Magdalena Steuxner
Matr.-Nr.: 01515140
Studienkennzahl: UC 033 201
Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer

Der Fundamentalsatz der Algebra

Bachelorarbeit am Insitut für Mathematik an der Universität Innsbruck

Innsbruck, 17.9.2021.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt. 1799 wurde der Satz von Carl Friedrich Gauß bewiesen, allerdings unvollständig. Anhand der Ergänzungen von Soham Basu und Daniel J. Velleman in [2] wird der Beweis zu Beginn der Arbeit vorgestellt. Anschließend werden alternative Möglichkeiten thematisiert und deren Resultate diskutiert. Die Unterschiede ergeben sich aus den verschiedenen Eigenschaften von Polynomen. Zunächst wird ein Beweis behandelt, welcher sich der Funktionentheorie bedient. Hierfür werden Polynome als komplexe Funktionen aufgefasst. Die zweite Variante beruht auf der Galoistheorie, infolgedessen werden Polynome aus einem algebraischen Blick betrachtet. In einem erstem Fazit werden die drei Varianten nochmals betrachtet, Unterschiede aufgezeigt und Vorteile hervorgehoben.

Das Ziel dieser Arbeit ist es nicht nur die Vielfalt der Beweismöglichkeiten des Fundamentalsatzes der Algebra bestmöglich darzustellen, sondern auch die Resultate im Schulkontext einzubetten. Es stellt sich die Frage, inwieweit ist es möglich Schüler und Schülerinnen Aussagen über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen mithilfe eines Beweis zu erklären. Hierfür werden die vorgestellten Beweise nochmals in einem fachdidaktischen Kontext analysiert. Beruhend auf diesen Überlegungen wird abschließend eine schülerorientierte Erklärmethode für den Fundamentalsatz der Algebra formuliert.

2 Beweis nach Gauß

Gauß bewies 1799 den Fundamentalsatz nur für Polynome mit reellen Koeffizienten. Dieser wird in einem ersten Satz nochmals formal festgehalten und erklärt, weshalb der Beweis auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten gilt. Dieser erster Beweis war allerdings unvollständig, daher wird dieser in leicht abgewandelter Form vervollständigt. Diese Beweisidee wurde 2017 von Soham Basu und Daniel J. Velleman vorgestellt.[2]

Satz 2.1. *(Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ ein Polynom mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$, dann gilt:*

$$\exists a \in \mathbb{C} : p(a) = 0$$

Beweis. Sei $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ ein nicht konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten und sei $\overline{p}(z) = \overline{c_n}z^n + \overline{c_{n-1}}z^{n-1} + \ldots + \overline{c_0}$ das Polynom mit den komplex konjugierten Koeffizienten von p. Sei $q(z) = p(z)\overline{p}(z) = (c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0) \cdot (\overline{c_n}z^n + \overline{c_{n-1}}z^{n-1} + \ldots + \overline{c_0}) = (c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0) \cdot \overline{(c_n \overline{z^n} + c_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + c_0)} = p(z)\overline{p(\overline{z})}$. Dann ist q ein nicht konstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Nach Voraussetzung besitzt q eine komplexe Nullstelle z_0 und daraus folgt:

$$q(z_0) = p(z_0)\overline{p(\overline{z_0})} = 0 \Rightarrow z_0 \text{ oder } \overline{z_0} \text{ ist eine Nullstelle von } f$$

Es reicht also den Beweis nur für Polynome mit reellen Koeffizienten zu zeigen, wie es auch in Gauß ursprünglichen Beweis zu finden ist. Sei $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$

ein Polynom mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$, $n > 0$ und $c_n \neq 0$ gegeben. Wir nehmen an $c_n = 1$, ansonsten dividieren wir durch den Leitkoeffizienten. Ebenso nehmen wir an, dass $c_0 \neq 0$. Gilt nämlich $c_0 = 0$ so ist $p(0) = 0$ und die Behauptung ist gezeigt. Für $r, \phi \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $z = re^{i\phi}$:

$$\begin{aligned} R(r,\phi) &:= \Re(p(re^{i\phi})) \\ &= \Re\left(r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n + c_{n-1}r^{n-1}(\cos\phi + i\sin\phi)^{n-1} + \ldots + c_0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(r,\phi) &:= \Im(p(re^{i\phi})) \\ &= \Im\left(r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n + c_{n-1}r^{n-1}(\cos\phi + i\sin\phi)^{n-1} + \ldots + c_0\right) \end{aligned}$$

Fixieren wir $r > 0$, so können wir die Funktion R und I als Polynome vom Grad n in $\sin\phi$ und $\cos\phi$ darstellen. Wir bezeichnen mit $\tilde{R}_r(\phi)$ bzw. $\tilde{I}_r(\phi)$ die Funktion $R(r,\phi)$ bzw. $I(r,\phi)$, welche nur von ϕ abhängt. Ist $m \in \mathbb{N}$ gerade, dann gilt $(i\sin\phi)^m = (-1)^{\frac{m}{2}} \sin\phi^m$. Für $m \in \mathbb{N}$ ungerade, dann gilt $(i\sin\phi)^m = i(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin\phi^m$. Daher besitzt $\sin\phi$ in jedem Term von $\tilde{R}_r(\phi)$ eine gerade Potenz m und somit kann $\sin\phi^2$ mit $1 - cos^2$ ersetzt werden. Daraus ergibt sich $\tilde{R}_r(\phi) = p_1(\cos\phi)$, wobei $p_1 \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Analog gilt dies für das Polynom I. In jedem Term von $\tilde{I}_r(\phi)$ besitzt $\sin\phi$ eine ungerade Potenz m, somit kann $\sin\phi$ einmalig herausgehoben werden und anschließend $\sin\phi^2$ erneut mit $1 - cos^2$ ersetzt werden. Daraus folgt $\tilde{I}_r(\phi) = \sin\phi \cdot p_2(\cos\phi)$ mit $p_2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$.

Betrachten wir nun die ebenen algebraischen Kurven $\Re(p(z)) = 0$ und $\Im(p(z)) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für ein fixes r, dass $\tilde{R}_r(\phi) = p_1(\cos\phi) = 0$. $\tilde{R}_r(\phi)$ kann maximal $2n$ Lösungen besitzen . Dies ist genau dann der Fall, wenn p_1 n verschiedene Nullstellen im Intervall $[-1,1]$ besitzt, da $\cos(\frac{3\pi}{2} + \phi) = \cos(\pi - \phi)$.Tritt dies ein, so zefällt p_1 in Linearfaktoren und das Vorzeichen ändert sich nach jeder Nullstelle. Anders formuliert für die Nullstellen $\ldots, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \ldots$ gilt, das Vorzeichen von $\tilde{R}_r(\alpha)$ für $\phi_{j-1} < \alpha < \phi_j$ ist gegenteilig zu $\phi_j < \alpha < \phi_{j+1}$. Analog gilt für $\tilde{I}_r(\phi) = 0$. $\tilde{I}_r(\phi) = \sin\phi \cdot p_2(\cos\phi)$ besitzt eine Lösung für alle ganzen Vielfache von π. Aus $\sin\phi \cdot p_2(\cos\phi)$ ergeben sich maximal $2n - 2$ weitere Lösungen, da $\mathrm{grad}(p_2) = n - 1$ ist. Folglich hat $\tilde{I}_r(\phi) = 0$ maximal $2n$ Lösungen. Es gilt erneut, dass sich das Vorzeichen von $\tilde{I}_r(\phi)$ mit jeder Nullstelle ändert.

