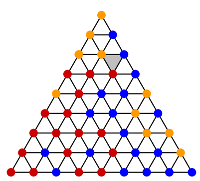


Jede Ecke, die sich auf einer Kante des ursprünglichen Dreiecks befindet, muss also mit den Farben der Eckpunkte der entsprechenden Kante gefärbt werden.



Für die Ecken im Inneren des ursprünglichen Dreiecks gelten keine Einschränkungen. Sie dürfen je nach Belieben mit allen drei Farben rot, blau und gelb gefärbt werden.

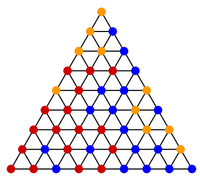
Aussage des Lemmas



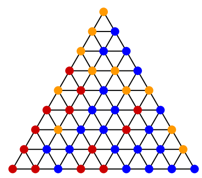
Sind die eben genannten Bedingungen erfüllt, so gibt es eine ungerade Anzahl an kleinen Dreiecken im ursprünglichen Dreieck, die an ihren Ecken alle drei Farben rot, blau und gelb aufweisen. Insbesondere gibt es mindestens eines. Solche Sperner Dreiecke werden in den Skizzen mit grauer Farbe markiert.

Beweis.

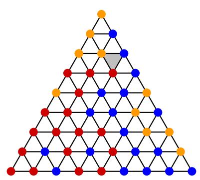
Voraussetzungen



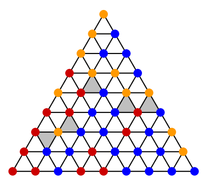
Den Ausgangspunkt stellt ein 2-Simplex, also ein Dreieck, dar, welches entsprechend den im Lemma 1.25 angeführten Kriterien in kleine Dreiecke unterteilt und gefärbt ist.
Der Beweis wird anhand zweier verschiedener Färbungen veranschaulicht. (Ist nur eine einzige Skizze auf der linken Seite abgebildet, so ist die entsprechende Überlegung für beide Färbungen gleich.)

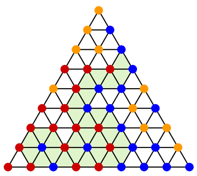


Dann wird eine neue Bezeichnung eingeführt, die das Verständnis der weiteren Schritte unterstützen soll: Eine Strecke eines kleinen Dreiecks heißt *ausgezeichnet*, wenn ihre Ecken mit den Farben rot und blau gefärbt sind.
Nun ergeben sich für die kleinen Dreiecke die folgenden beiden Möglichkeiten:



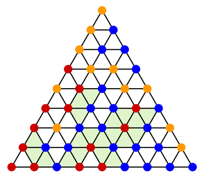
Typ 1: Ein kleines Dreieck hat genau eine (grau markiert) ausgezeichnete Strecke.
Dies ist gleichbedeutend damit, dass es sich bei dem kleinen Dreieck um ein Sperner Dreieck handelt.

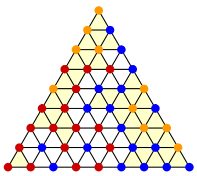




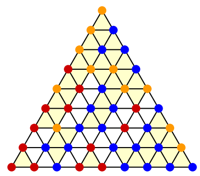
Typ 2: Ein kleines Dreieck hat:

1. genau zwei (grün markiert) oder
2. keine (gelb markiert)



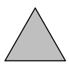


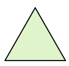
ausgezeichneten Strecken.
Dies ist gleichbedeutend damit, dass es sich bei dem kleinen Dreieck um kein Sperner Dreieck handelt.



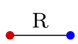
Nun führt man folgende Bezeichnungen ein:

–  bezeichne die Anzahl der kleinen Sperner Dreiecke.

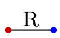




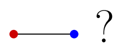
–  bezeichne die Anzahl der kleinen Dreiecke, welche zwei ausgezeichnete Strecken besitzen.



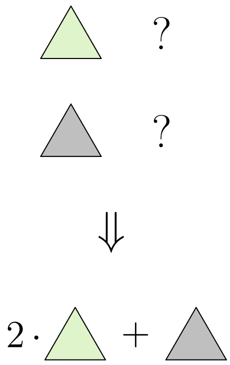
–  bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten Strecken, die im Inneren des ursprünglichen Dreiecks liegen.

–  bezeichne die Anzahl der ausgezeichneten Strecken, die auf dem Rand des ursprünglichen Dreiecks liegen.

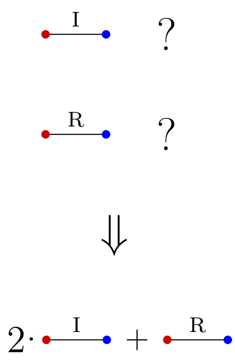
Vorgehensweise



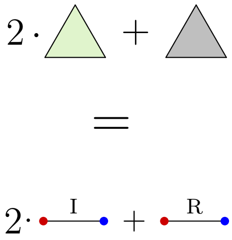
Anschließend werden die ausgezeichneten Strecken im ursprünglichen Dreieck gezählt:



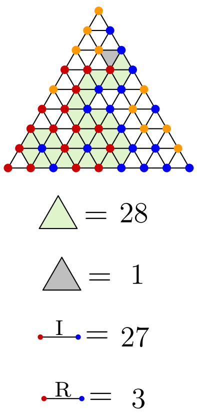
Dazu wird zunächst die Anzahl gewisser Dreiecke im ursprünglichen Dreieck bestimmt:
Zuerst zählt man die grünen Dreiecke. Da jedes dieser Dreiecke zwei ausgezeichnete Strecken enthält, muss das Ergebnis (um die Anzahl der ausgezeichneten Strecken zu erhalten) verdoppelt werden.
Dann zählt man die Anzahl der grauen Dreiecke. In diesem Fall muss das Ergebnis nicht mehr verändert werden, da jedes graue Dreieck genau eine ausgezeichnete Strecke enthält.
Anschließend werden beide Ergebnisse zusammengezählt.



Nun betrachtet man die ausgezeichneten Strecken direkt: Einige davon liegen auf dem Rand des ursprünglichen Dreiecks, andere befinden sich hingegen in seinem Inneren. Die ausgezeichneten Strecken im Inneren des Dreiecks gehören stets zu zwei kleinen Dreiecken. Daher werden sie bei einer Aufsummierung über die kleinen Dreiecke, wie sie im vorhergehenden Schritt gemacht wurde, doppelt gezählt.
Die ausgezeichneten Strecken auf dem Rand hingegen gehören nur zu einem kleinen Dreieck und werden deshalb auch nur einfach gezählt.
Wiederum bildet man die Summe der beiden Ergebnisse.



Jetzt hat man zwei Summen, was nützt einem aber dies? Sehr viel, denn die Summen entsprechen einander. In beiden Fällen wurde nämlich dieselbe Anzahl an ausgezeichneten Strecken im urprünglichen Dreieck bestimmt (Achtung: Diese muss aber nicht notwendigerweise der Gesamtanzahl der ausgezeichneten Strecken im ursprünglichen Dreieck entsprechen.)
Man hat nun die zentrale Gleichung für den Beweis gefunden.



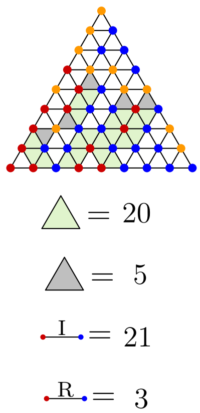
$\Downarrow$

$2 \cdot 28 + 1 = 57$

$2 \cdot 27 + 3 = 57$

✓

Betrachtet man für eine gegebene Färbung die notwendigen Objekte und zählt die grünen und grauen Dreiecke sowie die ausgezeichneten Strecken im Inneren als auch auf dem Rand des ursprünglichen Dreiecks, so kann leicht festgestellt werden, dass die Gleichung erfüllt ist und es eine ungerade Anzahl an grauen Sperner Dreiecken gibt.



$\Downarrow$

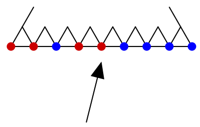
$2 \cdot 20 + 5 = 45$

$2 \cdot 21 + 3 = 45$

✓

Finale Überlegungen

Nun soll die Aussage aber unabhängig von einem Beispiel verifiziert werden. Wieso kann also allein aufgrund der Gleichung ausgesagt werden, dass es in jedem Dreieck, das entsprechend den im Lemma 1.25 angeführten Kriterien in kleine Dreiecke unterteilt und gefärbt ist, eine ungerade Anzahl an kleinen Dreiecken gibt, die an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen?



Dies folgt aus dem 1-dimensionalen Fall des Lemmas von Sperner: Auf dem Rand können ausgezeichnete Strecken nämlich nur auf der rot-blau-Kante des ursprünglichen Dreiecks liegen. Wie bereits vorher schon gezeigt wurde, ist die Anzahl der kleinen rot-blau-Strecken, die auf der großen rot-blau-Kante des ursprünglichen Dreiecks liegen, stets ungerade. Dies wiederum bedeutet, dass die Anzahl der ausgezeichneten Strecken auf dem Rand (und somit R) ungerade ist.

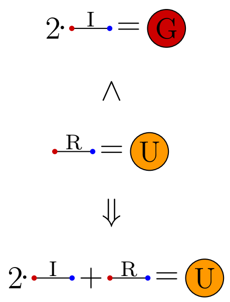
$$2 \cdot G = G$$
$$2 \cdot U = G$$

$$G + U = U$$

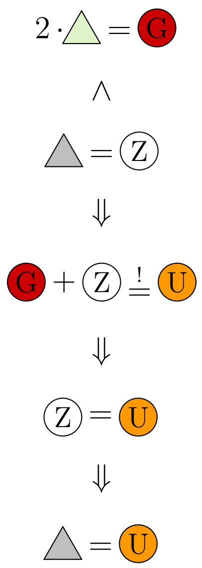
$$U = X + Y$$
$$\Downarrow$$
$$X = G$$
$$Y = U$$

Nun noch drei abschließende Überlegungen:

1. Die Verdopplung einer beliebigen natürlichen Zahl ergibt immer eine gerade Zahl.
2. Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ergibt stets eine ungerade Zahl.
3. Bildet man die Summe zweier natürlicher Zahlen und erhält als Ergebnis eine ungerade Zahl, so muss stets ein Summand gerade und ein Summand ungerade sein.



Da die Summe der ausgezeichneten Strecken im Inneren verdoppelt wird und somit stets eine gerade Zahl liefert, die Anzahl der ausgezeichneten Strecken auf dem Rand hingegen ungerade ist, muss die Summe auf der rechten Seite der Gleichung stets ungerade sein.



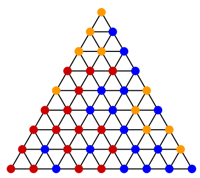
Auf der linken Seite der Gleichung findet man die folgende Struktur: Eine gerade Zahl (die sich aus der Verdopplung der Anzahl der grünen Dreiecke ergibt) wird mit einer beliebigen Zahl addiert. Das Ergebnis dieser Addition muss nach den eben gemachten Erkenntnissen ungerade sein. Um somit die Gleichung erfüllen zu können, muss die unbekannte Zahl auf der linken Seite ungerade sein. Diese entspricht aber gerade der Anzahl der grauen Dreiecke, womit die Behauptung gezeigt wurde.

Die Anzahl an jenen Dreiecken im ursprünglichen Dreieck, die an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen, ist also ungerade.

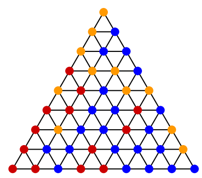
□

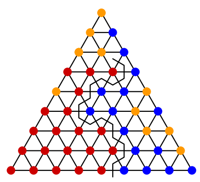
1.2.3 Verfahren zur Auffindung von Sperner Dreiecken

Abschließend zur Diskussion des 2-dimensionalen Falls des Lemmas von Sperner, soll nun noch ein Verfahren präsentiert werden, mit dem Sperner Dreiecke innerhalb des ursprünglichen Dreiecks aufgefunden werden können. Es basiert auf der Konstruktion von Wegen.

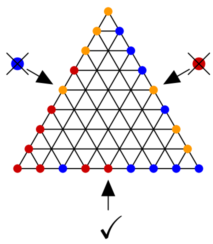


Den Ausgangspunkt stellt wiederum ein Dreieck dar, welches entsprechend den im Lemma 1.25 angeführten Kriterien in kleine Dreiecke unterteilt und gefärbt ist.
Die einzelnen Schritte werden anhand derselben beiden Färbungen, die bereits beim Beweis des 2-dimensionalen Falls des Lemmas von Sperner verwendet wurden, veranschaulicht. (Ist nur eine einzige Skizze auf der linken Seite abgebildet, so ist die entsprechende Überlegung für beide Färbungen gleich.)

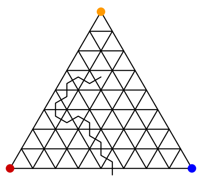




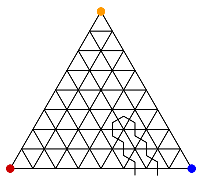
Nun werden Wege durch das ursprüngliche Dreieck konstruiert: Ein Weg ergibt sich als Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der kleinen Dreiecke. Dabei dürfen aber nur solche Kanten überschritten werden, die an einem Ende rot und am anderen blau gefärbt sind.



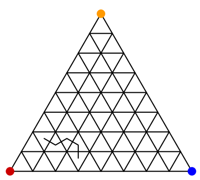
Aus der letzeren Bemerkung ergibt sich ein wichtiges Resultat: Wege können nur an einer Außenkante des ursprünglichen Dreiecks dieses verlassen, nämlich an jener, deren Enden mit den Farben rot und blau gefärbt sind. Bei den anderen beiden Außenkanten gibt es aufgrund des Kriteriums des Lemmas von Sperner, nach welchem Ecken auf der Außenkante des ursprünglichen Dreiecks nur in den Farben der Eckpunkte der entsprechenden Kanten gefärbt werden dürfen, überhaupt keine rot-blau-Kante, weswegen auch keine überschritten werden kann. Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten für Wege:



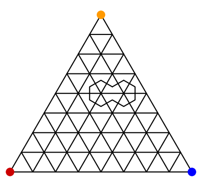
Typ 1: Der Weg beginnt an der Außenkante und endet im Inneren.



Typ 2: Der Weg beginnt an der Außenkante und endet an derselben Außenkante.

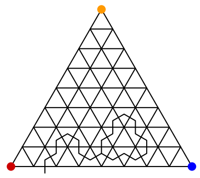


Typ 3: Der Weg beginnt im Inneren und endet im Inneren.

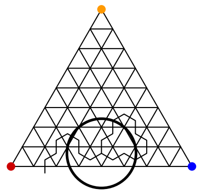


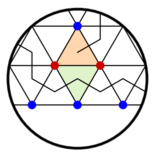
Typ 4: Der Weg beginnt und endet an derselben Stelle im Inneren: Er bildet somit einen Kreis.

Kann ein Weg innerhalb des ursprünglichen Dreiecks einen anderen kreuzen bzw. selbst eine Schleife bilden?

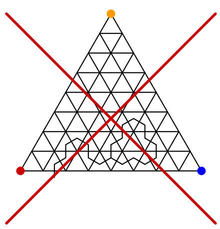


Nein. Dazu folgende Überlegung: Ein Weg kommt, wie in der nebenstehenden Abbildung veranschaulicht, von links durch eine rot-blau-Kante in ein kleines grünes Dreieck hinein und verlässt es auf der gegenüberliegenden rechten rot-blau-Kante wieder. Da bei einem Weg nur rot-blau-Kanten überschritten werden dürfen, sind die Farben an den Ecken des grünen Dreiecks fix. Sie dürfen nicht verändert werden, sonst gäbe es keinen Weg mehr durch das grüne Dreieck. (Die Farben rot und blau können gegenseitig ausgetauscht werden, was aber nichts an der Aussage ändert.)

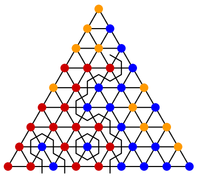




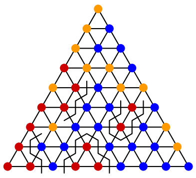
Nun kommt in das direkt darüber liegende orange Dreieck von rechts ein neuer Weg (es kann auch derselbe sein, wenn er eine Schleife beschreibt). Damit der Weg in das orange Dreieck überhaupt gemacht werden kann, muss eine rot-blau-Kante überschritten werden. Nachdem die unteren beiden Ecken bereits mit rot gefärbt sind, kann dies nur dadurch erreicht werden, wenn die obere Ecke blau gefärbt wird. Somit haben alle Ecken des orangen Dreiecks eine feste Farbe zugeteilt bekommen, welche (bis auf Vertauschung von rot und blau) nicht verändert werden darf. Damit kann es auch keinen vertikalen Weg vom orangen Dreieck ausgehend nach unten in das grüne hinein geben.