Wir erwarten nun, dass $\Re(p(z)) = 0$ und $\Im(p(z)) = 0$ die maximale Anzahl an Lösungen besitzen, wenn $|z|$ groß genug ist. Denn dann gilt, dass der dominante Term von $p(z)$ ist z^n und daraus ergeben sich $2n$ Vorzeichenwechsel von $\Re(z^n)$ und $\Im(z^n)$ auf dem Kreis $|z| = r$. Folglich gilt es zu zeigen, dass die maximale Anzahl an Nullstellen von $\tilde{R}_r(\phi)$ und $\tilde{I}_r(\phi)$ besitzt, wenn r^* groß genug ist. Formal bedeutet das, wir wählen r^* wie folgt:

$$r^* = \max\left(1, \sqrt{2}\sum_{i=0}^{n-1} |c_i|\right)$$

Sei $r > r^*$, dann wählen wir für $0 \leq k \leq 4n : \phi_k = \frac{(2k-1)\pi}{4n}$ und $z_k = re^{i\phi_k}$. Dann gilt für alle k:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i z_k^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| r^i \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} |c_i|\right) r^{n-1} \leq \frac{r^*}{\sqrt{2}} r^{n-1} \leq \frac{r^n}{\sqrt{2}}$$

Weiters gilt:

$$\Re(z_1^n) = \Re(r^n e^{in\phi_1}) = \Re(r^n e^{in\frac{\pi}{4n}}) = r^n \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{r^n}{\sqrt{2}} > \left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i z_1^i\right|$$

Also gilt für $\tilde{R}_r(\phi_1) = \Re(p(z_1)) > 0$. Allerdings gilt ebenso:

$$\Re(z_2^n) = \Re(r^n e^{in\phi_2}) = \Re(r^n e^{in\frac{3\pi}{4n}}) = r^n \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{r^n}{\sqrt{2}} < -\left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i z_2^i\right|$$

Also gilt für $\tilde{R}_r(\phi_2) = \Re(p(z_2)) < 0$. Da sich das Vorzeichen geändert hat, muss $\tilde{R}_r$ im Intervall $[\phi_1, \phi_2)$ den Wert 0 angenommen haben.

Analog gilt das für $\tilde{I}_r$. Es gilt:

$$\Im(z_2^n) = \Im(r^n e^{in\phi_2}) = \Im(r^n e^{in\frac{3\pi}{4n}}) = r^n \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{r^n}{\sqrt{2}} > \left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i z_2^i\right|$$

Also gilt für $\tilde{I}_r(\phi_2) = \Im(p(z_2)) > 0$. Allerdings gilt ebenso:

$$\Im(z_3^n) = \Im(r^n e^{in\phi_3}) = \Re(r^n e^{in\frac{5\pi}{4n}}) = r^n \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{r^n}{\sqrt{2}} < -\left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i z_3^i\right|$$

Also gilt für $\tilde{I}_r(\phi_3) = \Im(p(z_3)) < 0$. Da sich das Vorzeichen geändert hat, muss $\tilde{I}_r$ im Intervall $[\phi_2, \phi_3)$ den Wert 0 angenommen haben.
Betrachten wir die Intervalle $[\phi_1, \phi_2), [\phi_3, \phi_4), \ldots, [\phi_{4n-1}, \phi_{4n})$ besitzt $\tilde{R}_r$ in jedem Intervall eine Nullstelle. Genauso $\tilde{I}_r$ in den Intervallen $[\phi_0, \phi_1), [\phi_2, \phi_3), \ldots, [\phi_{4n-2}, \phi_{4n-1})$. Es stellt sich noch die Frage, ob die gefundenen Nullstellen paarweise verschieden sind. Daher betrachten wir die Intervalle $[\phi_0, \phi_1) = [-\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n})$ und $[\phi_{2n}, \phi_{2n+1}) = [\pi - \frac{\pi}{4n}, \pi + \frac{\pi}{4n})$, im Ersten besitzt $\tilde{I}_r$ eine Nullstelle bei 0 und im zweiten Intervall eine bei π. Somit besitzen $\tilde{R}_r$ und $\tilde{I}_r$ $2n$ Nullstellen bei einem fixen Radius r, gilt für r zusätzlich, dass zwischen zwei Nullstellen von $\tilde{R}_r$ bzw. $\tilde{I}_r$ jeweils eine Nullstelle von $\tilde{I}_r$ bzw. $\tilde{R}_r$ liegt, so heißt r Schachtelradius. Für alle Radien $r > r^*$ gilt r ist ein Schachtelradius. Wir bezeichnen mit $a_1(r) < a_2(r) < \ldots < a_{2n}(r)$ die Nullstellen von $\tilde{R}_r$ im Intervall $[0, 2\pi)$ und $b_1(r) < b_2(r) < \ldots < b_{2n}(r)$ die Nullstellen von $\tilde{I}_r$ im Intervall $[0, 2\pi)$. Dann gilt:

$$0 = b_1(r) < a_1(r) < b_2(r) < a_2(r) < \ldots < b_{2n}(r) < a_{2n}(r) < 2\pi = b_1(r) + 2\pi$$

In einem nächsten Schritt zeigen wir nun, dass die Menge der Schachtelradien offen ist und die Funktionen $a_1(r), \ldots, a_{2n}(r), b_1(r), \ldots, b_{2n}(r)$ sind stetig auf dieser Menge. Hierfür nehmen wir an, dass ρ ein Schachtelradius ist und $\varepsilon > 0$. Dann wählen wir t mit $\varepsilon \geq t > 0$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} t = & b_1(\rho) + t < a_1(\rho) - t, \\ & a_1(\rho) + t < b_2(\rho) - t, \\ & \vdots \\ & a_{2n}(\rho) + t < 2\pi - t = b_1(\rho) - t + 2\pi. \end{aligned}$$

Wir haben t gerade so klein gewählt, dass die Intervalle $(a_j(\rho) - t, a_j(\rho) + t)$ und $(b_j(\rho) - t, b_j(\rho) + t)$ disjunkt sind. Da das Vorzeichen von $\tilde{R}_\rho$ bzw. $\tilde{I}_\rho$ bei jeder Nullstelle wechselt, müssen $\tilde{R}_\rho(a_j(\rho) - t)$ und $\tilde{R}_\rho(a_j(\rho) + t)$ bzw. $\tilde{I}_\rho(b_j(\rho) - t)$ und $\tilde{I}_\rho(b_j(\rho) + t)$ für $1 \leq j \leq 2n$ gerade gegenteilige Vorzeichen besitzen. Wir wählen nun $\delta > 0$ so, dass $0 < \delta < \rho$ und $|r - \rho| < \delta$. Dann gilt für alle j, $\tilde{R}_r(a_j(\rho) - t)$ bzw. $\tilde{R}_r(a_j(\rho) + t)$ hat dasselbe Vorzeichen als $\tilde{R}_\rho(a_j(\rho) - t)$ bzw. $\tilde{R}_\rho(a_j(\rho) + t)$. Dies gilt analog für $\tilde{I}_r(b_j(\rho) - t)$ und $\tilde{I}_r(b_j(\rho) + t)$. Folglich haben nun auch $\tilde{R}_r(a_j(\rho) - t)$ und $\tilde{R}_r(a_j(\rho) + t)$ bzw. $\tilde{I}_r(b_j(\rho) - t)$ und $\tilde{I}_r(b_j(\rho) + t)$ für $1 \leq j \leq 2n$ gerade gegenteilige Vorzeichen. Daraus folgt $\tilde{R}_r$ bzw. $\tilde{I}_r$ besitzen in $(a_j(\rho) - t, a_j(\rho) + t)$ bzw. $(b_j(\rho) - t, b_j(\rho) + t)$ jeweils Nullstellen. Da die Intervalle disjunkt sind, muss r folglich ein Schachtelradius sein. Weiters sind die Nullstellen von $\tilde{I}_r$ im Intervall $(b_1(\rho) - t, b_1(\rho) + t) = (-t, t)$ gleich $0 = b_1(\rho) = b_1(r)$ und deshalb liegt $a_j(r)$ im Intervall $(a_j(\rho) - t, a_j(\rho) + t)$ mit $|a_j(r) - a_j(\rho)| < t \leq \varepsilon$ und analog ergibt sich $|b_j(r) - b_j(\rho)| < t \leq \varepsilon$. Daraus folgt schließlich, dass die Menge der Schachtelradien offen ist und die Funktionen $a_1(r), \ldots, a_{2n}(r), b_1(r), \ldots, b_{2n}(r)$ auf dieser Menge stetig sind.

In der Abbildung 1 werden die vorherigen Überlegungen verdeutlicht. Wir betrachten das Polynom $f(z) = z^3 + z^2 - 2$ und wählen $r = 2$. Dann besitzt f genau dann eine Nullstelle, wenn sowohl $\Re(f(z)) = 0$ als auch $\Im(f(z)) = 0$ gilt.Wir sehen auch, dass $r = 2$ ein Schachtelradius ist, denn $\tilde{R}_2$ und $\tilde{I}_2$ besitzen $2n$ Nullstellen und zwischen zwei Nullstellen von $\tilde{R}_2$ bzw. $\tilde{I}_2$ liegt jeweils eine Nullstelle von $\tilde{I}_2$ bzw. $\tilde{R}_2$.

Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass es zwei Zweige der ebenen algebraischen Kurven $\Re(p(z)) = 0$ und $\Im(p(z)) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ gibt, welche sich schneiden. $\Re(p(0)) \neq 0$, da $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$ und $p(0) \neq 0$ gilt. Aus der Stetigkeit folgt nun, dass ein außreichend kleiner Radius $r > 0$ existiert, sodass $\tilde{R}_r$ keine Nullstellen besitzt und r kein Schachtelradius ist. Somit ist die Menge der Radien die keine Schachtelradien sind nicht leer und besitzt die kleinste obere Schranke r_0. Denn die Menge der Schachtelradien ist offen und somit ist r_0 kein Schachtelradius. Betrachten wir die fallende Folge von

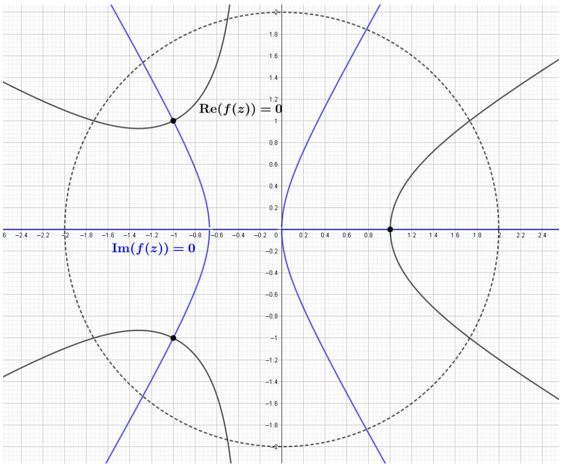

Abbildung 1: Beweisidee am Beispiel $f(z) = z^3 + z^2 - 2$

Schachtelradien $(r_k)_{k=1}^{\infty}$, welche gegen r_0 konvergiert. Ebenso existieren $\lim_{k\to\infty} a_1(r_k)$ bzw. $\lim_{k\to\infty} b_1(r_k)$ und folglich konvergieren auch alle Teilfolgen von $(a_j(r_k))_{k=1}^{\infty}$ bzw. $(b_j(r_k))_{k=1}^{\infty}$. Aus der Stetigkeit von $R(r,\phi)$ und $I(r,\phi)$ folgt, dass $\tilde{R}_{r_0}(a_j) = 0$ und $\tilde{I}_{r_0}(b_j) = 0$ und die folgenden Ungleichungen gelten:

$$0 = b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_{2n} \leq a_{2n} \leq 2\pi = b_1 + 2\pi$$

Sind allerdings die obigen Ungleichheiten strikt, so folgt daraus, dass r_0 ein Schachtelradius ist und ein Widerspruch ist. Also existieren j, k für die gilt $a_j = b_k$ und damit gilt $\tilde{R}_{r_0}(a_j) = 0$ und $\tilde{I}_{r_0}(a_j) = \tilde{I}_{r_0}(b_j) = 0$. Dann ist $r_0 e^{i a_j}$ eine Nullstelle von p.

$\square$

3 Beweis mithilfe der Funktionentheorie

In diesem Kapitel werden für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra Mittel der Funktionenthoerie verwendet. Der zu beweisenden Satz ergibt sich als direkte Folgerung des Satzes von Liouville. Hierfür müssen zunächst jene Begriffe definiert werden, welche für die Formulierung des Satzes notwendig sind. Zusätzlich wird für den Beweis des Satzes von Liouville die Cauchy-Integralformel verwendet und wird daher ebenfalls bewiesen. Diese Beweismethodik ist sehr üblich und findet sich in vielen Standardwerken wieder, beispielsweise in [6] oder [9].

Definition 3.1. $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn G eine offene und zusammenhängende Menge ist. Zusammenhängend bedeutet G kann nicht in zwei offene, disjunkte Mengen $A, B \neq \varnothing$ mit zerlegt werden, also:

$$\forall A, B \in G \text{ mit } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq X$$

Definition 3.2. (Kurven)

(i) Ein Weg in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann heißt $\Lambda = \lambda([a,b])$ Kurve in $\mathbb{C}$ mit Parametrisierung λ und den Anfangs- bzw. Endpunkt $\lambda(a)$ bzw. $\lambda(b)$.

(ii) Ein Weg λ heißt glatt, wenn er stetig differenzierbar ist.

(iii) Eine Kurve heißt geschlossene, wenn ihr Anfangspunkt gleich dem Endpunkt entspricht.

(iv) Eine Kurve Λ mit Parametrisierung $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt einfach geschlossen, wenn sie geschlossen ist und λ auf dem Intervall $[a,b)$ injektiv ist.

(v) Eine Kurve heißt glatt, wenn sie eine stetig differenzierbare Parametrisierung λ besitzt.