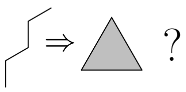


Nochmals zusammengefasst gesagt: Ein Weg muss eine rot-blau-Kante überschreiten. Die unteren Ecken des orangen Dreiecks sind jedoch aufgrund der vorhergehenden Überlegungen mit rot gefärbt, weswegen diese Kante nicht überschitten werden kann. Es sind also keine Kreuzungen von Wegen bzw. Schleifen möglich.

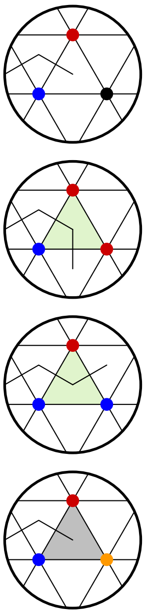


Für die gewählten Beispielfärbungen ergeben sich die dargestellten Wege.

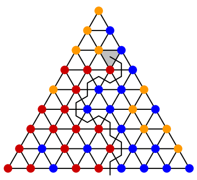




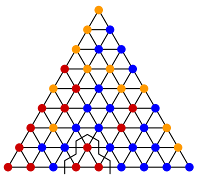
Wie kann man nun anhand der Wege auf die Anzahl der Sperner Dreiecke im ursprünglichen Dreieck schließen? Dazu folgende Überlegung:



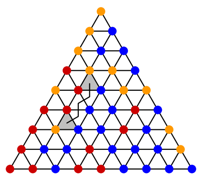
Ein Weg kann im Inneren des ursprünglichen Dreiecks nur dann enden, wenn es sich beim letzten kleinen Dreieck um ein Sperner Dreieck handelt:
Ein Weg kommt über eine rot-blau-Kante in ein Dreieck hinein, weswegen ein Eckpunkt des Dreiecks mit rot und ein anderer mit blau gefärbt sein muss. Färbt man nun den dritten Eckpunkt mit rot oder blau, so kann der Weg an einer der übriggebliebenen Kanten des Dreiecks fortgeführt werden, was aber nicht Ziel dieser Überlegung ist. Somit endet der Weg nur dann, wenn die dritte Ecke mit gelb gefärbt und das Dreieck damit ein Sperner Dreieck ist.
Damit liefert ein jeder Typ von Weg stets dieselbe Anzahl an Sperner Dreiecken:



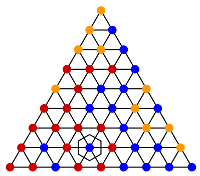
Typ 1: Der Weg beginnt an einer Außenkante und endet in einem grauen Sperner Dreieck.
→ ein graues Sperner Dreieck.



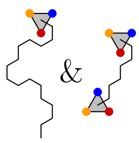
Typ 2: Der Weg beginnt an einer Außenkante und endet an einer Außenkante.
→ kein graues Sperner Dreieck.



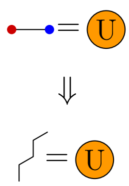
Typ 3: Der Weg beginnt in einem grauen Sperner Dreieck und endet in einem grauen Sperner Dreieck.
→ zwei graue Sperner Dreiecke.



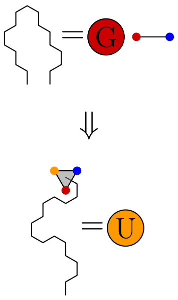
Typ 4: Der Weg bildet im Inneren des Dreiecks einen Kreis: Er beginnt und endet an derselben Stelle.
→ kein graues Sperner Dreieck.



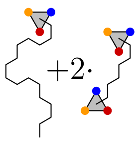
Um auf die Gesamtanzahl der grauen Sperner Dreiecke zu kommen, muss man also Wege von Typ 1 und 3 betrachten. Da die grauen Sperner Dreiecke bei Typ 3 immer paarweise auftreten, muss die Anzahl der Wege von Typ 1, also jener, die an der Außenkante beginnen und im Inneren enden, ungerade sein. Dies ergibt sich aber als direkte Konsequenz vom 1-dimensionalen Fall des Lemmas von Sperner:



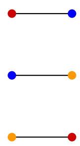
Bei der rot-blau-Außenkante des ursprünglichen Dreiecks ist die Anzahl an kleinen rot-blau-Kanten ungerade, wie im Beweis zum Lemma 1.24 gezeigt wurde. Es können also ungerade viele Wege von dort losstarten.



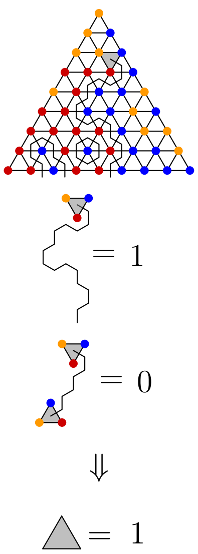
Es müssen aber nicht alle in einem Sperner Dreieck enden, einige können auch wieder zur Außenkante zurückkehren. In diesem Fall handelt es sich um Wege von Typ 2, welche immer zwei, also gerade viele rot-blau-Kanten für sich in Anspruch nehmen. Daher müssen, wenn es insgesamt eine ungerade Anzahl an rot-blau-Kanten gibt und eine gerade Anzahl dafür für Wege von Typ 2 verwendet wird, immer ungerade viele Wege übrigbleiben, die im Inneren, sprich einem grauen Sperner Dreieck, enden. Damit wurde gezeigt, dass es ungerade viele graue Sperner Dreiecke gibt und wie sie gefunden werden können.



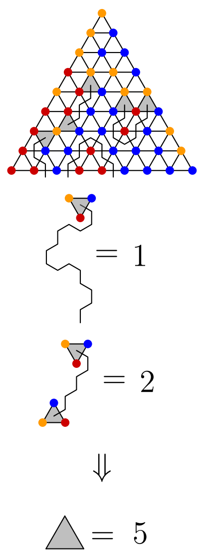
Um auf die Gesamtanzahl der grauen Sperner Dreiecke zu kommen, muss also die Anzahl der Wege von Typ 3 verdoppelt und dieses Ergebnis mit der Anzahl der Wege von Typ 1 addiert werden.



Anmerkung zum Schluss: Anstelle der rot-blau-Kanten können auch die blau-gelb-Kanten oder die gelb-rot-Kanten verwendet werden.



Die Beispielfärbung links vom Text beinhaltet ein graues Sperner Dreieck, während jene rechts fünf davon aufweist.



Kapitel 2

Brouwers Fixpunktsatz

Der Brouwersche Fixpunktsatz ist nach dem niederländischen Mathematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966) benannt, der ihn 1911 erstmals veröffentlichte. Es handelt sich dabei um einen fundamentalen Satz der modernen Mathematik, mit Hilfe dessen man Aussagen über die Existenz von Lösungen von reellen, nichtlinearen Gleichungssystemen treffen kann. Er kann auf einfache Weise formuliert und für jedermann verständlich erklärt werden.

Dazu ein Beispiel aus dem Alltag:
Die meisten von uns trinken im Laufe des Tages einen Kaffee. Stellen wir uns daher vor, wir halten eine Tasse Kaffee in unseren Händen und rühren den Kaffee sanft und kontinuierlich um. Dann stellen wir die Tasse nieder und warten, bis der Kaffee innerhalb der Tasse wieder ruhig ist, die Bewegung also aufgehört hat. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gibt es nun mindestens einen Punkt innerhalb der Tasse, der nach dem Umrühren an exakt dieselbe Stelle zurückgekehrt ist, an der er sich vor dem Umrühren befunden hat.

Die Aussage des Satzes lässt sich zwar auf einfache Weise formulieren, der Beweis erfordert jedoch einiges an mathematischem Vorwissen. [Fra80, S. 232] So sorgte Emanuel Sperner im Jahr 1928 für beträchtliche Aufregung, als er sein Lemma veröffentlichte. Mit diesem kann nämlich recht anschaulich und mit relativ einfachen Methoden der Brouwersche Fixpunktsatz bewiesen werden. [Jac83, S. 228]

2.1 Der allgemeine n-dimensionale Fall

In diesem Abschnitt wird der allgemeine n-dimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes näher betrachtet. Zunächst werden dafür Schritt für Schritt all jene Voraussetzungen dargelegt, die zwar nicht unbedingt für die Formulierung des Satzes, umso mehr aber für den Beweis unerlässlich sind. Dann wird der Satz selbst angegeben und der Beweis anhand des Lemmas von Sperner geführt.

2.1.1 Voraussetzungen

Wesentliche Begriffe im Zusammenhang mit dem Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sind zum einen all jene um die Baryzentrik, wie etwa *Baryzentrum* oder *baryzentrische Unterteilung*. Zum anderen ist das Konzept des *Homöomorphismus* grundlegend.

Baryzentrik

Definition 2.1. *[StZ88, S. 70] (Baryzentrische Koordinaten)*
*Es seien $u_0, ..., u_N \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage. Die Zahlen $\alpha_0, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$ werden als **baryzentrische Koordinaten** des Punktes*

$$u = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{N} \alpha_j = 1$$

bezüglich $u_0, ..., u_N$ bezeichnet.

Beispiel 2.2. Sind alle Zahlen $\alpha_0, ..., \alpha_N \in \mathbb{R}$ positiv, so befindet sich der Punkt

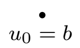
$$u = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_j$$

im Inneren eines N-Simplexes. Im Fall eines 2-Simplexes befindet sich der Punkt u am Rand des Dreiecks, falls eine baryzentrische Koordinate 0 ist.

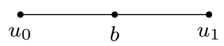
Definition 2.3. *[Zei95, S. 47] (Baryzentrum)*
Es sei $\mathcal{S}$ ein N-Simplex. Der Punkt

$$b := \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} u_j$$

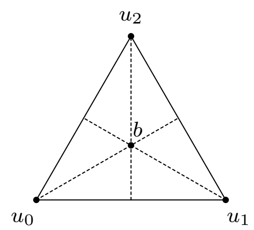
wird Baryzentrum von $\mathcal{S}$ genannt.



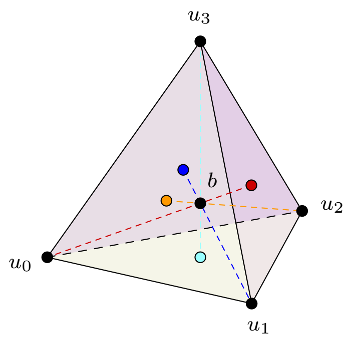
(a) BZ eines 0-Simplexes



(b) BZ eines 1-Simplexes



(c) BZ eines 2-Simplexes



(d) BZ eines 3-Simplexes

Abb. 12: Baryzentren verschiedener Simplexe

Bemerkung 2.4. [StZ88, S. 78; Toe17, S. 161] Das Baryzentrum eines Simplexes ist also dessen Schwerpunkt, sprich der Punkt, an dem alle seine baryzentrischen Koordinaten gleich sind:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_N = \frac{1}{N+1}$$

.

Beispiel 2.5. Das Baryzentrum eines 0-Simplexes ist das 0-Simplex selbst. Das Baryzentrum eines 1-Simplexes $\mathcal{S}$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\mathcal{S} = \text{kon}(\{u_0, u_1\})$. Das Baryzentrum eines 2-Simplexes entspricht dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\text{kon}(\{u_0, u_1, u_2\})$. Verbindet man jede Ecke des Tetraeders mit dem Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks, so ergibt sich als Schnittpunkt dieser vier Strecken das Baryzentrum eines 3-Simplexes (siehe Abb. 12).

Definition 2.6. *[Rot88, S. 113] (Baryzentrische Unterteilung)*
*Die **baryzentrische Unterteilung** eines N-Simplexes $\mathcal{S}$ wird wie folgt induktiv definiert:*

1. *Die baryzentrische Unterteilung eines 0-Simplexes ist das 0-Simplex selbst.*

2. *Nun wird angenommen, dass für alle höchstens $(N-1)$-Simplexe die baryzentrische Unterteilung bereits definiert ist. Es gilt:*
   Wenn $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_N$ die $(N-1)$-Seiten des N-Simplexes $\mathcal{S}$ sind und b das Baryzentrum von $\mathcal{S}$, dann besteht die baryzentrische Unterteilung von $\mathcal{S}$ aus allen N-Simplexen, welche vom Baryzentrum b und den $(N-1)$-Simplexen der baryzentrischen Unterteilung von $\mathcal{S}_i$, $i = 0, ..., N$ erzeugt werden.

Beispiel 2.7. [Rot88, S. 112f.] Im folgenden Beispiel soll die Konstruktion der baryzentrischen Unterteilungen der einfachsten N-Simplexe (Punkt, Strecke und Dreieck) Schritt für Schritt aufgearbeitet werden.

1. Die baryzentrische Unterteilung eines 0-Simplexes:
   Ein 0-Simplex entspricht einem Punkt. Sein Baryzentrum ist der Punkt selbst. Deswegen wird die baryzentrische Unterteilung eines 0-Simplexes wie in der Definition 2.6 als der Punkt selbst festgelegt.

2. Die baryzentrische Unterteilung eines 1-Simplexes:
   Ein 1-Simplex entspricht einer Strecke. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{S} = \text{kon}(\{u_0, u_1\})$ mit den Ecken u_0 und u_1 dieses 1-Simplex. Sein Baryzentrum b ist der Mittelpunkt der Strecke.

Nach Definition 2.6 sollte gelten: Wenn u_0 und u_1 0-Seiten (sprich: Ecken) des 1-Simplexes $\mathcal{S}$ sind und b das Baryzentrum von $\mathcal{S}$, dann besteht die baryzentrische Unterteilung von $\mathcal{S}$ aus allen 1-Simplexen (sprich: Kanten), welche vom Baryzentrum b und den 0-Simplexen (sprich: Ecken) der baryzentrischen Unterteilung von u_0 und u_1 erzeugt werden.
In drei Schritten wird nun die baryzentrische Unterteilung eines 1-Simplexes anhand der Definition erarbeitet:

(a) Schritt 1:
Man betrachtet zunächst die baryzentrische Unterteilung von u_0. Bei u_0 handelt es sich um einen Punkt, weswegen sich als seine baryzentrische Unterteilung der Punkt u_0 selbst ergibt.
Analog ergibt sich als baryzentrische Unterteilung des Punktes u_1 der Punkt u_1.

(b) Schritt 2:
Nun müssen noch alle Kanten gefunden werden, welche vom

i. Baryzentrum b und dem Punkt u_0 bzw. vom
ii. Baryzentrum b und dem Punkt u_1

erzeugt werden.
Entsprechend den soeben aufgezählten Fällen ergeben sich die folgenden Strecken:

i. $\mathcal{S}_0 = \text{kon}\,(\{b, u_0\})$,
ii. $\mathcal{S}_1 = \text{kon}\,(\{b, u_1\})$.

(c) Schritt 3:
Die baryzentrische Unterteilung des 1-Simplexes $\mathcal{S}$ besteht also aus der Menge der beiden 1-Simplexe $\mathcal{S}_0$ und $\mathcal{S}_1$ (siehe Abb. 13a).