Definition 3.3. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann heißt f holomorph in $z \in D$, wenn f in einer Umgebung von z komplex differenzierbar ist. Ist f in jedem Punkt von D holomorph, dann heißt f holomorph. Ist f holomorph und $D = \mathbb{C}$, dann heißt f ganz.

Definition 3.4. Das Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängendes Gebiet, wenn jede auf G definierte holomorphe Funktion eine Stammfunktion in G besitzt.

Definition 3.5. (Kurvenintegral) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \ G \to \mathbb{C}$ stetig und die Kurve Λ auf dem Intervall $[a,b]$ glatt, dann heißt

$$\int_\Lambda f(\zeta)d\zeta := \int_a^b f(\Lambda(c))\dot{\Lambda}(c)dc$$

das Kurvenintegral von f entlang von Λ.

Satz 3.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : \ G \to \mathbb{C}$ holomorph und Λ eine einfach geschlossene Kurve die für $r > 0$ in $B(r,a)^\circ$ liegt. Dann gilt:*

$$\oint_\Lambda \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} d\zeta = \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} d\zeta$$

Beweis. Dieser Beweis kann auf der Seite 231 in [9] nachgelesen werden.

□

Satz 3.7. *(Cauchy-Integralformel) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \ G \to \mathbb{C}$ holomorph und Λ eine einfach geschlossene Kurve in G, wobei $\Lambda^\circ \subseteq G$ gilt. Dann gilt für alle $z \in G^\circ$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis. Da Λ einfach geschlossen ist, verläuft die Kurve in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von G. Daher kann der vorherige Satz verwendet werden und es gilt:

$$
\begin{aligned}
\oint_\Lambda \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{ic})}{re^{ic}} ire^{ic} dc && \text{[Definition des Kurvenintegrals]} \\
&= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{ic}) dc \\
&= 2\pi i f(z) && \text{[für } r \to 0\text{]}
\end{aligned}
$$

wird anschließend durch $2\pi i$ dividiert, dann ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Lambda \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

([9], S. 231) □

Satz 3.8. *(Satz von Liouville). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze und beschränkte Funktion, dann ist f konstant.*

Beweis. Laut Annahme ist f ganz und $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da aus $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt f ist konstant, reicht es ersteres zu zeigen. Hierfür verwenden wir die Cauchy'sche Integralformel:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Dann gilt für alle $r > 0$:

$$
\begin{aligned}
|f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \left| \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{c}{r^2} = \frac{c}{r}
\end{aligned}
$$

Dann folgt aus $r \to \infty$, dass $f'(z) = 0$. ([6],S. 91) □

Beweis. (Fundamentalsatz der Algebra) Betrachten wir die Polynomfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto p(z) := c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$. Wir nehmen an, dass an $c_n = 1$, ansonsten dividieren wir durch den Leitkoeffizienten. Insbesondere gilt für $|z| \to \infty$:

$$|p(z)| = |c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0| = |z^n| \cdot |c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n}| \to \infty$$

Das bedeutet für $|z| \geq r$ mit $r > 0$ existiert ein $R > 0$, so dass $|p(z)| \geq R$. Nehmen wir nun an, dass $p(a) \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$, dann ist $q(z) = \frac{1}{p(z)}$ eine beschränkte, ganze

Funktion. Nach dem Satz von Liouville ist q somit konstant und folglich müsste auch p konstant sein. Da $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ kann p nicht konstant sein und somit entsteht ein Widerspruch. Also gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ so, dass $p(a) = 0$ ist. ([6],S. 92)

□

4 Beweis mit Mitteln der Topologie

In diesem Kapitel wird das Konzept der Umlaufzahl verwendet, um den Fundamentalsatz zu beweisen. Hierfür muss zunächst der Begriff Umlaufzahl definiert werden. Die Beweisidee ähnelt stark jener von Gauß ist allerdings wesentlich einfacher und eignet sich daher sogar für den schulischen Bereich. Dieser Aspekt wird im letzten Kapitel nochmals aufgegriffen.

Definition 4.1. (Umlaufzahl) Gegeben sei ein Kurve Γ mit Parametrisierung $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ für $0 \leq t \leq 2n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt n Umlaufzahl der Kurve Γ um z_0 und ergibt sich wie folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = n$$

Anschaulich ist Γ ein Kreis der n-mal umrundet wird.

Definition 4.2. (Verallgemeinerung der Umlaufzahl) Gegeben sei eine geschlossene Kurve Γ in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt nicht auf Γ. Dann ist die Umlaufzahl der Kurve Γ um z_0 wie folgt definiert:

$$n(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

Satz 4.3. *Sei K_r eine Kreis mit Radius r, also eine Geschlossene kurve mit Parametrisierung $k(t) = re^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetige Funktionen. Gilt für alle $z \in K_r$ $|f(z) - g(z)| < \epsilon$, dann besitzen $f(K_r)$ und $g(K_r)$ die selbe Umlaufzahl um den Ursprung.*

Beweis. Dieser Beweis kann auf der Seite 135 in [5] nachgelesen werden. □

Beweis. (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto p(z) := c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ eine Polynomfunktion mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$. Wir nehmen an, dass an $c_n = 1$, ansonsten dividieren wir durch den Leitkoeffizienten. Für $c_0 = 0$ ist $z = 0$ eine Nullstelle, also nehmen wir zusätzlich an $c_0 \neq 0$. Also ist $p(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ In einem ersten Schritt muss gezeigt werden, dass p stetig ist. Da p eine endliche Linearkombination aus stetigen Funktionen ist, ist p trivialerweise stetig. Da

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^n}{p(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^n}{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n}} = \frac{1}{1} = 1$$

gibt es einen Kreis K_r mit einem Radius $r_1 > 0$, sodass:

$$|z^n - p(z)| \leq \lambda r_1^n$$

mit $0 < \lambda < 1$ und $z \in K_{r_1}$. Betrachten wir nun die Funktion $g(z) = z^n$. Dann ist $g(K_{r_1})$ ebenfalls eine geschlossene Kurve, da g stetig ist und besitzt die Parametrisierung $r_1^n e^{int}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Also umrundet g den Kreis K_{r_1} n-mal und damit hat $g(K_{r_1})$ die Umlaufzahl n um den Ursprung. Da $|z^n - p(z)| \leq \lambda r_1^n$ für alle $z \in K_{r_1}$ besitzen $g(K_{r_1})$ und $p(K_{r_1})$ die selbe Umlaufzahl um den Ursprung. Folglich ist die Umlaufzahl von $p(K_{r_1})$ gleich n. Wählen wir $r_2 > 0$ klein genug, dann entspricht $p(z) = a_0$ auf K_{r_2} und damit ist die Umlaufzahl von $p(K_{r_2})$ gleich 0. Folglich dreht sich $p(K_{r_2})$ nicht um den Ursprung, sondern dreht sich nur einmalig um a_0. Da $p(z)$ stetig ist, ist die Stetigkeit von $p(K_r)$ abhänging von r. Da die Umlaufzahl von $p(K_{r_2})$ gleich 0 ist und von $p(K_{r_1})$ gleich n, muss ein Zwischenradius r_3 existieren mit der Kurve $p(K_{r_3})$, welche den Ursprung schneidet. Folglich existiert ein z_0 auf K_{r_3} mit $p(z_0) = 0$. ([5], S. 135) □

5 Beweis mithilfe der Galoistheorie

In diesem Teil der Arbeit muss besondere Vorarbeit geleistet werden, da dieser Beweis sich umfangreicheren Theorien bedient. Das bedeutet auch, dass einige Sätze im Sinne der Vollständigkeit nochmals formuliert werden, allerdings nicht bewiesen, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Dennoch findet sich stets ein Kommentar, wo dieser zu finden ist. Besonders von Bedeutung ist in diesem Kapitel der Haupsatz der Galoistheorie, welcher als zentrales Hilfsmittel im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra fungiert.

Definition 5.1. (Körpererweiterung) Seien k, K Körper.

(i) K heißt Körpererweiterung von k, wenn gilt $k \subseteq K$ und k ist ein Teilring von K. Das bedeutet k ist abgeschlossen unter der Addition und Multiplikation, enthält 0 und 1 und das Inverse der Addition zu jedem Element aus k.

(ii) Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung, dann heißt die Dimension des k-Vektorraums

$$\dim_k(K) =: [K : k]$$

der Grad der Körpererweiterung. Insbesondere heißt diese endlich, wenn $[K : k] < \infty$ gilt.

Definition 5.2. (Minimalpolynom) Ist $k \subseteq K$ erneut eine Körpererweiterung und $a \in K$ algebraisch über k. Das bedeutet es existiert ein $p \in k[x]$ mit $p \neq 0$, sodass $p(a) = 0$. Dann heißt $p \in k[x]$ Minimalpolynom und wird als $\mathrm{Min}(a, k)$ bezeichnet, wenn gilt:

(i) p ist irreduzibel und normiert. p heißt irreduzibel, wenn $p \neq 0$ nicht invertierbar ist und für $q, r \in k[x]$ mit $p = qr$ folgt, dass q oder r invertierbar sein muss.

(ii) $p(a) = 0$.

Definition 5.3. (Algebraisch, separabele, normale Körpererweiterungen)

(i) Eine Körpererweiterung heißt algebraisch, wenn wenn jedes $a \in K$ algebraisch über k ist.

(ii) Eine Körpererweiterung heißt separabel, wenn jedes $a \in k$ über K separabel ist. Dies bedeutet wiederum a ist algebraisch über K und das zugehörige Minimalpolynom ist über K separabel. Ein irreduzibles Polynom p heißt separabel, falls p $\deg(p)$ viele verschiedene Nullstellen hat.

(iii) Eine algebraische Körpererweiterung $k \subseteq K$ heißt normal, wenn jedes irreduzible Polynom in $k[x]$, dass eine Nullstelle in K besitzt auch in K zerfällt.

(iv) Eine endliche,normale und separable Körpererweiterung heißt Galois-Erweiterung.

Definition 5.4. Ein Körper ist algebraisch abgeschlossen, wenn für alle nicht konstanten Polynome $p \in K[x]$ gilt:

$$\exists a \in K : p(a) = 0$$

Definition 5.5. Für eine Körpererweiterung $k \subseteq K$ heißt K algebraischer Abschluss von k, wenn K algebraisch abgeschlossen ist und $k \subseteq K$ eine algebraische Erweiterung ist.

Im folgenden Kapitel wird daher gezeigt, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Denn dies ist äquivalent zur Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz 5.6. *Jeder Körper k besitzt einen algebraischen Abschluss, der bis auf Isomorphie eindeutig ist.*

Beweis. Dieser Beweis ist sehr aufwändig und erfordert einiges an Vorarbeit. Daher wird dieser nicht durchgeführt, allerdings kann er auf der Seite 96 in [7] nachgelesen werden. □

Satz 5.7. *(Satz vom primitiven Element) Jede endliche, separable Erweiterung ist einfach, das bedeutet für eine endliche, separable Erweiterung $k \subseteq K$ existiert ein $a \in K$ mit $K = k(a)$.*

Beweis. Ebenso wie der vorherige Satz, bedarf dieser Beweis viel Vorarbeit und würde den Rahmen dieser Arbeit ausreizen. Er kann auf der Seite 130 in [11] nachgelesen werden. □

Definition 5.8. Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung

(i) Ein $k-$Isomorphismus $\varphi : K \to K$ heißt $k-$Automorphismus.

(ii) $\mathrm{Gal}(K,k) := \{\varphi : K \to K |\ \varphi \text{ ist } k-\text{Automorphismus}\}$ heißt Galoisgruppe.

(iii) für $H < \mathrm{Gal}(K,k)$ heißt $\mathrm{Fix}(H) := \{b \in K |\ \varphi(b) = b \text{ für alle } \varphi \in H\}$ Fixkörper.

Definition 5.9. (Zerfällungskörper) Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung und $p \in k[x]$, dann heißt K Zerfällungskörper von p über k, wenn gilt:

(i) p zerfällt über K in Linearfaktoren, das bedeutet es gibt $b \in k$ und $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $p = b(x - a_1) \ldots (x - a_n)$ und

(ii) $K = k(a_1, \ldots, a_n)$.

Satz 5.10. *Es seien $k \subseteq K$, $\overline{k} \subseteq \overline{K}$ Körpererweiterungen und $\varphi : \; k \to \overline{k}$ ein Homomorphismus. Ebenso sei $a \in K$ algebraisch über k und $p = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i$ das Minimalpolynom von a über k. Die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $p^{(\varphi)} = \sum_{i=0}^{d} \varphi(c_i) x^i$ in $\overline{K}$ entspricht dann der Anzahl der Homomorphismen $\phi : \; k(a) \to \overline{K}$ mit $\phi_{|k} = \varphi$.*

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 106 und 107 in [7]. □

Satz 5.11. *Seien $k \subseteq K \subseteq \overline{k}$ algebraischen Körpererweiterungen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$k \subseteq K$ ist normal*

(ii) *K ist ein Zerfällungskörper einer Menge von Polynomen über k.*

(iii) *Für jeden k-Homomorphismus $\varphi : \; K \to \overline{k}$ gilt $\varphi(K) \subseteq K$*

Beweis. $m \in M \subseteq \mathbb{N}$ und $i \in I \subseteq \mathbb{N}$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*: Für jedes $a \in K$ besitzt $\mathrm{Min}(a, k)$ die Nullstelle a und zerfällt folglich über K in Linearfaktoren. Also ist K der Zerfällungskörper aller $\mathrm{Min}(a, k)$ mit $a \in K$.([7] S. 113)

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei K der Zerfällungskörper von $(p_i)_{i \in I}$ mit $p_i \in k[x]$ und $\varphi : \; K \to \overline{k}$ ein k-Homomorphismus. Für eine Nullstelle $a \in K$ eines Polynoms p_i gilt,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(p_i(a)) = p_i(\varphi(a))$$

da φ ein k-Homomorphismus ist und somit Polynomgleichungen mit Koeffizienten in k erhalten. $\varphi(a)$ in $\overline{k}$, da $\varphi(a)$ eine Nullstelle von p_i ist. Diese Nullstellen erzeugen gerade K, also ist $\varphi(K) \subseteq K$. ([7] S. 112)

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $p \in k[x]$ irreduzibel und sei $a \in K$ mit $p(a) = 0$. Sei $b \in K$ beliebig mit $p(b) = 0$. Dann gibt es nach dem vorherigen Satz einen k-Homomorphismus $\varphi : \; k(a) \to \overline{k}$ mit $\varphi(a) = b$. Weiters kann φ auf den gesamten K fortgesetzt werden, hierzu findet sich ein Beweis in [7] auf der Seite 95. Wird φ auf den gesamten K fortgesetzt, so gilt $b \in \varphi(K) \subseteq K$.