3. Die baryzentrische Unterteilung eines 2-Simplexes:
Ein 2-Simplex entspricht einer Dreiecksfläche. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{S} = \text{kon}\,(\{u_0, u_1, u_2\})$ mit den Ecken u_0, u_1 und u_2 und den Kanten $\mathcal{S}_0 = \text{kon}\,(\{u_1, u_2\})$, $\mathcal{S}_1 = \text{kon}\,(\{u_0, u_2\})$ und $\mathcal{S}_2 = \text{kon}\,(\{u_0, u_1\})$ dieses

2-Simplex. Sein Baryzentrum b ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Nach Definition 2.6 sollte gelten: Wenn $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ 1-Seiten (sprich: Kanten) des 2-Simplexes $\mathcal{S}$ sind und b das Baryzentrum von $\mathcal{S}$, dann besteht die baryzentrische Unterteilung von $\mathcal{S}$ aus allen 2-Simplexen (sprich: Dreiecksflächen), welche vom Baryzentrum b und den 1-Simplexen (sprich: Kanten) der baryzentrischen Unterteilung von $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ erzeugt werden.
In drei Schritten wird nun die baryzentrische Unterteilung eines 2-Simplexes anhand der Definition erarbeitet:

(a) Schritt 1:
Man betrachtet zunächst die baryzentrische Unterteilung von $\mathcal{S}_0$. Bei $\mathcal{S}_0$ handelt es sich um ein 1-Simplex (sprich: eine Strecke). Die baryzentrische Unterteilung einer Strecke wurde bereits unter dem vorhergehenden Punkt ausführlich diskutiert. Somit ergeben sich mit dem Baryzentrum b_0 von $\mathcal{S}_0$ als baryzentrische Unterteilung der Strecke $\mathcal{S}_0$ die zwei 1-Simplexe

$$\mathcal{S}_{01} = \operatorname{kon}\left(\{b_0, u_2\}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_{02} = \operatorname{kon}\left(\{b_0, u_1, \}\right).$$

Analog ergeben sich als baryzentrische Unterteilung der Strecke $\mathcal{S}_1$ die zwei 1-Simplexe

$$\mathcal{S}_{10} = \operatorname{kon}\left(\{b_1, u_2\}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_{12} = \operatorname{kon}\left(\{b_1, u_0, \}\right)$$

sowie als baryzentrische Unterteilung der Strecke $\mathcal{S}_2$ die zwei 1-Simplexe

$$\mathcal{S}_{20} = \operatorname{kon}\left(\{b_2, u_1\}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_{21} = \operatorname{kon}\left(\{b_2, u_0, \}\right).$$

(b) Schritt 2:
Nun müssen noch alle Dreiecksflächen gefunden werden, welche vom

i. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{01} = \operatorname{kon}(\{b_0, u_2\})$ bzw. vom
ii. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{02} = \operatorname{kon}(\{b_0, u_1, \})$ bzw. vom
iii. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{10} = \operatorname{kon}(\{b_1, u_2\})$ bzw. vom
iv. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{12} = \operatorname{kon}(\{b_1, u_0, \})$ bzw. vom
v. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{20} = \operatorname{kon}(\{b_2, u_1\})$ bzw. vom
vi. Baryzentrum b und der Kante $\mathcal{S}_{21} = \operatorname{kon}(\{b_2, u_0, \})$

erzeugt werden.
Da jede Kante gleich der konvexen Hülle ihrer zwei Ecken ist, ergeben sich entsprechend den soeben aufgezählten Fällen die folgenden Dreiecksflächen:

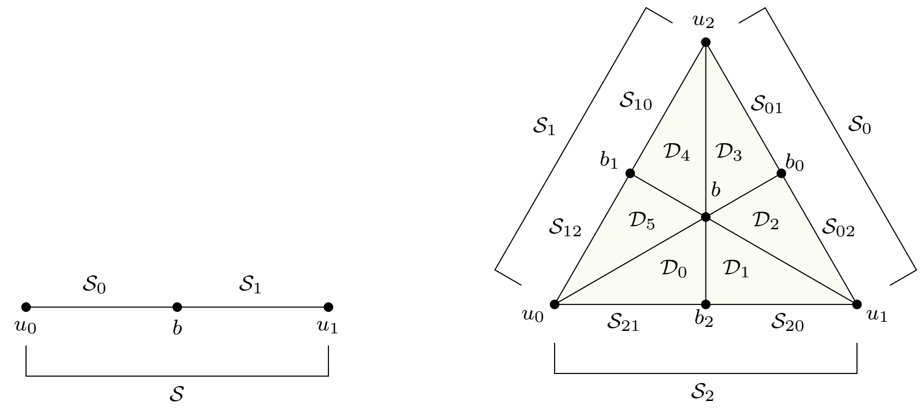
i. $\mathcal{D}_0 = \operatorname{kon}(\{b, b_2, u_0\})$,
ii. $\mathcal{D}_1 = \operatorname{kon}(\{b, b_2, u_1\})$,
iii. $\mathcal{D}_2 = \operatorname{kon}(\{b, b_0, u_1\})$,
iv. $\mathcal{D}_3 = \operatorname{kon}(\{b, b_0, u_2\})$,
v. $\mathcal{D}_4 = \operatorname{kon}(\{b, b_1, u_2\})$,
vi. $\mathcal{D}_5 = \operatorname{kon}(\{b, b_1, u_0\})$.

(c) Schritt 3:
Die baryzentrische Unterteilung des 2-Simplexes $\mathcal{S}$ besteht also aus der Menge der sechs 2-Simplexe $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ und $\mathcal{D}_5$ (siehe Abb. 13b).

Definition 2.8. *[Rot88, S. 37; Zei95, S. 47] (Durchmesser)*
Es sei $\mathcal{S} = \operatorname{kon}(\{u_0, ..., u_N\})$ *ein* N*-Simplex. Der* ***Durchmesser*** *von* $\mathcal{S}$ *ist definiert durch*

$$\delta(\mathcal{S}) := \sup_{i,j \in \{0,...,N\}} \|u_i - u_j\|.$$

Bemerkung 2.9. [ArP90, S.117] Der Durchmesser eines Simplexes entspricht also der Länge seiner längsten Kante.
In Abb. 14 ist der Durchmesser des orangen, gelben und blauen 2-Simplexes jeweils in rot dargestellt.



(a) BU eines 1-Simplexes

(b) BU eines 2-Simplexes

Abb. 13: Baryzentrische Unterteilungen

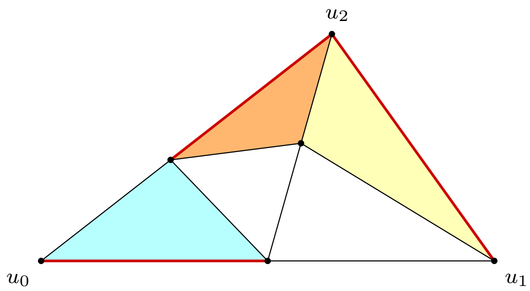


Abb. 14: Duchmesser eines 2-Simplexes

Homöomorphismus

Definition 2.10. *[Oss09, S.2] (Homöomorphismus)*
Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen sowie $f : M \to N$ eine Abbildung.
f heißt ***Homöomorphismus*** *(von M auf N), wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *f ist bijektiv.*

2. *f ist stetig.*

3. *Die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ ist stetig.*

Dann heißen M und N homöomorph, in Zeichen $M \cong N$.

Bemerkung 2.11. [BoE86, S. 17] Was kann man sich anschaulich unter einem Homöomorphismus vorstellen?
Man hat beispielsweise eine Figur A und eine Figur B aus einem sehr festen, aber elastischen Material vorliegen. Kann man nun durch beliebige Dehnungen (wie Stauchen und Strecken) und Biegungen, aber ohne die Figur zu zerschneiden, zu zerreißen oder zu verkleben, aus der Figur A die Figur B formen, sodass die beiden übereinstimmen, so sind sie homöomorph zueinander. Bei einem Homöomorphismus handelt es sich also um eine Abbildung einer Menge auf eine andere, die ohne Risse oder Verklebungen vor sich geht.

Beispiel 2.12. [BoE86, S. 18] Sind die lateinischen Buchstaben in Form einer Linie gegeben, so gilt: Die Buchstaben **C, I, J, L, M, N, S, U, V, W** sind untereinander homöomorph. Auch die Buchstaben **E, F, T, Y** sind untereinander homöomorph. Letztere sind jedoch nicht homöomorph zu der erstgenannten Gruppe. Der Buchstabe **Q** ist hingegen zu keinem der übrigen lateinischen Buchstaben homöomorph.

Satz 2.13. *[Oss09, S. 8] (Homöomorphismus zwischen Simplex und Einheitskugel)*
Es sei $\mathcal{S}$ ein N-Simplex sowie $B^N := \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| \leq 1\right\}$ die N-dimensionale Einheitskugel. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\mathcal{S} \cong B^N$, der den Rand $\partial\mathcal{S}$ von $\mathcal{S}$ homöomorph auf die $(N-1)$-dimensionale Einheitssphäre $S^{N-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\right\}$ abbildet.

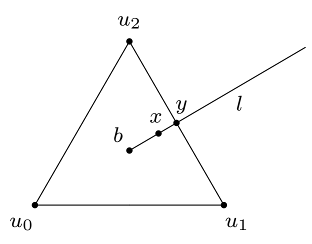


Abb. 15: Simplex mit Halbgerade

Beweis. [Oss09, S. 8; Sch64, S. 20 bzw. 166]
Es sei $N > 0$ und $u_0, ..., u_N$ seien die Eckpunkte von $\mathcal{S}$. Weiters sei $b \in \mathcal{S} \backslash \partial\mathcal{S}$, etwa der Schwerpunkt von $\mathcal{S}$: $b = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} u_j$. Ein Punkt $x \in \mathcal{S} \backslash \{b\}$ lässt sich eindeutig als Konvexkombination

$$x = b + \lambda (y - b) = (1 - \lambda) b + \lambda y$$

mit $y \in \partial\mathcal{S}$ und $\lambda \in [0, 1]$ darstellen. Mit

$$l := \{b + \mu (x - b) \,|\mu \geq 0\} = \{(1 - \mu) b + \mu x \,|\mu \geq 0\}$$

wird die Halbgerade bezeichnet, die von b ausgehend durch $x \in \mathcal{S} \backslash \{b\}$ verläuft. Dann schneidet das Simplex $\mathcal{S}$ aus jeder von b ausgehenden Halbgeraden l eine Strecke aus, deren zweiter Endpunkt auf dem Rand $\partial\mathcal{S}$ des Simplexes $\mathcal{S}$ liegt. Dieser Endpunkt bzw. Schnittpunkt vom Rand $\partial\mathcal{S}$ mit der Halbgeraden l wird mit y bezeichnet (siehe Abb. 15).
Den Homöomorphismus φ von $\mathcal{S}$ auf B^N erhält man, wenn man b mit den Randpunkten y von $\mathcal{S}$ durch Strecken verbindet und jede solche Strecke affin[1] auf den gleichgerichteten Radius von B^N abbildet. Es ergibt sich: $\varphi(x) := \frac{\lambda}{\|y-b\|}(y - b)$ (und $\varphi(b) = 0$). □

Bemerkung 2.14. Anschaulich erklärt, ergibt sich der Homöomorphismus zwischen einem Simplex und der Kugel wie folgt: Man legt eine Kugel um das Simplex und streckt letzteres so nach außen, dass der Rand des Simplexes auf den Rand der Kugel abgebildet wird. Dies kann man sich so vorstellen: Man pustet Luft hinein, bis das Simplex wie eine Kugel aussieht. Die Kugel kann dann noch zum Nullpunkt verschoben werden.

[1]Eine affine Abbildung erhält

- Kollinearität: Bilder von kollinearen Punkten sind wieder kollinear (d.h. Bilder von Punkten, die auf einer Geraden liegen, liegen wieder auf einer Geraden) [Sch17, S. 18f.],
- Parallelität: Bilder von parallelen Geraden sind wieder parallel [Sch17, S. 21] und
- Teilverhältnisse: Das Teilverhältnis der Bilder von drei kollinearen Punkten entspricht dem Teilverhältnis der drei kollinearen Punkte [Sch17, S. 23f.].

Weitere notwendige Bedingungen

Definition 2.15. *(Fixpunkt)*
*Es sei M eine Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Fixpunkt** von f, wenn $f(x) = x$ gilt.*

Satz 2.16. *(Beschränktheit eines Simplexes)*
Das N-Simplex $\mathcal{S}$ ist beschränkt.

Beweis. Die Beschränktheit eines N-Simplexes $\mathcal{S}$ folgt unmittelbar aus der Definition desselben. □

Bemerkung 2.17. Ein N-Simplex $\mathcal{S}$ ist nicht nur beschränkt, sondern auch abgeschlossen, woraus die Kompaktheit von $\mathcal{S}$ folgt (siehe [Sch64, S. 166]).

2.1.2 Satz und Beweis

Die Aussage des Brouwerschen Fixpunktsatzes kann nun kurz und prägnant in zwei Zeilen formuliert werden. Für den Beweis desselben ist hingegen etwas mehr Platz nötig. Wie im folgenden Abschnitt nämlich ersichtlich wird, bedarf es mehrerer Schritte, um den Satz vollständig beweisen zu können.

Satz 2.18. *[Tom91, S. 72] (Brouwerscher Fixpunktsatz)*
Jede stetige Abbildung $f : B^N \to B^N$ einer N-dimensionalen Kugel auf sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt (also einen Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird).

Beweis. [AiZ18, S. 229f.; Fox09, S. 2f.]
Nach Satz 2.13 existiert ein Homöomorphismus zwischen einer N-dimensionalen Kugel B^N und einem N-Simplex $\mathcal{S}$. Daher genügt es im Folgenden, anstelle der stetigen Abbildung $f : B^N \to B^N$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ zu betrachten und zu zeigen, dass letztere mindestens einen Fixpunkt besitzt. Der Einfachheit halber wird die stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ wieder mit f bezeichnet.
Dazu sei $\mathcal{S}$ ein N-Simplex mit den Ecken $u_0 = (1, 0, ..., 0)$, $u_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $u_N = (0, ..., 0, 1)$ und $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ eine stetige Abbildung. Man zeigt die

Behauptung nun mittels Widerspruch.
Die Annahme lautet: Die stetige Abbildung f besitzt keinen Fixpunkt.

Schritt 1: Konstruktion einer geeigneten Folge von simplizialen Zerlegungen

Zunächst konstruiert man eine Folge $(\mathcal{Z}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von simplizialen Zerlegungen von $\mathcal{S}$ so, dass die Folge der maximalen Durchmesser $(\delta(\mathcal{Z}_j))_{j\in\mathbb{N}}$ für $j \to \infty$ gegen 0 konvergiert ($\delta(\mathcal{Z}_j)$ bezeichne dabei das Maximum der Durchmesser aller Simplexe in $\mathcal{Z}_j$). Eine solche Folge erhält man induktiv, indem man für jedes $\mathcal{Z}_{j+1}$ die baryzentrische Unterteilung aller Simplexe von $\mathcal{Z}_j$ wählt.

Schritt 2: Definition einer geeigneten Nummerierung von $\mathcal{S}_j$

Nun werden alle Ecken $x = (x_0, ..., x_N) \in \mathcal{Z}_j$ nach einer gewissen Regel durchnummeriert: Jeder Ecke x wird eine Nummer $\lambda(x) \in \{0, ..., N\}$ so zugeordnet, dass $\lambda(x) := \min \{i \in \{0, ..., N\} \,|\, f(x)_i < x_i\}$ der kleinste Index i ist, für den die i-te Koordinate von $f(x) - x < 0$ ist.
Dies ist deshalb möglich, weil für jeden Punkt $x \in \mathcal{S}$ sowohl die Summe seiner baryzentrischen Koordinaten als auch die Summe der baryzentrischen Koordinaten seiner Funktionswerte eins ergibt:

$$\forall x \in \mathcal{S} : \sum_{i=0}^{N} x_i = 1 \wedge \sum_{i=0}^{N} f(x)_i = 1.$$

Wenn $f(x) = x$, dann hat man den Fixpunkt gefunden und ist fertig. (In diesem Fall ist $f(x) - x = 0$, alle Koordinaten von $f(x) - x$ entsprechen also einander. Damit gibt es keinen kleinsten Index i, für den die i-te Koordinate von $f(x) - x < 0$ ist.)
Wenn nun aber $f(x) \neq x$ ist, dann gibt es mindestens eine Koordinate von $f(x) - x$ so, dass $f(x) - x < 0$ ist (aber auch mindestens eine so, dass $f(x) - x > 0$).

Schritt 3: Genügt die Nummerierung den Kriterien des Lemmas von Sperner?

1. Jede Ecke u_i muss die Nummer i erhalten, weil die i-te Koordinate von

$f(u_1) - u_1$ die einzig mögliche ist, für welche die Bedingung $f(u_1) - u_1 < 0$ erfüllt ist.
Damit ist Bedingung 1 von Lemma 1.23 erfüllt.

2. Es sei nun x eine beliebige Ecke auf jener Seite von $\mathcal{S}$, die der Ecke u_i gegenüberliegt. Dann ist seine baryzentrische Koordinate $x_i = 0$ (weil die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes einer Seite von $\mathcal{S}$, deren Nummern nicht an den Ecken dieser Seite vorkommen, 0 sind). Weil $f(x) \in \mathcal{S}$ und deswegen alle seine baryzentrischen Koordinaten $f(x)_i \geq 0$ sind, kann die i-te Koordinate von $f(x) - x$ nicht negativ sein. Somit kann x die Farbe i nicht erhalten.
Damit ist Bedingung 2 von Lemma 1.23 erfüllt.