□

Lemma 5.12. *(Lemma von Artin) Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Dann gilt für $H < \mathrm{Gal}(K, k)$ endlich:*

$$[K : \mathrm{Fix}(H)] \leq \#H$$

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 107 in [11]. □

Satz 5.13. *Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Dann gilt für $a \in K$ algebraisch über k:*

$$[k(a) : k] = \deg(\mathrm{Min}(a, k))$$

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 26 in [7]. □

Satz 5.14. *(Gradformel) Seien $k \subseteq K \subseteq L$ Körpererweiterungen. Dann gilt:*

$$[L : k] = [L : K] \cdot [K : k]$$

Beweis. $I, J \subseteq \mathbb{N}$. Sei $(x_i)_{i\in I}$ bzw. $(y_j)_{j\in J}$ eine Basis von K als k- Vektorraum bzw. L als K- Vektorraum. Im folgenden wird gezeigt, dass $(x_i y_i)_{i\in I, j\in J}$ eine Basis von L als k-Vektorraum ist. Hierzu muss gezeigt werden, dass $(x_i y_i)_{i\in I, j\in J}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist.

1. Lineare Unabhängigkeit: Sei $\sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} x_i y_i = 0$ mit $a_{ij} \in k$ und endlich viele $a_{ij} \neq 0$,dann ist

$$\sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} x_i y_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} a_{ij} x_i \right) y_i$$

   Da $\sum_{i\in I} a_{ij} x_i \in K$ und $(y_j)_{j\in J}$ linear unabhängig ist

$$\forall j \in J : \sum_{i\in I} a_{ij} x_i = 0$$

   Da $a_{ij} \in k$ und $(x_i)_{i\in I}$ linear unabhängig folgt $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$. Also ist $(x_i y_i)_{i\in I, j\in J}$ linear unabhängig.

2. Erzeugendesystem: Sei $l \in L$. Dann ist $l = \sum_{j\in J} \gamma_j y_j$ mit $\gamma_j \in K$. Ebenso existieren $\gamma_{ij} \in k$, sodass $\gamma_j = \sum_{i\in I} \gamma_{ij} x_i$. Daraus folgt:

$$l = \sum_{j\in J} \gamma_j y_j = \sum_{i\in I, j\in J} \gamma_{ij} x_i y_j$$

   Also ist $(x_i y_i)_{i\in I, j\in J}$ ein Erzeugendensystem und somit eine Basis von L als k-Vektorraum. ([11], S. 38)

□

Satz 5.15. *Für $p \in k[x]$ sei K der Zerfällungskörper von p über k. Dann ist $\#\mathrm{Gal}(K, k) \leq [K : k]$ und sind zusätzlich alle Nullstellen von p verschieden, dann gilt $\#\mathrm{Gal}(K, k) = [K : k]$.*

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 114 in [7]. □

Satz 5.16. *(1.Sylowsatz) G sei eine endliche Gruppe und es gilt $\#G = p^r m$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $p \nmid m$. Dann exisitieren für alle $0 \leq k \leq r$ Untergruppen $H \subseteq G$ mit $\#H = p^k$.*

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 86 in [11]. □

Definition 5.17. Sei $p \in \mathbb{P}$ und G eine Gruppe mit $\#G = p^r m$ und $p \nmid m$.

(i) Sei $H < G$ und gilt für ein $0 \leq k \leq r$: $\#H = p^k$. Dann heißt H p-Untergruppe.

(ii) Sei $H < G$ und gilt $\#H = p^r$. Dann heißt H p-Sylow-Untergruppe.

Satz 5.18. *(Haupsatz der Galoistheorie) Sei $k \subseteq K$ eine Galois-Erweiterung. Dann sind $\mathrm{Fix}(\cdot)$ und $\mathrm{Gal}(K, \cdot)$ zueinander inverse sowie inklusionsumkehrende Zuordnungen zwischen Zwischenkörpern von $k \subseteq K$ und Untergruppen von $\mathrm{Gal}(K, k)$. Ferner gilt für $H < Gal(K, k) =: G$:*

(i) $\#H = [K : \mathrm{Fix}(H)]$ und $|G : H| = [\mathrm{Fix}(H) : k]$

(ii) $H \triangleleft G \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(H)$ ist normal über k.

Beweis. Der Beweis des Hauptsatzes der Galoistheorie ist komplex. Daher wurden sowohl [7] Seite 119f, als auch [11] Seite 106 verwendet. Ebenso wurde für die Beweisstruktur [10] Seite 97f herangezogen.
Sei $k \subseteq K$ eine Galois Erweiterung. Nach dem Satz vom primitiven Element gilt $K = k(a)$ für ein $a \in K$. Da $k \subseteq K$ insbesondere normal ist, ist K auch Zerfällungskörper für ein $p \in k[x]$. Wegen Satz 5.15 gilt nun:

$$\# \mathrm{Gal}(K, k) = [K : k] < \infty$$

Da für jeden Zwischenkörper L mit $k \subseteq L \subseteq K$ die Körpererweiterung $L \subseteq K$ wieder eine Galois Erweiterung ist, können wir auch

$$\# \mathrm{Gal}(K, L) = [K : L] < \infty$$

für jeden solchen Zwischenkörper L annehmen. Sei nun $H < \mathrm{Gal}(K, k)$. Da $H \subseteq \mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(H))$ gilt, erhalten wir mittels dem Lemma von Artin:

$$\#H \leq \mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(H)) = [K : \mathrm{Fix}(H)] \leq \#H$$

wobei natürlich $k \subseteq \mathrm{Fix}(H) \subseteq K$ gilt. Somit muss aber $\mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(H)) = H$ gelten. Also ist:

$$\#H = \# \mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(H)) = [K : \mathrm{Fix}(H)]$$

Weiters gilt wegen obigen Überlegungen und der Gradformel:

$$\# \mathrm{Gal}(K, k) = [K : k] = [K : \mathrm{Fix}(H)] \cdot [\mathrm{Fix}(H) : k] = \#H \cdot [\mathrm{Fix}(H) : k]$$

Somit ist die Aussage (i) bewiesen. Es gilt nun weiters: $\mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L))) = \mathrm{Gal}(K,L)$, somit:

$$[K : L] = \#\,\mathrm{Gal}(K,L) = \#\,\mathrm{Gal}(K, \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L))) = [K : \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L))]$$

Weiters gilt erneut wegen der Gradformel:

$$[K : k] = [K : \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L))] \cdot [\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L)) : k] = [K : L] \cdot [\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L)) : k]$$

Somit $[\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L)) : k] = 1$ und damit $\mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K,L)) = L$.
Sei nun $H < \mathrm{Gal}(K,k)$ und $\tau \in \mathrm{Gal}(K,k)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Fix}(\tau H \tau^{-1}) &\Leftrightarrow (\tau h \tau^{-1})(a) = a \quad \forall h \in H \\ &\Leftrightarrow (h\tau^{-1})(a) = \tau^{-1}(a) \quad \forall h \in H \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1}(a) \in \mathrm{Fix}(H) \Leftrightarrow a \in \tau(\mathrm{Fix}(H)) \end{aligned}$$

Somit also $\tau(\mathrm{Fix}(H)) = \mathrm{Fix}(\tau H \tau^{-1})$. Sei nun H eine normale Untergruppe. Dann ist $\tau H \tau^{-1} = H$ und damit natürlich $\tau(\mathrm{Fix}(H)) = \mathrm{Fix}(H)$. Wir wählen nun einen beliebigen $k-$Homomorphismus $\varphi\colon \mathrm{Fix}(H) \to \bar{k}$. Nach Satz 5.10 gibt es eine Fortsetzung $\phi\colon K \to \bar{k}$. Da die Körpererweiterung $k \subseteq K$ normal ist, gilt nun nach dem Satz über normale Körpererweiterungen $\phi(K) \subseteq K$. Da ϕ als Körperhomomorphismus automatisch injektiv ist, gilt $\phi \in \mathrm{Gal}(K,k)$ und somit:

$$\varphi(\mathrm{Fix}(H)) = \phi(\mathrm{Fix}(H)) \subseteq \mathrm{Fix}(H)$$

Somit folgt aus dem Satz über normale Körpererweiterungen, dass $k \subseteq \mathrm{Fix}(H)$ eine normale Körpererweiterung ist. Sei nun umgekehrt $k \subseteq \mathrm{Fix}(H)$ eine normale Körpererweiterung. Wie zuvor gilt $\tau(\mathrm{Fix}(H)) \subseteq \mathrm{Fix}(H)$ für alle $\tau \in \mathrm{Gal}(K,k)$. Somit:

$$\mathrm{Fix}(\tau H \tau^{-1}) = \tau(\mathrm{Fix}(H)) \subseteq \mathrm{Fix}(H)$$

Durch Anwendung von $\mathrm{Gal}(K,\cdot)$ erhalten wir:

$$\tau H \tau^{-1} \supseteq H$$

und somit $\tau H \tau^{-1} = H$, da die Konjugation die Mächtigkeit nicht ändert. Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 5.19. *$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathbb{C}$ keine echte endliche Körpererweiterung besitzt. Das beweist die Aussage, denn jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluss, und wäre $\mathbb{C}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so müsste $\mathbb{C}$ insbesondere eine echte endliche Körpererweiterung besitzen, welche zwischen $\mathbb{C}$ und dem algebraischen Abschluss läge.
Sei dazu $\mathbb{C} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung. Durch Anwendung des Satzes des primitiven Elements können wir $K = \mathbb{R}(a)$ für ein $a \in K$ schreiben, ersetzen wir nun K mit

dem Zerfällungskörper von $\mathrm{Min}(a, \mathbb{R})$ so ist die Körpererweiterung $K \supseteq \mathbb{R}$ normal, endlich und seperabel, da $\mathbb{R}$ Charakteristik 0 besitzt. Also ist $\mathbb{R} \subseteq K$ eine Galoiserweiterung. Nach der Gradformel gilt:

$$\# \operatorname{Gal}(K, \mathbb{R}) = [K : \mathbb{R}] = [K : \mathbb{C}] \cdot [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[K : \mathbb{C}]$$

Also gilt für ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{N}$ sodass $2 \nmid m$, dass: $\# \operatorname{Gal}(K, \mathbb{R}) = 2^r m$ und wir können nach dem ersten Sylowsatz eine 2-Sylow-Untergruppe $H < \operatorname{Gal}(K, \mathbb{R})$ wählen, sodass $\# H = 2^r$. Erneut erhalten wir mittels der Gradformel:

$$2^r m = [K : \mathbb{R}] = [K : \operatorname{Fix}(H)] \cdot [\operatorname{Fix}(H) : \mathbb{R}] = 2^r \cdot [\operatorname{Fix}(H) : \mathbb{R}]$$

Also ist $[\operatorname{Fix}(H) : \mathbb{R}] = m$ ungerade. Es gilt nun erneut mit dem Satz vom primitiven Element $\operatorname{Fix}(H) = \mathbb{R}(b)$ und damit nach Satz 5.13:

$$[\operatorname{Fix}(H) : \mathbb{R}] = \deg(\mathrm{Min}(b, \mathbb{R}))$$

In $\mathbb{R}$ besitzt jedoch jedes ungerade Polynom nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle. Somit sind die einzigen irreduziblen Polynome mit ungeradem Grad gerade die Linearfaktoren. Also gilt weiters:

$$[\operatorname{Fix}(H) : \mathbb{R}] = 1$$

und somit $\operatorname{Fix}(H) = \mathbb{R}$ und weiter $[K : \mathbb{R}] = 2^r$. Mit dem obigen können wir nun:

$$\# \operatorname{Gal}(K, \mathbb{C}) = 2^{r-1}$$

schließen. Wir nehmen nun an, dass $r > 1$ gilt. In diese Falle könnten wir erneut eine Untergruppe $U < \operatorname{Gal}(K, \mathbb{C})$ wählen mit $\# U = 2^{r-2}$. Erneut wenden wir den Hauptsatz zur Galoistheorie an und erhalten:

$$2 = |\operatorname{Gal}(K, \mathbb{C}) : U| = [\operatorname{Fix}(U) : \mathbb{C}]$$

wobei $\mathbb{C} \subseteq K$ eine Galoiserweiterung ist, da $\mathbb{R} \subseteq K$ eine Galoiserweiterung ist. Wie bereits zuvor argumentieren wir nun erneut über den Satz vom primitiven Element. In $\mathbb{C}$ gibt es keine quadratischen irreduziblen Polynome, insbesondere also keine quadratischen Minimalpolynome, da man in $\mathbb{C}$ stets Wurzeln ziehen kann. Somit muss $r = 1$ gelten, und damit $\# \operatorname{Gal}(K, \mathbb{C}) = 1 = [K : \mathbb{C}]$, also $K = \mathbb{C}$. Somit ist der Hauptsatz der Algebra bewiesen. ([5], S.123f)

□

6 Beweis nach Laplace

In diesem Kapitel wird der Fundamentalsatz der Algebra nach Laplace vorgestellt. Hierfür ist ein zentrales Werkzeug der Hauptsatz über symmetrische Polynome, welcher zunächst formuliert wird.