Die Nummerierung genügt also den Anforderungen des Lemmas von Sperner.

Schritt 4: Konvergenz
Nach dem Lemma von Sperner besitzt jede simpliziale Zerlegung $\mathcal{Z}_j$ von $\mathcal{S}$ eine ungerade Anzahl (und somit gewiss ein einziges Stück) an Sperner Simplexen mit den Ecken $x^{(j,0)}, ..., x^{(j,N)}$ und $\lambda\left(x^{(j,i)}\right) = i$.
Man erhält nun eine Folge von Punkten $\left(x^{(j,0)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, welche aber nicht konvergieren muss. Da $\mathcal{S}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß jedoch eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(j_k,0)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. Ersetzt man die Folge der $\mathcal{Z}_j$ durch die entsprechende Teilfolge $\left(\mathcal{Z}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, dann kann angenommen werden, dass $\left(x^{(j,0)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $x \in \mathcal{S}$ konvergiert. Der jeweilige Abstand von $x^{(j,i)}$ mit $i = 1, ..., N$ zu $x^{(j,0)}$ ist höchstens so groß wie das Maximum der Durchmesser aller Simplexe in $\mathcal{Z}_j$, also $\delta\left(\mathcal{Z}_j\right)$. Da die Folge der maximalen Durchmesser $\left(\delta\left(\mathcal{Z}_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ für $j \to \infty$ nach Voraussetzung gegen 0 konvergiert, wird der jeweilige Abstand von $x^{(j,i)}$ mit $i = 1, ..., N$ zu $x^{(j,0)}$ beliebig klein. Dies bedeutet, dass auch alle anderen Folgen $\left(x^{(j,i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ für $i = 1, ..., N$ gegen den Punkt $x \in \mathcal{S}$ konvergieren, sprich

$$\forall i \in \{0, ..., N\} : \lim_{j\to\infty} x^{(j,i)} = x.$$

Schritt 5: Widerspruch

Zu Beginn des Beweises wurde die Annahme getroffen, dass die stetige Abbildung f keinen Fixpunkt besitzt, also $\forall x \in \mathcal{S} : f(x) \neq x$. Wie bereits unter Schritt 2 bemerkt wurde, ist dies gleichbedeutend damit, dass mindestens eine der i Koordinaten von $f(x) - x$ größer als 0 ist. (Da die Summe der Koordinaten sowohl von $f(x)$ als auch von x gleich 1 und die Summe der Koordinaten der Differenz folglich 0 ist, muss mindestens eine der i Koordinaten negativ sowie mindestens eine positiv sein.)

Nun ist aber für alle $j \in \mathbb{N}$ die 0-te Koordinate von $f\left(x^{(j,0)}\right)$ kleiner als die von $x^{(j,0)}$. Nur so wird nämlich die für die Nummerierung der $\mathcal{Z}_j$ kennzeichnende Bedingung, dass 0 der kleinste Index i ist, für welchen $f\left(x^{(j,i)}\right) - x^{(j,i)} < 0$ ist, erfüllt. Es gilt nun also $f\left(x^{(j,0)}\right) - x^{(j,0)} < 0$, was gleichbedeutend mit $f\left(x^{(j,0)}\right) < x^{(j,0)}$ ist. Da dies für alle Glieder der Folgen $\left(x^{(j,0)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(f\left(x^{(j,0)}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ erfüllt ist, gilt es auch für alle Glieder der entsprechenden konvergierenden Teilfolgen $\left(x^{(j_k,0)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(f\left(x^{(j_k,0)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Ersetzt man die Folge der $\mathcal{Z}_j$ durch die entsprechende konvergierende Teilfolge $\left(\mathcal{Z}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ergibt sich also:

$$\forall j \in \mathbb{N} : f\left(x^{(j,0)}\right) < x^{(j,0)}. \tag{2.1}$$

Nach Schritt 4 weiß man aber auch das Folgende:

$$\lim_{j\to\infty} x^{(j,0)} = x \tag{2.2}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f kann nun der Grenzwert mit der Funktionsauswertung vertauscht werden und es gilt:

$$f(x) \overset{(2.2)}{=} f\left(\lim_{j\to\infty} x^{(j,0)}\right) \overset{\text{Stet. v. } f}{=} \lim_{j\to\infty} f\left(x^{(j,0)}\right) \overset{(2.1)}{\leq} \lim_{j\to\infty} x^{(j,0)} \overset{(2.2)}{=} x$$

Die 0-te Koordinate von $f(x)$ ist also kleiner oder gleich[2] der von x. Dasselbe gilt für alle N Koordinaten. Folglich ist keine der Koordinaten von $f(x) - x$

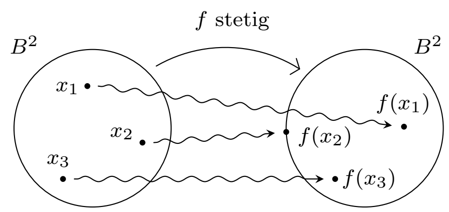
[2]Dass hier auch Gleichheit zugelassen ist, ergibt sich aus folgender Tatsache: Wenn die strikte Ungleichung für jedes Folgenglied gilt, so gilt sie im Limes nur noch schwach.

positiv, was ein Widerspruch zur Annahme $f(x) \neq x$ ist.
Daher wurde gezeigt, dass es einen Fixpunkt x mit $f(x) = x$ gibt. □

2.2 Der 2-dimensionale Fall

Wie bereits das Lemma von Sperner soll nun auch der Brouwersche Fixpunktsatz samt Beweis im 2-dimensionalen Fall Schritt für Schritt durchgearbeitet werden.[3]
Dazu muss zunächst einmal die Formulierung des Satzes angepasst werden. Der Brouwersche Fixpunktsatz für die Dimension 2 lautet:

Satz 2.19. *(Brouwerscher Fixpunktsatz; 2-dimensional)*
Jede stetige Abbildung $f : B^2 \to B^2$ einer Kreisscheibe auf sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt.



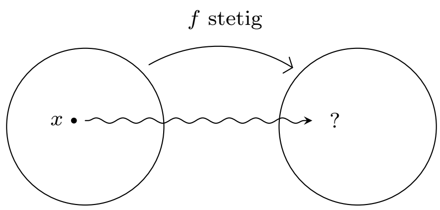
Man hat also eine bestimmte stetige Abbildung zwischen zwei Kreisscheiben, die einem Punkt der Kreisscheibe einen anderen Punkt der Kreisscheibe zuordnet. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gibt es nun irgendwo innerhalb der Kreisscheibe mit Sicherheit einen Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird. Im Beispiel nebenan wäre das der Punkt x_3.

Der Beweis für den 2-dimensionalen Fall wird nun schrittweise in Anlehnung an jenen des n-dimensionalen Falls geführt. Zahlreiche Skizzen veranschaulichen dabei die verschiedenen Gedankengänge und sollen so das Verständnis erleichtern bzw. unterstützen.

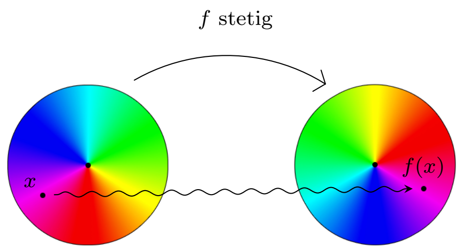
[3] Empfehlenswert ist hierzu der zweite Teil des Videos *A beautiful combinatorical proof of the Brouwer Fixed Point Theorem - Via Sperner's Lemma* (siehe [Baz18]).

Beweis. [Baz18]

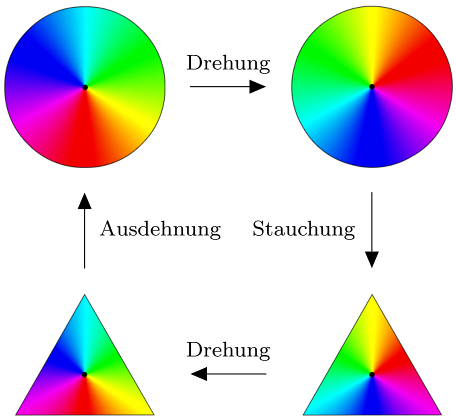
Vorüberlegungen



Die Ausgangslage ist folgende: Man hat eine Kreisscheibe und eine stetige Abbildung darauf und interessiert sich nun dafür, wo die Punkte x der Kreisscheibe abgebildet werden (insbesondere, ob es einen Punkt x gibt, für den $f(x) = x$ gilt).



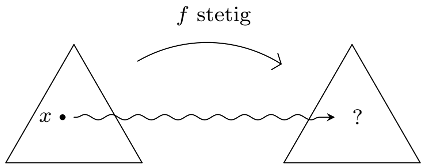
Bei der stetigen Abbildung könnte es sich beispielsweise um die Rotation (in diesem Fall um 120° im positiven Sinne) handeln: Einem Punkt x der Kreisscheibe wird der Punkt $f(x)$, der sich durch eine Drehung von x um den Mittelpunkt der Kreisscheibe ergibt, zugeordnet.
Man erkennt, dass sich in diesem Beispiel der Mittelpunkt der Kreisscheibe unter der Abbildung nicht ändert und somit den Fixpunkt darstellt.



Für den Beweis ist folgende Tatsache grundlegend: Es gibt einen Homöomorphismus zwischen einer Kreisscheibe und einem 2-Simplex, also einem Dreieck. Das bedeutet, dass es egal ist, ob man die notwendigen Rechenoperationen in der Kreisscheibe oder im Dreieck ausführt. Man kann nämlich beide Objekte ineinander überführen ohne am Ergebnis etwas zu verändern.

Am Beispiel der stetigen Funktion der Rotation kann man sich dies wie folgt vorstellen: Man hat eine Kreisscheibe und dreht sie um einige Grade um ihren Mittelpunkt. Anschließend staucht man sie zu einem Dreieck zusammen und führt eine Drehung innerhalb des Dreiecks aus. Wenn man schlussendlich das Dreieck wieder ausdehnt, erhält man die ursprünglichen Kreisscheibe.

Die (komplizierte) stetige und bijektive Abbildung, die für diese Zusammenstauchung und anschließende Ausdehnung verantwortlich ist, nennt man Homöomorphismus.



Aufgrund dieses Homöomorphismus kann beim Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes anstelle der stetigen Abbildung zwischen zwei Kreisscheiben eine stetige Abbildung zwischen zwei 2-Simplexen, also zwei Dreiecke, betrachtet werden.

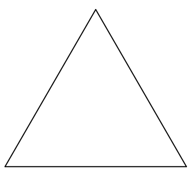
Beweis mittels Widerspruch

$$\lightning - \text{Ann.:}$$
$$\forall x \in \triangle : f(x) \neq x$$

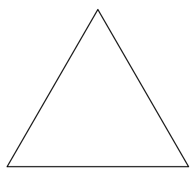
Der Beweis wird nun mittels Widerspruch geführt. Dazu wird folgende Annahme getroffen:
Die stetige Abbildung f auf einem 2-Simplex besitzt keinen Fixpunkt.

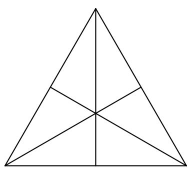
Konstruktion einer Folge von Zerlegungen

Die weiteren Schritte des Beweises werden nun anhand zweier verschiedener Zerlegungen veranschaulicht: Links vom Text wird das Ausgangsdreieck baryzentrisch zerlegt, rechts hingegen erfolgt eine gleichmäßige Unterteilung in gleichseitige Dreiecke. (Ist nur eine Skizze auf der linken Seite abgebildet, so ist die entsprechende Überlegung für beide Zerlegungen gleich.)

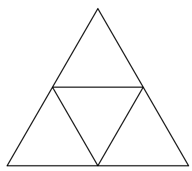


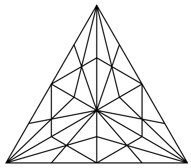
Den Ausgangspunkt bildet ein 2-Simplex, also ein Dreieck, mit den Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.



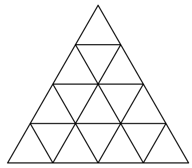


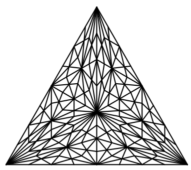
Dieses Dreieck wird dann in mehrere kleine Dreiecke unterteilt, wobei beachtet werden muss, dass der Schnitt zweier kleiner Dreiecke entweder leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante ist.



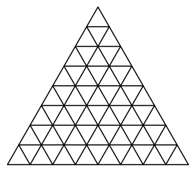


Anschließend wird jedes kleine Dreieck wiederum nach denselben Regeln in noch kleinere Dreiecke unterteilt. Das ursprüngliche Dreieck wird also ein zweites Mal zerlegt...





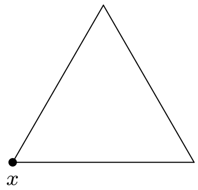
...und ein drittes Mal. Dies wiederholt man nun unendlich oft. Mit jeder weiteren Unterteilung werden die Dreiecke (oder genauer gesagt: die längsten Kanten der Dreiecke) kleiner und kleiner, bis sie schließlich gegen 0 gehen. Unterteilt man das ursprüngliche Dreieck also nach denselben Regeln immer wieder und wieder, so erhält man eine Folge von Zerlegungen so, dass die entsprechende Folge der längsten Kanten gegen 0 konvergiert.



Definition einer Färbung der Ecken, die den Anforderungen des Lemmas von Sperner genügt

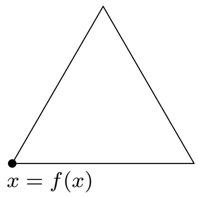
Nun werden alle Ecken im Dreieck gefärbt. Anstelle der Nummern 0, 1 und 2 werden dabei (wie beim Beispiel vom Lemma von Sperner) die drei Farben rot, blau und gelb gewählt. Folgende Regeln müssen bei der Färbung beachtet werden:

Eine Ecke erhält die Farbe...
...rot, wenn 0 der kleinste Index i ist, für den die i-te Koordinate von $f(x) - x < 0$ ist.
...blau, wenn 1 der kleinste Index i ist, für den die i-te Koordinate von $f(x) - x < 0$ ist.
...gelb, wenn 2 der kleinste Index i ist, für den die i-te Koordinate von $f(x) - x < 0$ ist.



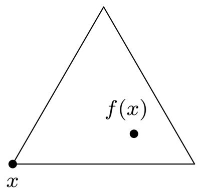
Zuerst werden die Ecken des ursprünglichen Dreiecks betrachtet: Dazu sei x zunächst die linke untere Ecke, welche nach Voraussetzung die Koordinaten $(1, 0, 0)$ besitzt. Dann gibt es 2 Möglichkeiten:

Ist $f(x) = x$, so ergibt die Differenz

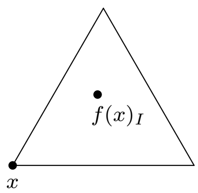


$$f(x) - x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

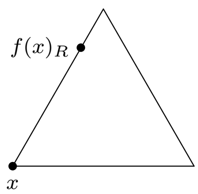
womit kein Index i existiert, für den $f(x) - x < 0$ ist. Der Fixpunkt wurde also bereits gefunden und entspricht der linken unteren Ecke.



Ist nun aber $f(x) \neq x$, dann ist $f(x)$ ein Punkt irgendwo innerhalb des ursprünglichen Dreiecks (Rand einbegriffen) und alle seine baryzentrischen Koordinaten sind größer oder gleich 0. Deswegen spielt es auch keine Rolle, wo genau der Punkt $f(x)$ im Dreieck liegt. Denn egal, welchen Punkt man für $f(x)$ wählt, es wird immer die erste Koordinate von $f(x) - x$ diejenige sein, die negativ ist.

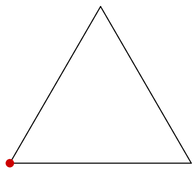


Als Beispiel werden nun ein $f(x)_I$ im Inneren und ein $f(x)_R$ auf dem Rand des Dreiecks ausgewählt und die jeweiligen Differenzen $f(x) - x$ betrachtet. Es ergibt sich:

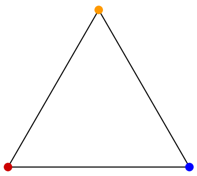


$$f(x)_I - x = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.24 \\ 0.45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.69 \\ 0.24 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

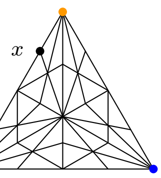
$$f(x)_R - x = \begin{pmatrix} 0.37 \\ 0 \\ 0.63 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.63 \\ 0 \\ 0.63 \end{pmatrix}$$



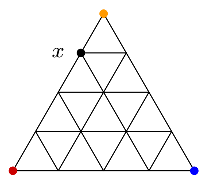
Somit ist 0 der kleinste Index, für den die Bedingung $f(x) - x < 0$ erfüllt ist. Nach der vorhergehenden Definition der einzelnen Farben wird die linke untere Ecke also mit rot gefärbt.

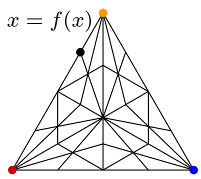


Dieselbe Überlegung für die anderen beiden Eckpunkte führt dazu, dass die rechte untere Ecke blau und die obere mittlere Ecke gelb gefärbt wird.
Dieses Dreieck erfüllt zugleich die erste Bedingung des Lemmas von Sperner, wonach alle drei Ecken des ursprünglichen Dreiecks auf eindeutige Weise mit drei verschiedenen Farben gefärbt sein müssen.

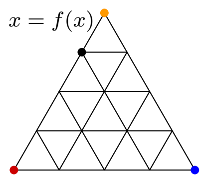


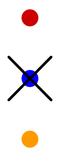
In einem zweiten Schritt werden die Ecken der Zerlegungen betrachtet, die auf den Kanten des ursprünglichen Dreiecks liegen: Dazu sei x zunächst die Ecke, die auf der Verbindungsstrecke zwischen der rot- und gelbgefärbten Ecke des ursprünglichen Dreiecks liegt und die Koordinaten $(0.25, 0, 0.75)$ besitzt. Wiederum gibt es zwei Möglichkeiten:



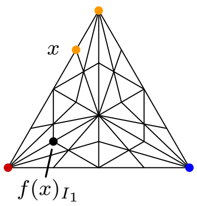


Gilt $f(x) = x$, so wurde der Fixpunkt bereits gefunden, da kein Index i existiert, für den $f(x) - x < 0$ ist.

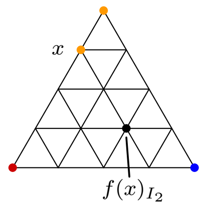


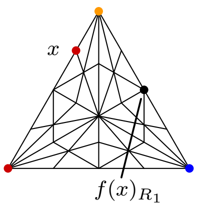


Ist hingegen $f(x) \neq x$, so ergibt sich die Farbe der Ecke x aus der Differenz $f(x) - x$ und ist somit abhängig von der Lage des Punktes $f(x)$ im ursprünglichen Dreieck. Sie kann jedoch mit Sicherheit niemals blau sein.
Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Alle baryzentrischen Koordinaten von $f(x)$ sind größer oder gleich 0, weil sich $f(x)$ im Inneren oder auf dem Rand des ursprünglichen Dreiecks befindet. Die erste (Achtung: Die Koordinaten sind nicht in der üblichen Reihenfolge mit „erster“, „zweiter“ und „dritter“ Koordinate nummeriert, sondern mit „nullter“, „erster“ und „zweiter“!) baryzentrische Koordinate der Ecke x ist hingegen immer gleich 0, weil sie auf der Kante des ursprünglichen Dreiecks liegt, die von der roten bzw. gelben Ecke begrenzt wird. Wenn nun die Differenz $f(x) - x$ berechnet wird, so ist deren erste Komponente also entweder positiv oder 0.
Folglich kann 1 niemals der kleinste Index sein, für den $f(x) - x < 0$ ist und damit scheidet blau als mögliche Farbe der Ecke aus.
Die Ecke x kann also nur mit gelb oder rot gefärbt werden.



Die Situation kann für unterschiedliche $f(x)$ durchgespielt werden. An dieser Stelle werden als Beispiel vier verschiedene $f(x)$ ausgewählt (je zwei im Inneren und auf dem Rand) und die Rechnungen exemplarisch vorgeführt:



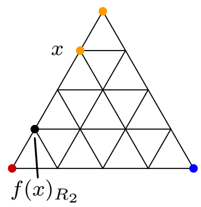


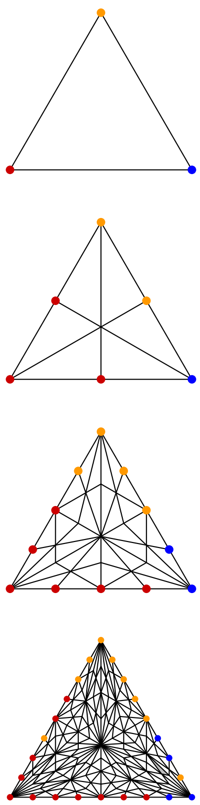
$$f(x)_{I_1} - x = \begin{pmatrix} 0.66 \\ 0.17 \\ 0.17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.17 \\ -0.58 \end{pmatrix} \to \text{gelb}$$

$$f(x)_{R_1} - x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.50 \\ 0.50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.50 \\ -0.25 \end{pmatrix} \to \text{rot}$$

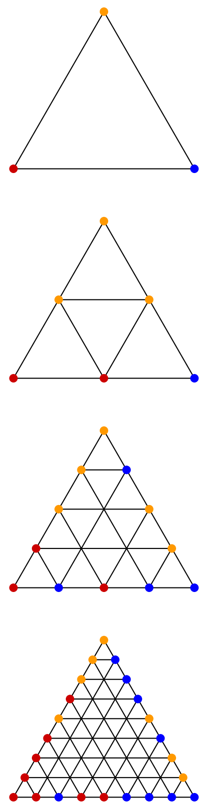
$$f(x)_{I_2} - x = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.50 \\ 0.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.50 \\ -0.50 \end{pmatrix} \to \text{gelb}$$

$$f(x)_{R_2} - x = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0 \\ -0.50 \end{pmatrix} \to \text{gelb}.$$

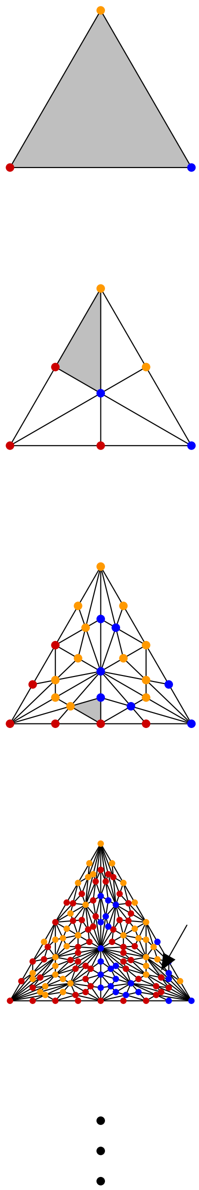




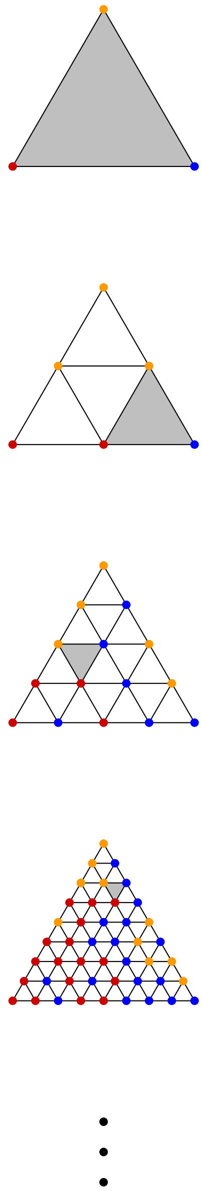
Dieselbe Überlegung für Ecken auf den anderen beiden Kanten des ursprünglichen Dreiecks führt dazu, dass die Ecken auf der rot-blau-Kante mit den Farben rot oder blau und die Ecken auf der blau-gelb-Kante mit den Farben blau oder gelb gefärbt werden müssen.
Damit erfüllt das Dreieck auch die zweite Bedingung des Lemmas von Sperner, wonach alle Ecken auf Kanten des ursprünglichen Dreiecks mit den Farben gefärbt werden müssen, die an den Ecken der entsprechenden Kanten auftreten.

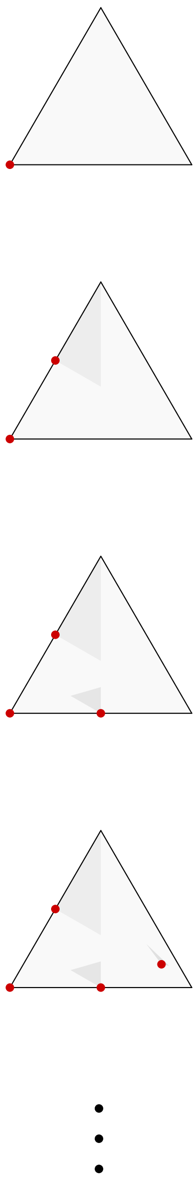


Konvergenz

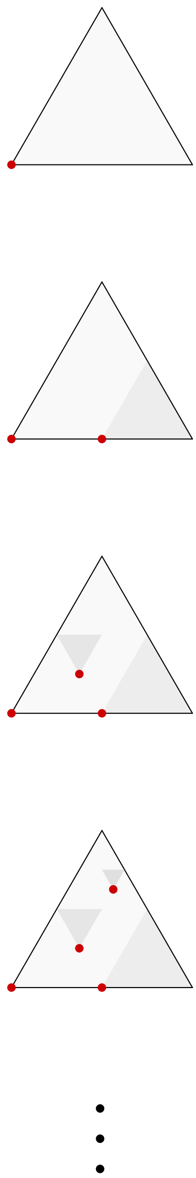


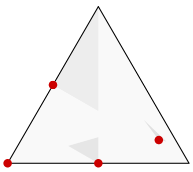
Wie in den vorhergehenden Schritten gezeigt wurde, genügt die Färbung des Dreiecks den Anforderungen des Lemmas von Sperner. Nach ebendiesem besitzt jede Zerlegung des ursprünglichen Dreiecks eine ungerade Anzahl an kleinen Dreiecken, deren Ecken alle drei Farben aufweisen (solche Sperner Dreiecke werden in den Skizzen mit grauer Farbe markiert). Folglich besitzt jede Zerlegung mit Sicherheit ein solches graues Dreieck. Da das ursprüngliche Dreieck nach Voraussetzung unendlich oft unterteilt wird und jede Zerlegung nach dem Lemma von Sperner ein solches Sperner Dreieck enthält, erhält man eine unendliche Folge von immer kleiner werdenden grauen Dreiecken, die irgendwo im ursprünglichen Dreieck liegen.

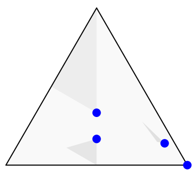


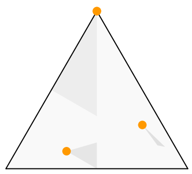


Betrachtet man nun nur die roten Punkte dieser grauen Sperner Dreiecke, so erkennt man, dass es sich dabei um eine unendliche Folge von Punkten handelt, die aber nicht konvergieren muss. Das Lemma von Sperner sagt nämlich nichts über die genaue Lage der grauen Sperner Dreiecke innerhalb des ursprünglichen Dreiecks (und damit die Lage der entsprechenden roten Punkte) aus: Man weiß, dass sich mit Sicherheit eines in jeder Zerlegung befindet, aber wo es genau liegt, kann nicht gesagt werden. Kurz gesagt: Die grauen Sperner Dreiecke springen ohne Ordnung überall innerhalb des ursprünglichen Dreiecks herum.



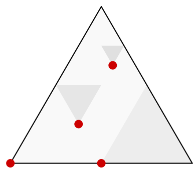


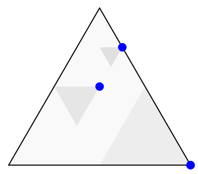


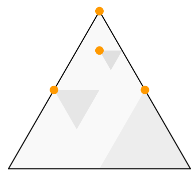


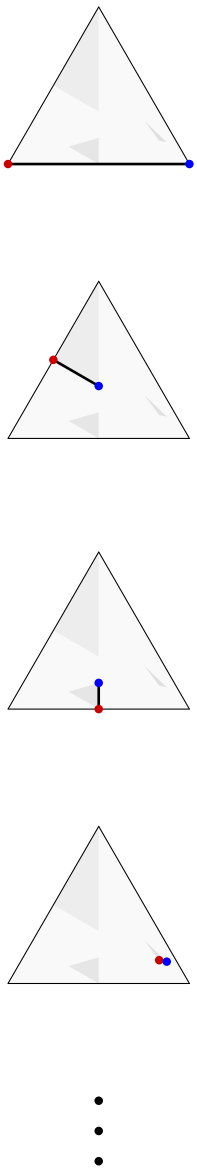
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt aber jeder beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Da sich alle roten Punkte im Inneren des ursprünglichen Dreiecks befinden und diesem nicht entkommen können, ist die Folge der roten Punkte durch den Rand des Dreiecks beschränkt. Damit gibt es eine unendliche Teilmenge dieser roten Punkte, die sich in unmittelbarer Nähe von einem bestimmten Punkt befinden, also gegen diesen konvergieren. (In der Abbildung sind nur endlich viele Punkte dargestellt, jedoch handelt es sich in Wirklichkeit um eine unendliche Folge von Punkten.)

Dieselbe Überlegung für die blauen bzw. gelben Punkte dieser grauen Sperner Dreiecke führt dazu, dass es ebenso einen Punkt gibt, gegen den eine Teilfolge der blauen Punkte konvergiert, sowie einen, gegen den eine Teilfolge der gelben Punkte konvergiert.







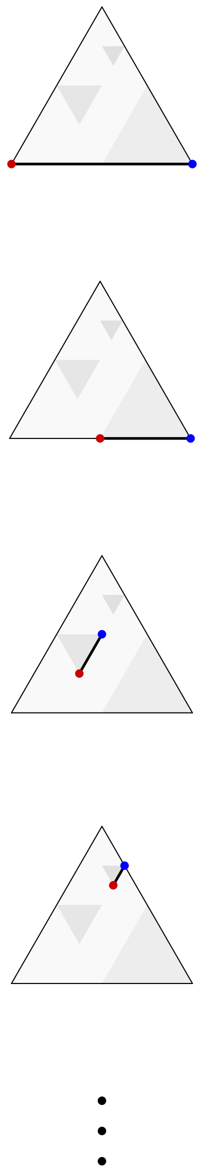


Betrachtet man nun die Abstände zwischen den konvergierenden roten und blauen Punkten eines jeden grauen Sperner Dreiecks zueinander, so sind die Abstände maximal so groß, wie die längste Kante im jeweiligen grauen Sperner Dreieck. Nach Voraussetzung werden die Abstände mit jeder weiteren Zerlegung kleiner und gehen schließlich gegen 0.

Dasselbe gilt auch für die Abstände zwischen den konvergierenden roten und gelben bzw. für die Abstände zwischen den konvergierenden blauen und gelben Punkten.

Das heißt, dass sich sowohl die roten als auch die blauen und gelben Punkte demselben Punkt nähern. Wenn man das ursprüngliche Dreieck also unendlich oft zerlegt, konvergieren alle Punkte gegen denselben Punkt x im Dreieck.

Falls nun mit $(\textcolor{red}{\bullet}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\textcolor{blue}{\bullet}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\textcolor{orange}{\bullet}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der konvergierenden roten bzw. blauen bzw. gelben Punkte bezeichnet wird, bedeutet dies mathematisch ausgedrückt:



$$\lim_{k\to\infty} \textcolor{red}{\bullet}_k = x$$

$$\lim_{k\to\infty} \textcolor{blue}{\bullet}_k = x$$

$$\lim_{k\to\infty} \textcolor{orange}{\bullet}_k = x$$

Widerspruch

$\lightning$ – Ann.:

$\forall x \in \triangle : f(x) \neq x$

$\Downarrow$

$\exists$ Koordinate von $f(x) - x$:

$f(x) - x > 0$

Der Beweis wurde unter der Annahme $f(x) \neq x$ begonnen, mit dem Ziel diese zum Widerspruch zu führen. Dies soll jetzt im letzten Schritt gemacht werden. Dazu betrachtet man zunächst die Annahme $f(x) \neq x$ näher: Sie impliziert, dass mindestens eine der drei Koordinaten von $f(x) - x$ positiv ist. Die Summe der baryzentrischen Koordinaten von x als auch von $f(x)$ ergibt nach ihrer Definition 1, weswegen die baryzentrischen Koordinaten der Differenz $f(x) - x$ in Summe 0 ergeben. Wie bereits vorher im Beweis an verschiedenen Beispielen vorgeführt wurde, ist im Fall von $f(x) \neq x$ mindestens eine Koordinate von $f(x) - x$ negativ, weswegen eine andere positiv sein muss, um in Summe 0 ergeben zu können.

$f({\color{red}\bullet}_k) < {\color{red}\bullet}_k$

$\wedge$

$\lim_{k\to\infty} {\color{red}\bullet}_k = x$

$\wedge$

Stetigkeit von f

$\Downarrow$

$\nexists$ Koordinate von $f(x) - x$: $f(x) - x > 0$

$\Downarrow$

$\lightning$ zu

$\exists$ Koordinate von $f(x) - x$: $f(x) - x > 0$

$\Downarrow$

$\lightning$ zu

$\forall x \in \triangle$: $f(x) \neq x$

Nun weiß man aber aus den vorhergehenden Schritten zwei wichtige Sachverhalte:

1. In jeder Zerlegung j wird eine Ecke x_j nur dann rot gefärbt, wenn die 0-te Koordinate von $f(x_j) - x_j < 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die 0-te Koordinate von $f(x_j)$ kleiner als die entsprechende von x_j ist. Da dies für jede Zerlegung j stimmt, gilt es auch für eine Teilmenge davon, nämlich für die k Zerlegungen mit konvergierenden roten Punkten:

$$f({\color{red}\bullet}_k) < {\color{red}\bullet}_k \tag{2.3}$$

2. Die Folge der konvergierenden roten Punkte konvergiert gegen denselben Punkt x im Dreieck:

$$\lim_{k\to\infty} {\color{red}\bullet}_k = x \tag{2.4}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f kann der Grenzwert mit der Funktionsauswertung vertauscht werden und es gilt:

$$f(x) \overset{(2)}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} {\color{red}\bullet}_k\right) \overset{\text{Stet. v. } f}{=} \lim_{k\to\infty} f({\color{red}\bullet}_k) \overset{(2.3)}{\leq} \lim_{k\to\infty} {\color{red}\bullet}_k \overset{(2)}{=} x$$

Die 0-te Koordinate von $f(x)$ ist also immer kleiner oder gleich[a] der von x. Dies gilt aber nicht nur für die 0-te Koordinate, welche für die rote Farbe zuständig ist, sondern auch für die 1-te Koordinate (blau) und die 2-te (gelb). Somit gibt es keine Koordinate, für die $f(x) - x$ positiv ist, was ein Widerspruch zur Annahme $f(x) \neq x$ ist.
Damit wurde gezeigt, dass es einen Fixpunkt x mit $f(x) = x$ gibt.

[a]Wenn die strikte Ungleichung für jedes Folgenglied gilt, gilt sie im Grenzwert nur noch schwach. Daher ist auch Gleichheit zugelassen.

□

Kapitel 3

Fachdidaktische Aufbereitung

Im folgenden Abschnitt soll das Lemma von Sperner fachdidaktisch für die Schule aufbereitet werden. Dazu wird zunächst untersucht, ob die gesetzlichen Richtlinien es überhaupt erlauben, das Thema im Unterricht zu behandeln. Für die Beantwortung dieser Frage wird der aktuelle österreichische AHS-Lehrplan zu Rate gezogen.
Wenn die rechtlichen Grundlagen eine Aufarbeitung des Lemmas von Sperner gestatten, soll in einem zweiten Schritt ein konkretes Unterrichtskonzept erstellt und ausgearbeitet werden.

3.1 Lehrplan

Liest man sich den AHS-Lehrplan des Rechtsinformationssystems des Bundes für die Unterstufe als auch für die Oberstufe aufmerksam durch, so erkennt man, dass das Lemma von Sperner an keiner Stelle explizit erwähnt oder angeführt wird. Dennoch lassen sich bei einer genaueren Betrachtung desselben Gründe finden, die für die Behandlung dieses Themas im Unterricht sprechen:

Als **Bildungs- und Lehraufgabe** ist für den Mathematikunterricht der AHS-Unterstufe unter anderem Folgendes im Lehrplan angeführt:

> *Die Schülerinnen und Schüler sollen durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lö-*

> *sungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben* [BMU20, S. 79].

Die Bedeutung des Erwerbs solcher *Problemlösefähigkeiten* wird ebenso wie die Wichtigkeit des *Entwickelns* und *Nutzens heuristischer Strategien* an einer späteren Stelle des Lehrplans nochmals hervorgehoben und betont [BMU20, S. 80]. Darüberhinaus sollen mathematische Grundtätigkeiten wie *Analysieren von Problemen, Argumentieren und exaktes Arbeiten, Rechtfertigen von Entscheidungen* und *kritisches Denken*, wie etwa das *Überprüfen von Vermutungen* zentrale Bestandteile des Unterrichts sein [BMU20, S. 79].

Ähnliche Worte finden sich auch für die AHS-Oberstufe:
Der Mathematikunterricht soll zu *analytisch-folgerichtigem Denken* erziehen [BMU20, S.165]. Zu den wesentlichen Aspekten zählen dabei der

- *schöpferisch-kreativer Aspekt: In der Mathematik werden das Denken geschult, Strategien aufgebaut, die Phantasie angeregt und Kreativität gefördert* und der
- *sprachliche Aspekt: Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen. Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein* [BMU20, S. 165].

Betont wird ebenso, dass Mathematik *neben der deduktiven auch eine induktive Seite* besitzt:

> *Vor allem das Experimentieren im Rahmen der Bearbeitung neuer Aufgaben und Probleme macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden* [BMU20, S. 165].

Als **didaktische Grundsätze** werden unter anderem *aktives Erarbeiten, Erforschen* und *Reflektieren* angeführt [BMU20, S. 80]. Des Weiteren wird auf die Bedeutung von Differenzierungsmaßnahmen hingewiesen [BMU20, S. 81].

Die Ausführungen der vorhergehenden Kapitel haben gezeigt, dass sich das Lemma von Sperner sehr anschaulich erklären lässt und sich deswegen grundsätzlich für eine Behandlung im Unterricht eignet. Es bietet sehr viel Potenzial dafür, als offene Problemstellung behandelt zu werden, die auf analytische Weise bearbeitet werden kann. Kreativität und folgerichtiges Denken können gefördert, ebenso Strategien erarbeitet und mögliche Lösungswege entwickelt werden. Thesen können aufgestellt und durch Ausprobieren an anschaulichen Beispielen bestätigt oder verworfen werden. Gleichzeitig üben die Schülerinnen und Schüler stets bewusst oder auch unbewusst folgerichtiges Argumentieren. Außerdem eignet sich das Thema sehr gut zum Differenzieren: Jede bzw. jeder Lernende kann auf ihre bzw. seine Art und Weise vorgehen, eigene Ideen testen und ihrem bzw. seinem Tempo entsprechend das Lernen gestalten. Aufgrund dieser Tatsachen spricht nichts gegen eine geeignete und dem Alter angemessene Behandlung des Lemmas von Sperner im Unterricht.

3.2 Unterrichtskonzept

Das folgende Unterrichtskonzept wurde für eine AHS-Oberstufe konzipiert. Aufgrund der Vorgehensweise bei der Aufarbeitung und den nicht notwendigen mathematischen Vorkenntnissen kann es aber auch durchaus für eine AHS-Unterstufe verwendet werden. Dabei ist wahrscheinlich etwas mehr Zeit zur Verfügung zu stellen bzw. der Arbeitsauftrag etwas abzuwandeln.
Der zentrale Leitgedanke bei der Entwicklung diese Unterrichtsentwurfes war das folgende Zitat des chinesischen Philosophen Konfuzius (551 - 479 v. Chr.):

Sage es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde es vielleicht behalten.
Lass es mich tun, und ich werde es können.

Die Schülerinnen und Schüler sollen im Sinne eines handlungsorientierten Unterrichts selbst aktiv werden und anhand einer gegebenen Fragestellung eigenständig Strategien entwickeln und erproben.
Die primär verwendete Methode ist dabei das *Erarbeitungsspiel*: In mehreren aufeinanderfolgenden Phasen lernen die Schülerinnen und Schüler ein

Spiel kennen, entwickeln Strategien, fomulieren Zusammenhänge, testen aufgestellte Thesen am Spiel und reflektieren schließlich die Ergebnisse. Dabei wird einerseits problemlösendes Denken und Argumentieren geschult, andererseits werden kommunikative und soziale Kompetenzen gefördert. [BBL15, S. 64f.]

Kontextüberlegungen

Thema: Das Lemma von Sperner inklusive Beweis im 2-dimensionalen Fall
Fach: Mathematik
Schultyp: Allgemeinbildende höhere Schule
Schulstufe: 9. - 12. Schulstufe
geplante Zeit: 2 Unterrichtsstunden

Bedingungsanalyse

Wie setzt sich die Klasse zusammen und welche Schülerinnen und Schüler sind mit Blick auf die bevorstehenden Anforderungen auffällig?
Die Gruppe der Schülerinnen und Schüler kann sich ganz bunt gemischt zusammensetzen. Es ist unerheblich, welchen Geschlechts, welcher Herkunft oder welchen Alters die Lernenden sind.
Die Inhalte eignen sich sogar sehr gut dafür, klassen- und somit altersübergreifend behandelt zu werden: Die Grundidee des Spiels ist leicht veständlich und es ist kein mathematisches Vorwissen (bis auf das Zählen von Dreiecken) notwendig, womit sich diesbezüglich keine Schwierigkeiten ergeben. Da jeder Lernende mit einer anderen Strategie (oft auch bedingt durch das Vorwissen bzw. die Prägung durch die Schule) an das Spiel herangeht, ergeben sich verschiedenste Lösungsvorschläge, was durchaus als positiv angesehen und genutzt werden soll.

Was wissen und können die Schülerinnen und Schüler bereits?
Wie bereits erwähnt, zeichnen sich die Inhalte dieser Stunden dadurch aus, dass keinerlei mathematisches Vorwissen (bis auf das Zählen von Dreiecken) notwendig ist. Das unterschiedliche Können der Lernenden kann sogar als Vorzug beim Erarbeiten der Strategien angesehen werden.

Wo gibt es Anknüpfungspunkte zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler? Wie schätze ich das Interesse ein?
Direkt im Alltag wird den Schülerinnen und Schülern das Wissen um das Sperner-Spiel nicht viel weiterhelfen. Die Arbeitstechniken während des Spiels jedoch, wie das Ausprobieren verschiedener Strategien, das Aufstellen von Vermutungen und das anschließende Beweisen derselben, sind wesentliche Bestandteile des täglichen Lebens und somit für die Lernenden hilfreich.
Das Interesse am Spiel und am Knobeln beim Herausfinden der verschiedenen Strategien schätze ich generell als sehr groß ein, da Spiele im Allgemeinen bei Kindern, Jugendlichen und auch Erwachsenen großen Anklang finden. Natürlich kann es aber auch Ausnahmen geben.

Welche zeitlichen, räumlichen und materiellen Rahmenbedingungen müssen berücksichtigt werden?
Die Stunden können zu jedem beliebigen Zeitpunkt durchgeführt werden. Die Inhalte bieten sich sogar an, an einem Nachmittag bzw. zu einem Zeitpunkt des Schuljahres, an dem die Schülerinnen und Schüler erschöpft und nicht mehr ganz leistungsfähig sind, behandelt zu werden.
Als Raum eignet sich das Klassenzimmer ebenso wie jeder andere Raum. Manche Schülerinnen und Schüler arbeiten zur Abwechslung einmal vielleicht sogar gerne am Boden, während andere lieber am Tisch spielen. Diese Eigenheiten ihrer Schülerinnen und Schüler sollten Lehrpersonen bei der Raumwahl berücksichtigen.
An Materiellem werden die beiden Arbeitsblätter, das Spielfeld inklusive Spielanleitung und Plättchen in drei Farben benötigt. Das Spielfeld sollte dabei in mehrfacher Ausfertigung vorliegen, da die Lernenden beim zweiten Arbeitsblatt Wege darauf einzeichnen müssen und somit für jedes Spiel ein neues Feld benötigt wird. Es sollten auch genügend Plättchen vorhanden sein, damit die Schülerinnen und Schüler alle möglichen Strategien ausprobieren können.
Eine andere Möglichkeit wäre aber auch, dass sich die Lernenden das Spielfeld und die Plättchen selbst vervielfältigen.

Welche Voraussetzungen, Qualifikationen, Einstellungen und Interessen der Lehrperson bestimmen die Lernsituation?
Die Lehrperson sollte mit viel Motivation an den Unterricht herangehen und selbst gerne herumtüfteln und knobeln, um so die eigene Begeisterung (falls notwendig) auch auf die der Schülerinnen und Schüler übertragen zu können.

Sachanalyse

Das Thema der Stunden ist das Lemma von Sperner und dessen Beweis im 2-dimensionalen Fall.
Die Lehrperson sollte sich in diesem Zusammenhang mit den fachlichen Inhalten auskennen und über die Stunden hinausgehendes Wissen besitzen. (Die notwendigen Informationen dazu sind in Kapitel 1 und 2 dieser Arbeit zu finden.)

Didaktische Analyse

Warum ist dieses Thema für die Schülerinnen und Schüler wichtig?
Das Lemma von Sperner ist eine wesentliche Aussage der Mathematik, insbesondere der kombinatorischen Topologie. Dieses Teilgebiet der Mathematik wird im Unterricht, entsprechend den Vorgaben des Lehrplans, wenig bis gar nicht behandelt. Die Aussage des Lemmas lässt sich aber auf recht einfache Weise formulieren und auch der Beweis kann sicherlich vom Großteil der Schülerinnen und Schüler nachvollzogen werden. Deswegen bietet sich das Lemma von Sperner sehr gut an, den Lernenden einen tieferen Einblick in mathematische Themen, die über den vorgeschriebenen Inhalt des Unterrichts hinausgehen, zu geben.
Dieses Thema kann einen Beitrag zur Motivation der Schülerinnen und Schüler leisten, sich für die Mathematik und deren Leistungen in der Vergangenheit bzw. Gegenwart verstärkt zu interessieren und sich weiterführende Informationen einzuholen.

Wohin soll der Unterricht führen?
Nach den beiden Stunden sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, die Aussage des Lemmas von Sperner korrekt wiederzugeben und den

Beweis dazu zu skizzieren.
Die Vorgehensweise bzw. Methoden dieser Stunde sollen idealerweise dazu führen, dass die Lernenden auch außerhalb der Schule über das Lemma sprechen und beispielsweise ihre Eltern, Geschwister oder Freundinnen bzw. Freunde zu einem Spiel auffordern. Unbewusst leisten die Schülerinnen und Schüler dadurch nämlich einen wesentlichen Beitrag, die (leider weit verbreitete) Angst vor Mathematik zu nehmen und das Interesse für dieses Gebiet zu wecken bzw. zu stärken.

Wie gehe ich vor und warum wähle ich diese Schritte?

1. Stunde

Die erste Stunde beginnt mit einer Begrüßung der Schülerinnen und Schüler und der Nennung des Themas der folgenden zwei Unterrichtseinheiten. Die Lehrperson gibt dabei den Lernenden einen Überblick über den Verlauf der Stunden und die hierzu angewandten Vorgehensweisen und Methoden, geht aber nicht näher auf die Inhalte ein, die behandelt werden.

> Die Schülerinnen und Schüler sollen darüber informiert sein, was in den folgenden Stunden auf sie zukommt. Jedoch sollen sie sich die Inhalte anhand von Arbeitsaufträgen selbst erarbeiten und nicht frontal von der Lehrperson unterrichtet werden. Damit auf diese Weise das bestmögliche Ergebnis erzielt werden kann, ist es notwendig, dass die Lehrperson zu Beginn den Lernenden nicht mehr Informationen als notwendig gibt.

Dann werden die Schülerinnen und Schüler in Zweierteams eingeteilt. Dies kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen: durch die Wahl der Lehrperson, durch die Wahl der Schülerinnen und Schüler selbst oder durch Zufall. Anschließend erhalten die Lernenden das Spielfeld inklusive einer Spielanleitung sowie das erste Arbeitsblatt *Blatt 1: Das Sperner-Spiel* und beginnen mit dessen Bearbeitung.

> Das Spiel wird zu zweit gespielt, daher ist eine entsprechende Einteilung in Zweierteams sinnvoll. Sollte sich dies jedoch aufgrund einer ungeraden Anzahl an Schülerinnen und Schülern nicht ausgehen, so kann ein Team auch zu dritt spielen. Die Entscheidung über die Einteilung der Teams ist der Lehrperson überlassen. Sie kennt ihre Klasse am besten und kann somit gut einschätzen, ob eine Lehrerwahl oder Schülerinnen- bzw. Schülerwahl am sinnvollsten ist oder ob die Entscheidung dem Zufall überlassen werden soll bzw. kann.
> Nicht zu vergessen ist auch, dass die Lernenden durch Partnerarbeit ihre sozialen und auch kommunikativen Kompetenzen üben und erweitern.

In Phase 1 sollen die Schülerinnen und Schüler das Sperner-Spiel mehrmals durchspielen. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Während dieser Phase sollen die Lernenden das Spiel (ohne zusätzliche Vorschriften) einfach kennenlernen und sich damit vertraut machen. Einige Schülerinnen und Schüler benötigen dafür mehrere Anläufe, während andere bereits nach zwei Durchgängen bereit für einen nächsten Schritt sind. Um das eigene Lerntempo deswegen sinnvoll zu unterstützen, kann jedes Team individuell entscheiden, wann es zur nächsten Phase übergeht.
> Sollten sich Schwierigkeiten ergeben, ist die Lehrperson stets zur Stelle und kann ihrem Ermessen nach den Lernenden weiterhelfen oder sie alleine knobeln lassen.

In Phase 2 untersuchen und analysieren die Schülerinnen und Schüler das Spiel bzw. dessen Ausgänge anhand einiger Leitfragen genauer. Wie sie dabei genau vorgehen, ist ihnen selbst überlassen. Die Lernenden sollen jedoch alle ihre Schritte (sowohl Vermutungen als auch Ergebnisse) schriftlich festhalten. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Diese Phase ist in Hinblick auf die Ziele der Stunde mitunter die bedeutsamste: Die Schülerinnen und Schüler experimentieren eigenständig herum, planen, stellen Theorien auf und verwerfen sie eventuell auch wieder. Das schriftliche Festhalten der Ergebnisse soll diesen Entwicklungsprozess dokumentieren und die Lernenden dazu ermuntern, das Spiel und dessen Analyse ernst zu nehmen.
> Die genaue Analyse dient dazu, das Spiel zu hinterfragen und eventuelle Strategien ausfindig zu machen. Die erste Frage verfolgt das Ziel, die Schülerinnen und Schüler darauf aufmerksam zu machen, dass es immer ein Dreieck geben muss, welches an seinen Ecken alle drei Farben aufweist. Die zweite Frage hingegen soll sie erkennen lassen, dass man je nach Spielfeld bei optimaler Spielweise den Sieger bereits im Vorhinein bestimmen kann. Die dritte Frage bezweckt, dass die Lernenden verschiedene Strategien ausprobieren und am Spiel herumknobeln. Sie finden schließlich heraus, dass eine Verkleinerung des Spielfeldes dazu führen kann, die Beantwortung der Fragen zu vereinfachen.

In Phase 3 spielen die Teampartner nicht gegeneinander, sondern legen gleichzeitig gemeinsam unter Berücksichtigung der Regeln die Plättchen auf das Spielfeld, bis dieses vollständig gefärbt ist. Anschließend bestimmen sie in mehreren Durchgängen (evtl. unter Variation der Spielfeldgröße) die Anzahl jener Dreiecke, die alle drei Farben an ihren Ecken aufweisen und stellen Vermutungen über die erhaltenen Ergebnisse an. Alle Schritte müssen wiederum schriftlich festgehalten werden. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Diese Phase dient dazu, die Schülerinnen und Schüler auf die genaue Aussage des Lemmas von Sperner hinzuführen. Dieses besagt ja nicht, dass es immer genau ein Dreieck gibt, das an seinen Ecken alle drei Farben aufweist, sondern, dass eine ungerade Anzahl dieser speziellen Dreiecke im Spielfeld vorkommt. Beim Erstellen der Vermutungen kann es wiederum hilfreich sein, das Spielfeld zu ver-

kleinern. Für eine gute Dokumentation ist das schriftliche Festhalten der Resultate unerlässlich.

In Phase 4 findet eine gemeinsame Diskussion im Plenum statt. Die Teams präsentieren dabei zunächst kurz in zwei bis drei Minuten ihre individuellen Ergebnisse. Dabei kann die Lehrperson auf verschiedene Arten vorgehen: Sie kann alle Teams präsentieren lassen oder nur einzelne (zufällig oder bewusst ausgewählte). In diesem Fall ergänzen die übriggebliebenen Paarungen die Resultate ihrer Klassenkameraden. Die Lehrperson leitet die Diskussion mit dem Ziel, am Ende das Lemma von Sperner formulieren zu können. Unterstützend schreibt sie es auch auf die Tafel. Die Schülerinnen und Schüler sollen fehlende Informationen ergänzen und die Aussage des Lemmas von Sperner schriftlich festhalten.

Die Entscheidung, welche Schülerinnen und Schüler ihre Resultate vorstellen, bleibt der Lehrperson überlassen. Sie hat die Lernenden während der Arbeitsphasen beobachtet und kann demnach am besten beurteilen, wer präsentiert und wer nicht.
Bei den mündlichen Präsentationen üben die Lernenden das freie Sprechen vor der Klasse. Die Kurzreferate und die gleichzeitige bzw. anschließende Diskussion dienen dazu, die Ergebnisse der Teams im Plenum zu vergleichen und zu evaluieren. Durch das gemeinsame Gespräch wird dabei schrittweise das Lemma von Sperner entwickelt. Die Lehrperson soll das Lemma von Sperner am Ende klar und deutlich formulieren und als Ergebnissicherung auch auf die Tafel schreiben, um sicherzustellen, dass es im Zuge des Spiels und der Diskussion über mögliche Strategien nicht untergeht. Die Schülerinnen und Schüler vervollständigen ihre schriftliche Dokumentation des Spiels mit der Aussage des Lemmas von Sperner.

Die Lehrperson verabschiedet sich abschließend von den Schülerinnen und Schülern, bedankt sich für die gute Arbeit und benennt das Thema der folgenden Unterrichtsstunde.

> Die Schülerinnen und Schüler werden mit einem positiven Gefühl entlassen, wissen aber gleichzeitig schon, was in der nächsten Stunde auf sie zukommt.

2. Stunde
Die zweite Stunde beginnt mit einer Begrüßung der Schülerinnen und Schüler sowie einer kurzen Wiederholung der Ergebnisse der vergangenen Einheit. Die Lehrperson leitet das Gespräch, bezieht die Lernenden jedoch durch gezielte Fragen ein.

> Die Wiederholung dient dazu, allen Schülerinnen und Schülern die Erkenntnisse der vergangenen Stunde in Erinnerung zu rufen, damit alle mit dem gleichen Wissensstand die nachfolgenden Arbeitsaufträge bewältigen können.

Dann schließen sich die Schülerinnen und Schüler wieder zu denselben Teams wie in der vergangenen Stunde zusammen, erhalten das zweite Arbeitsblatt *Blatt 2: Der Beweis des Sperner-Spiels* und beginnen mit dessen Bearbeitung.

> Die Einteilung in dieselben Teams ist einerseits zeitsparend, andererseits auch deshalb von Vorteil, da die Partner sich bereits in der vorangegangenen Stunde aneinander gewöhnt und eine gemeinsame Arbeitsstrategie entwickelt haben. Sollten sich jedoch in der letzten Stunde Probleme ergeben haben, kann die Lehrperson eingreifen und neue Teams bilden.

In Phase 1 spielen die Teams erneut das Spiel, wobei das Ziel darin besteht, alle Kreuzungspunkte mit farbigen Plättchen zu füllen. Anschließend soll die Anzahl der Dreiecke, welche an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen, bestimmt werden. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Dieser Schritt dient als Vorbereitung auf die nachfolgenden Phasen. Das Ziel ist dabei nicht, einen Sieger des Spiels zu ermitteln,

> sondern das gesamte Spielfeld entsprechend den Regeln mit farbigen Plättchen zu füllen.

In Phase 2 sollen Wege durch das Spielfeld konstruiert werden. Dabei werden zunächst nur Wege durch rot-blau-Kanten betrachtet. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Anhand der Betrachtung bestimmter Wege durch das Spielfeld kann das Lemma von Sperner bewiesen werden. Deswegen ist es unerlässlich, zunächst alle möglichen Wege einer bestimmten Art zu konstruieren.
> Das feste Einzeichnen der Wege in das Spielfeld ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern anschließend, Ergebnisse besser vergleichen zu können.

In Phase 3 sollen Vermutungen zu den auf dem Arbeitsblatt gestellten Fragen angestellt werden. Dazu wird die Anordnung der Plättchen auf dem Spielfeld mehrmals variiert. Alle Überlegungen und Ergebnisse müssen dabei schriftlich dokumentiert werden. Bei Fragen steht die Lehrperson zur Verfügung.

> Diese Phase ist das Kernstück der Stunde. Die Schülerinnen und Schüler tüfteln eigenständig am Spielfeld herum, entwickeln Strategien, stellen Vermutungen auf und beweisen oder verwerfen sie wieder. Schriftliche Aufzeichnungen helfen dabei, ihre Entwicklungen zu dokumentieren.
> Bei der ersten Frage sollen die Lernenden die vier verschiedenen Typen von Wegen finden und charakterisieren. Durch das Herumexperimentieren mit den Plättchen auf dem Spielfeld können sie diese ausfindig machen. Anhand der zweiten Frage sollen sie herausfinden, dass jeder Typ von Weg mit einer bestimmten Anzahl an Dreiecken, die an den Ecken alle drei Farben aufweisen, verbunden ist. Die dritte Frage ist die kniffligste: Die Antwort liefert nämlich den entscheidenden Schritt für den Beweis des Lemmas von Sper-

ner. Die letzte Frage soll verdeutlichen, dass es egal ist, ob ich rot-blau-Kanten, blau-gelb-Kanten oder gelb-rot-Kanten betrachte, ich über rot-rot-Kanten, blau-blau-Kanten und gelb-gelb-Kanten aber nicht zum Ziel komme.

In Phase 4 findet eine gemeinsame Diskussion im Plenum statt. Dabei präsentieren einige Teams zunächst kurz in zwei bis drei Minuten ihre Resultate, während andere die Ergebnisse ihrer Kameraden mit ihren eigenen ergänzen. Das Ziel dieser Präsentation bzw. Diskussion ist, den Beweis des Lemmas von Sperner unter der Leitung der Lehrperson Schritt für Schritt gemeinsam zu erarbeiten. Wesentliche Ergebnisse notiert die Lehrperson dabei an der Tafel, die Lernenden schreiben mit.

Die Entscheidung, welche Schülerinnen und Schüler ihre Resultate vorstellen, bleibt der Lehrperson überlassen. Sie hat die Lernenden während der Arbeitsphasen beobachtet und kann demnach am besten beurteilen, wer präsentiert und wer nicht. Sie kann es auch dem Zufall überlassen oder die Lernenden auffordern, sich freiwillig zu melden. Sollten in der vergangenen Stunde einige Teams nicht vorgetragen haben, so bietet es sich an, diese in dieser Stunde dranzunehmen.
Bei den mündlichen Präsentationen üben die Lernenden das freie Sprechen vor der Klasse. Die Kurzreferate und die gleichzeitige bzw. anschließende Diskussion dienen dazu, die Ergebnisse der Teams im Plenum zu vergleichen und zu evaluieren. Durch das gemeinsame Gespräch wird dabei schrittweise der Beweis des Lemmas von Sperner entwickelt. Die Lehrperson soll durch gezielte Fragen die Lernenden führen und Resultate als Ergebnissicherung auch auf die Tafel schreiben. Damit soll sie sicherstellen, dass die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Beweisschritte erkennen und ihre schriftliche Dokumentation entsprechend ergänzen und vervollständigen können.

Abschließend kann die Lehrperson noch auf die Bedeutung des Lemmas von Sperner in der Mathematik eingehen und dabei auf die Aussage und den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes verweisen. Dann verabschiedet sie sich von den Schülerinnen und Schülern und bedankt sich für die gute Arbeit.

> Die abschließenden Bemerkungen runden das Thema der vergangenen beiden Stunden ab, regen gleichzeitig aber auch vielleicht manche Schülerinnen und Schüler an, sich weiter zu informieren. Letztere wissen dann gleich, in welche Richtung sie recherchieren müssen.

Unterrichtsentwurf

Lernziele
Die Schülerinnen und Schüler können ...

- ... die Regeln des Sperner-Spiels anhand eines Beispiels aufzählen.
- ... Strategien entwickeln, um ein gegebenes Problem zu analysieren.
- ... die Wahl eigenständig entwickelter Strategien begründen.
- ... Vermutungen und Ergebnisse einer selbst durchgeführten Untersuchung schriftlich dokumentieren.
- ... Vermutungen und Ergebnisse einer selbst durchgeführten Untersuchung mündlich präsentieren.
- ... das Lemma von Sperner im 2-dimensionalen Fall inklusive der Voraussetzungen korrekt wiedergeben.
- ... den Beweis des Lemmas von Sperner im 2-dimensionalen Fall anhand eines Beispiels skizzieren.

Planungsraster

1. Stunde

Zeit (Min.)	Inhalt WAS?	Methode WIE?	Ziel und Anliegen WARUM?	Material WOMIT?
5	Begrüßung. Nennung des Themas.	Vortrag der L.	Die SuS erhalten einen Überblick über den Inhalt der Stunde.	
5	Einteilung in 2er-Teams.	L-Wahl. SuS-Wahl. Zufall.	Ideale Form der Zusammenarbeit.	
20	Bearbeitung von Blatt 1.	Partnerarbeit. Ausprobieren. Schriftliche Notizen.	Die SuS erarbeiten sich die Inhalte selbständig in ihrem idividuellen Tempo.	Spielfeld inkl. Anleitung. Blatt 1. Plättchen in drei Farben.
15	Präsentation der Ergebnisse. Diskussion. Formulierung des Lemmas von Sperner.	Präsentation der SuS. Die L leitet die Diskussion.	Üben von freiem Reden. Sammlung der Ergebnisse. Ergebnissicherung.	Tafel
5	Vorschau auf die kommende Stunde. Verabschiedung.	Vortrag der L.	Die SuS kennen den Inhalt der nächsten Stunde.	

2. Stunde

Zeit (Min.)	Inhalt WAS?	Methode WIE?	Ziel und Anliegen WARUM?	Material WOMIT?
5	Begrüßung. Wiederholung.	Gespräch zwischen der L und den SuS.	Stoff in Erinnerung rufen.	
1	Einteilung in 2er-Teams.	Gleich wie letzte Stunde.	Zeitsparend. Gewohnte Konstellation.	
20	Bearbeitung von Blatt 2.	Partnerarbeit. Ausprobieren. Schriftliche Notizen.	Die SuS erarbeiten sich die Inhalte selbständig in ihrem idividuellen Tempo.	Spielfeld inkl. Anleitung. Blatt 2. Plättchen in drei Farben.
19	Präsentation der Ergebnisse. Diskussion. Erarbeitung des Beweises des Lemmas von Sperner.	Präsentation der SuS. Die L leitet die Diskussion. Gespräch zwischen der L und den SuS.	Üben von freiem Reden. Sammlung der Ergebnisse. Ergebnissicherung.	Tafel
5	Ausblick auf weiterführende Themen. Verabschiedung.	Vortrag der L.	Abrundung des Themas. Wecken von Interesse.	

Abschließende Bemerkungen

Das vorliegende Unterrichtskonzept kann nicht nur während des Regelunterrichts durchgeführt werden. Es eignet sich auch sehr gut für eine Behandlung bei Projekttagen. Dabei kommt durch das Spiel einerseits der Spaß nicht zu kurz, andererseits werden indirekt und unbewusst wesentliche mathematische, aber auch außerschulische Kompetenzen trainiert.
Darüberhinaus könnte das Lemma von Sperner auch ein Teilbereich eines Stationenbetriebes sein, bei welchem verschiedene mathematische Knobelaufgaben, wie etwa die Türme von Hanoi oder die Leonardobrücke, behandelt werden. Einen Aufgabenpool dazu bietet das Projekt *MATHE - Cool!* der Universität Innsbruck, abrufbar unter dem Link [`https://www.uibk.ac.at/mathematik/mathe-cool/index.html.de`].
Ebenso eignet sich das Spiel unter entsprechender Anpassung der Arbeitsaufträge durchaus auch für Kinder im Grundschulalter. Durch das Ausprobieren und Entdecken verschiedener Strategien wird logisches-folgerichtiges Denken geschult. Eine detaillierte Erarbeitung des Beweises schießt sicherlich über das Ziel hinaus, doch können auch hier auf geeignete Weise Ansätze diskutiert und betrachtet werden.
Das Lemma von Sperner kann also auf vielfältige Weise den Unterricht und somit jede Schülerin bzw. jeden Schüler bereichern.

3.3 Arbeitsblätter

Einen Impuls bei der Erstellung der Arbeitsblätter lieferte das Werk *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht*, herausgegeben von Hußmann Stephan und Lutz-Westphal Brigitte [HuL07, S. 191f.].

Blatt 1: Das Sperner-Spiel

Phase 1: Spiel durchspielen

1. Bildet Zweierteams und nehmt euch ein Spielfeld sowie eine genügende Anzahl an roten, blauen und gelben Plättchen.
2. Lest euch vor Spielbeginn die Spielanleitung genau durch.
3. Spielt das Spiel anschließend zwei- bis dreimal durch.

Phase 2: Strategien überlegen

1. Spielt das Spiel weitere Male und stellt dabei Vermutungen zu den folgenden Fragen an (ihr könnt dabei auch die Größe des Spielfeldes variieren):
   (a) Gibt es immer einen Sieger oder kann das Spiel auch unentschieden enden?
   (b) Ist ein Spieler im Vorteil? Wenn ja, welcher?
   (c) Gibt es eine optimale Strategie, um das Spiel zu gewinnen? Wenn ja, formuliert sie.
2. Haltet eure Überlegungen und Ergebnisse schriftlich fest.

Phase 3: Zusatzüberlegungen

1. Legt nun die Plättchen gleichzeitig und beliebig auf die Kreuzungspunkte des Spielfeldes.
   Die folgenden beiden Regeln gelten jedoch immer noch:
   (a) An den Außenecken des großen Dreiecks müssen alle drei Farben genau einmal vorkommen.
   (b) Auf die Punkte an den Außenkanten dürfen nur die Farben der Enden der entsprechenden Kanten gelegt werden.

2. Bestimmt nun die Anzahl jener Dreiecke, die an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen und notiert euch das Ergebnis.

3. Wiederholt diese Schritte mehrmals mit anders gefärbten Kreuzungspunkten (ihr könnt auch die Größe des Spielfeldes variieren).

4. Fällt euch bei den Ergebnissen etwas auf? Haltet eure Vermutungen schriftlich fest.

Phase 4: Diskussion im Plenum

1. Haltet die wichtigsten Ergebnisse schriftlich fest.

Blatt 2: Der Beweis des Sperner-Spiels

Wieso gibt es beim Sperner-Spiel immer einen Sieger?

oder genauer gesagt

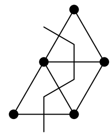
Wieso gibt es beim Sperner-Spiel immer eine ungerade Anzahl an Dreiecken, die an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen?

Phase 1: Vorbereitung

1. Bildet Zweierteams und nehmt euch ein Spielfeld sowie eine genügende Anzahl an roten, blauen und gelben Plättchen.
2. Spielt das Spiel einmal durch. Sollte der Fall eintreten, dass ein Spieler verliert, bevor alle Kreuzungspunkte bunt gefärbt sind, so legt Plättchen eurer Wahl auf die übrig gebliebenen Punkte. Es sollen nach dem Beenden der Partie nämlich alle Kreuzungspunkte mit rot, blau oder gelb gefärbt sein.
3. Markiert alle Dreiecke im Spielfeld, die alle drei Farben genau einmal an ihren Ecken aufweisen.

Phase 2: Konstruktion von Wegen

1. Betrachtet jetzt alle rot-blau-Kanten (sprich jene Kanten, bei denen ein Ende rot und ein Ende blau gefärbt ist) des Spielfeldes.
2. Zeichnet nun nach folgenden Regeln Wege in euer Spielfeld ein:
   (a) Ein Weg ergibt sich als Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Dreiecke.



   (b) Es dürfen nur rot-blau-Kanten überschritten werden.

Phase 3: Eigenschaften der Wege

1. Stellt nun Vermutungen zu den folgenden Fragen an (variiert dazu die Anordnung der Plättchen auf dem Spielfeld):
   (a) Gibt es verschiedene Typen von Wegen? Wenn ja, welche? (Tipp: Betrachtet die Endpunkte der Wege genauer.)
   (b) Wie hängen diese Wege mit jenen Dreiecken zusammen, die alle drei Farben an ihren Ecken aufweisen?
   (c) *Knifflig:* Wie können wir nun anhand dieser Überlegungen sagen, dass jedes Spielfeld eine ungerade Anzahl an jenen Dreiecken besitzt, die an ihren Ecken alle drei Farben aufweisen?
   (d) Ist es wichtig, dass man die rot-blau-Kanten betrachtet oder könnte man auch Kanten betrachten, deren Enden mit anderen Farben gefärbt sind?
2. Haltet eure Überlegungen und Ergebnisse schriftlich fest.

Phase 4: Diskussion im Plenum

1. Haltet die wichtigsten Ergebnisse schriftlich fest.

Das Sperner-Spiel: Spielanleitung

Ziel des Spiels

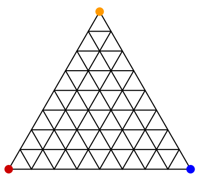
Die Kreuzungspunkte des Spielfeldes sollen mit den roten, blauen und gelben Plättchen gefärbt werden. Die Spieler versuchen dabei, die Plättchen so zu legen, dass kein Dreieck entsteht, an dessen Ecken alle drei Farben rot, blau und gelb vorkommen. Derjenige Spieler, der als erster ein solches Dreieck bildet, hat verloren.

Spielmaterial

- 1 Spielfeld
- 36 rote Plättchen
- 36 blaue Plättchen
- 36 gelbe Plättchen

Spielvorbereitung

Auf jede der drei Außenecken des Spielfeldes wird ein Plättchen der Farbe rot, blau und gelb gelegt. Dabei darf jede Farbe nur einmal vorkommen. Die restlichen Plättchen werden neben das Spielfeld gelegt.



Spielablauf

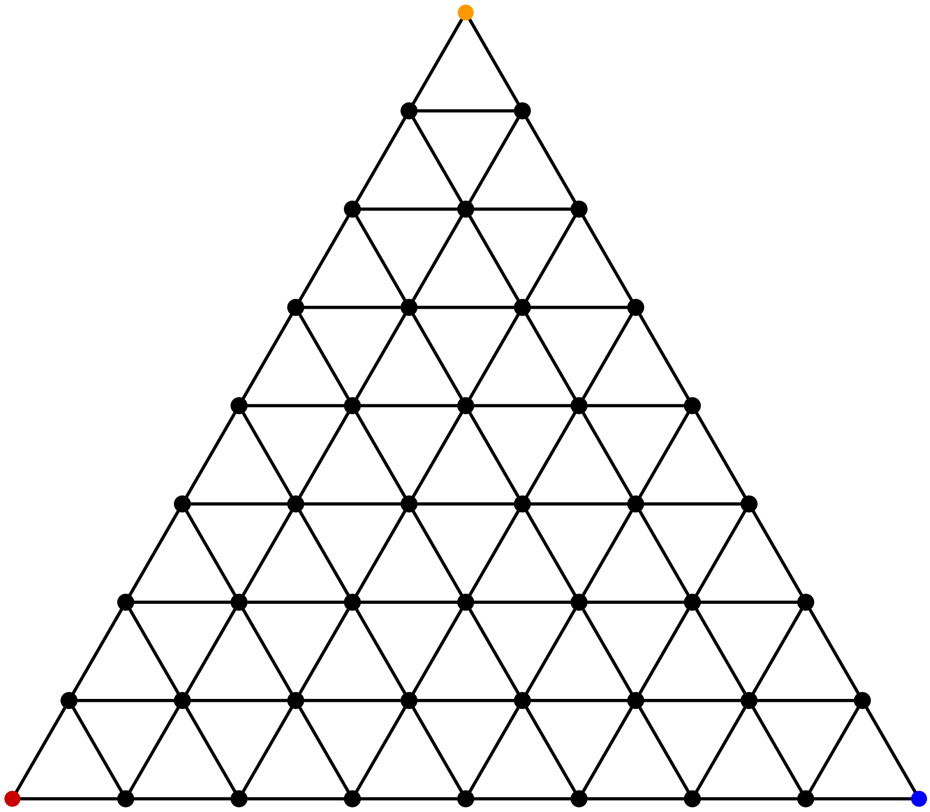
Die Spieler legen abwechselnd ein Plättchen einer Farbe ihrer Wahl auf einen noch freien Kreuzungspunkt des Spielfeldes. Dabei gelten folgende Regeln:

- Auf Punkte an den Außenkanten des großen Dreiecks dürfen nur Plättchen derjenigen Farben gelegt werden, die auch an den Enden der entsprechenden Außenkante vorkommen. Die Anordnung der Steine ist dabei beliebig.
- Im Inneren des Spielfeldes gibt es keine Einschränkungen. Hier dürfen die Plättchen aller Farben beliebig gelegt werden.

Spielende

Das Spiel endet, sobald ein Spieler ein Plättchen so gelegt hat, dass ein Dreieck entsteht, an dessen Ecken alle drei Farben rot, blau und gelb auftreten.

Das Sperner-Spiel: Spielfeld



Schlussbemerkung

So, liebe Leserin und lieber Leser,
nun sind wir am Schluss meiner Diplomarbeit angekommen. Eine erstaunliche Reise durch die Welt der Mathematik, insbesondere des Lemmas von Sperner geht zu Ende. Dabei haben wir aber viele neue Erkenntnisse gesammelt:

Wir wissen jetzt, was die einzelnen Begriffe *konvexe Hülle*, *Simplex* und *simpliziale Zerlegung* bedeuten, können sie grafisch darstellen und verstehen, wofür sie beim Lemma von Sperner gebraucht werden. Außerdem haben wir gesehen, dass sich das Lemma von Sperner sowohl im 1- als auch 2-dimensionalen Fall anhand einer Strecke bzw. einer Dreiecksfläche sehr anschaulich erklären lässt.

Im zweiten Kapitel haben wir zunächst Begriffe wie *Baryzentrum*, *baryzentrische Unterteilung* und *Homöomorphismus* kennengelernt und sind nun in der Lage, diese anhand von Skizzen und Beispielen jenen zu erklären, die auf diesem Gebiet wenig oder gar nichts wissen. Zusätzlich können wir das Lemma von Sperner nun gezielt einsetzen, um den Brouwerschen Fixpunktsatz zu beweisen. Im 2-dimensionalen Fall schaffen wir es darüberhinaus, aussagekräftige Skizzen zu erstellen, die unsere Gedankengänge untermauern.

Der letzte Teil hat uns schließlich noch darüber Auskunft gegeben, dass das Lemma von Sperner zwar nicht explizit im AHS-Lehrplan zu finden ist, die Bildungs- und Lehraufgabe sowie die didaktischen Grundsätze aber dennoch erlauben, es im Unterricht zu behandeln. Ebenso haben wir ein didaktisches Konzept zu diesem Thema kennengelernt, welches sich auf vielfältige Weise in mehr oder weniger allen Klassenstufen einsetzen lässt.

Damit wären wir auch schon wieder beim eingangs erwähnten Spiel. Hast du inzwischen eine Taktik entwickelt und weißt, ob und wie du dein Gegenüber besiegen kannst? Solltest du diese Zeilen gleich nach der Einleitung lesen: Nein, ich gebe dir in dieser Schlussbemerkung keinen Hinweis darauf, dafür musst du schon die Diplomarbeit lesen. Solltest du aber bis zum Ende mit mir mitgefiebert haben, so hoffe ich, dass ich im Laufe der Arbeit all deine Fragen zufriedenstellend beantworten konnte und du jetzt weißt, ob und wie du deinen Bekannten besiegen kannst.
Ich habe mir bei den Ausführungen und Skizzen jedenfalls viel Mühe gegeben und bin sehr zufrieden mit dem Ergebnis.

Abbildungsverzeichnis

Das Bild mit der Kreisscheibe mit den Spektralfarben beim Beweis des 2-dimensionalen Brouwerschen Fixpunktsatzes habe ich folgender Internetseite entnommen und entsprechend meinen Vorstellungen mit Photoshop bearbeitet:
`[https://pixabay.com/de/illustrations/farbrad-spektrum-regenbogen-1740381/]`, eingesehen am 02.03.2020.

Alle anderen Abbildungen habe ich selbst als Rohfassung in Geogebra erstellt, diese als TikZ-Grafik exportiert und sie schließlich in Latex entsprechend meinen Vorstellungen angepasst.

Literaturverzeichnis

[AiZ18] Aigner, Martin / Ziegler, Günter M.: Das Buch der Beweise, Berlin, 2018.

[ArP90] Arkhangel'skiĭ, Aleksandr V. / Pontryagin, Lev S.: General Topology I, Berlin, 1990.

[Bac82] Bachmann, F., Emanuel Sperner in memoriam, in: Jacobs, K., Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 84, Heft 1, Stuttgart, 1982, S. 45–55.

[BBL15] Barzel, Bärbel / Büchter, Andreas / Leuders, Timo: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II, Berlin, 2015.

[Baz18] Bazett, Trefor: A beautiful combinatorical proof of the Brouwer Fixed Point Theorem - Via Sperner's Lemma, Video, 20 min, 2018, [https://www.youtube.com/watch?v=oX9aPNF6_h8], eingesehen am 26.02.2020.

[BoE86] Boltjanskij Vladimir G. / Efremovič Vadim A.: Anschauliche kombinatorische Topologie, Braunschweig / Wiesbaden u.a., 1986.

[BMU20] Bundesministerium für Unterricht und Kunst: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne - allgemeinbildende höhere Schulen, 2020, [https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008568/Lehrpl\%c3\%a4ne\%20\

%e2\%80\%93\%20allgemeinbildende\%20h\%c3\%b6here\%20Schulen\%2c\%20Fassung\%20vom\%2015.03.2020.pdf], eingesehen am 15.03.2020.

[DGW83] Dröge, Walter / Göttlich, Helmut / Wille, Friedrich: Das Spernersche Lemma, Video, 10 min, 1983, [https://av.tib.eu/media/11510], eingesehen am 09.01.2020.

[Fis01] Fischer, Gerd: Analytische Geometrie. Eine Einführung für Studienanfänger, Wiesbaden 2001.

[Fox09] Fox, Jacob: Lecture 3: Sperner's lemma and Brouwer's theorem, MAT 307: Combinatorics, Princeton, Frühjahr 2009, [http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture03.pdf], eingesehen am 09.01.2020.

[Fra80] Franklin, Joel: Methods of Mathematical Economics. Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems, New York, 1980.

[Hat02] Hatcher, Allen: Algebraic Topology, Cambridge, 2002.

[HuL07] Hußmann, Stephan / Lutz-Westphal, Brigitte (Hrsg.): Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht, Wiesbaden, 2007.

[Jac83] Jacobs, Konrad: Einführung in die Kombinatorik, Berlin / New York, 1983.

[Jän08] Jänich, Klaus: Topologie, Berlin / Heidelberg 2008.

[Neu17] Neunhäuserer, Jörg: Mathematische Begriffe in Beispielen und Bildern, Berlin, 2017.

[Oss09] Ossa, Erich: Topologie. Eine anschauliche Einführung in die geometrischen und algebraischen Grundlagen, Wiesbaden, 2009.

[Rot88] Rotman, Joseph J.: An Introduction to Algebraic Topology, New York, 1988.

[Sch17] Schröcker, Hans-Peter: Geometrie für Lehramtsstudierende. Vorlesungsskriptum, Innsbruck, Sommersemester 2017.

[Sch64] Schubert, Horst: Topologie. Eine Einführung, Stuttgart, 1964.

[Spe28] Sperner, Emanuel: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, in: Hamburger mathematische Einzelschriften 7, Leipzig, 1928.

[StZ88] Stöcker, Ralph / Zieschang, Heiner: Algebraische Topologie. Eine Einführung, Stuttgart, 1988.

[Toe17] Toenniessen, Fridtjof: Topologie. Ein Lesebuch von den elementaren Grundlagen bis zur Homologie und Kohomologie, Berlin, 2017.

[Tom91] Tom Dieck, Tammo: Topologie, Berlin / New York, 1991.

[Zei95] Zeidler, Eberhard: Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physikcs, New York, 1995.