Satz 6.1. *Jedes reelle Polynom p mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$

Beweis. Die Aussage wird im Kapitel 8 nochmals ausführlich besprochen als mögliche Vereinfachung des Fundamentalsatzes der Algebra im schulischen Kontext. Der Beweis kann daher im Unterkapitel 8.2 nachgelesen werden. □

Satz 6.2. *Sei* $p \in \mathbb{R}[x]$*, dann existiert eine Körpererweiterung* $\mathbb{R} \subseteq K$*, sodass p über K zerfällt.*

Beweis. Sei $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{R}$, welcher laut Satz 5.6 existieren muss. Dann zerfällt jedes $q \in \overline{\mathbb{R}}[x]$ in Linearfaktoren, insbesondere zerfällt p in Linearfaktoren. Folglich besitzt p einen Zerfällungskörper $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. □

Satz 6.3. *(Hauptsatz über symmetrische Polynome) Es sei* $K \supseteq \mathbb{R}$ *eine Körpererweiterung,* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in K$ *und* $\eta_k := \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq n} \xi_{k_1} \cdot \cdots \cdot \xi_{k_n}$*. Dann gilt:*

$$\prod_{i=1}^{n} (x - \xi_i) = x^n - \eta_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \eta_n$$

Insbesondere ist jeder in $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *symmetrische Ausdruck auch ein reeller polynomialer Ausdruck in* $\eta_1, \ldots, \eta_n$*.*

Beweis. Der Beweis findet sich auf Seite 190f in [8]. □

Satz 6.4. *Jedes quadratische Polynom* $p \in \mathbb{C}[z]$ *zerfällt über* $\mathbb{C}$*.*

Beweis. In $\mathbb{C}$ können stets Wurzeln gezogen werden, daraus folgt unmittelbar das jedes quadratische Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt. □

Beweis. (Fundamentalsatz der Algebra) Wie bereits zuvor, genügt es den Satz für normierte Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ zu beweisen. Weiters können wir annehmen, dass p folgende Form besitzt:

$$p = x^n - b_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_n \in \mathbb{R}[x]$$

Wir schreiben $n = 2^l m$, wobei m ungerade sei und führen Induktion über l. Für $l = 0$ folgt die Aussage aus dem Satz weiter oben, da p dann ungeraden Grad besitzt. Sei nun $l \geq 1$. Da p einen Zerfällungskörper K besitzt, können wir p schreiben als:

$$p = (x - \xi_1) \cdot \cdots \cdot (x - \xi_n) \in K[x]$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$, wir betrachten das Polynom:

$$\Upsilon_\lambda = \prod_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} (x - \xi_{k_1} - \xi_{k_2} - \lambda \xi_{k_1} \xi_{k_2}) \in K[x]$$

Da Υ_λ symmetrisch in ξ_1, ξ_2 ist, sind es insbesondere auch die Koeffizienten welche man durch Ausmultiplizieren erhält. Wegen der obigen Darstellung von p wissen wir, dass die Koeffizienten b_i von p mit den η_i aus dem Hauptsatz über symmetrische Polynome übereinstimmen. Da die Koeffizienten relle Ausdrücke in den η_i sind, folgt bereits, dass alle Koeffizienten von Υ_λ reell sind, also $\Upsilon_\lambda \in \mathbb{R}[x]$. Nun gilt:

$$\#\{(k_1, k_2) \in \{1, \ldots, n\}^2 \,|\, 1 \leq k_1 < k_2 \leq n\} = \frac{1}{2}n(n-1) = 2^{l-1}m(2^l m - 1)$$

wobei $2^l m - 1$ ungerade ist, da $l \geq 1$ gilt. Somit können wir die Induktionsvoraussetzung auf Υ_λ anwenden und erhalten, dass Υ_λ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.
Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass es zu jeder Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ zwei Indizes $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$ gibt, sodass

$$\xi_{k_1} - \xi_{k_2} - \lambda \xi_{k_1} \xi_{k_2} \in \mathbb{C}$$

gilt. Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, und $\{(k_1, k_2) \in \{1, \ldots, n\}^2 \,|\, 1 \leq k_1 < k_2 \leq n\}$ endlich ist, können wir zu zwei verschiedenen Zahlen λ_1, λ_2 ein Tupel $w_1, w_2 \in \{(k_1, k_2) \in \{1, \ldots, n\}^2 \,|\, 1 \leq k_1 < k_2 \leq n\}$ finden, sodass:

$$\xi_{w_1} + \xi_{w_2} + \lambda_1 \xi_{w_1} \xi_{w_2} \in \mathbb{C}$$
$$\xi_{w_1} + \xi_{w_2} + \lambda_2 \xi_{w_1} \xi_{w_2} \in \mathbb{C}$$

Anderenfalls hätten wir eine injektive Abbildung der reellen Zahlen in eine endliche Menge, was offensichtlich nicht möglich ist. Somit gilt also auch $\xi_{w_1} \xi_{w_2} \in \mathbb{C}$ und damit natürlich auch $\xi_{w_1} + \xi_{w_2} \in \mathbb{C}$. Zum Schluss sehen wir noch, dass:

$$\mathbb{C}[x] \ni x^2 - (\xi_{w_1} + \xi_{w_2})x + \xi_{w_1} \xi_{w_2} = (y - \xi_{w_1})(y - \xi_{w_2})$$

gilt. Und da wegen dem letzten Hilfssatz komplexe quadratische Polynome stets über $\mathbb{C}$ zerfallen, folgt dass $\xi_{w_1} \in \mathbb{C}$ und $\xi_{w_2} \in \mathbb{C}$ gilt. Somit haben wir bewiesen, dass mindestens eine der Nullstellen von p komplex ist, was die Aussage beweist. ([4], S.96) □

7 Beweis nach Argand

In diesem Kapitel wird der Beweis des Fundamentalsatzes mittels einfacher Methoden der Analysis lösen. Zunächst wird Minimumsatz von Cauchy formuliert und bewiesen, der Beweis ist dabei angewiesen auf den Satz vom Minimum und Maximum. Daher wird dieser ebenfalls zu Beginn bewiesen. Im nächsten Schritt wird die Argrandsche Ungleichung gezeigt, hierfür wird die Tatsache benötigt, dass jede komplexe Zahl eine n-te Wurzel für $0 < n < \infty$ besitzt. Nachdem diese ebenso bewiesen wird, kann der gewünschte Beweis durchgeführt werden.Diese Beweisidee orientiert sich vor allem an [5].

Satz 7.1. *Ein Polynom $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$ ist stetig.*

Satz 7.2. $k, d \in \mathbb{N}$. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum und $f : K \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(K)^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die gilt

$$\exists \tilde{x} \in K : \tilde{x} = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt

$$\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(\lim_{j\to\infty} x_{n_j}) = f(\tilde{x}).$$

Also konvergiert $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\tilde{x}) \in f(K)$. Folglich ist $f(K)$ kompakt. □

Satz 7.3. *(Satz vom Minimum und Maximum) $d \in \mathbb{N}$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und nimmt auf K ihr Maximum und Minimum an, das heißt*

$$\exists x_{min}, x_{max} \in K\ \forall x \in K :\ f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}).$$

Beweis. Da K kompakt ist, ist $f(K)$ kompakt und somit ist f beschränkt. Folglich existieren $\inf f(K)$ und $\sup f(K)$. Da $f(K)$ kompakt und damit abgeschlossen ist, gilt insbesondere $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. □

Definition 7.4. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$, dann heißt w n-te Wurzel von z.

Satz 7.5. *Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann besitzt z eine n-te Wurzel $w \in \mathbb{C}$ für die gilt:*

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \wedge \arg(w) = \frac{\arg(z)}{n} \wedge \Re(w) = \sqrt[n]{|z|}\cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right) \wedge \Im(w) = \sqrt[n]{|z|}\sin\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)$$

Beweis. Sei w, z wie oben, dann gilt:

$$\begin{aligned}
w^n =& (\Re(w) + i\Im(w))^n \\
=& \left(\sqrt[n]{|z|}\cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right) + i\sqrt[n]{|z|}\sin\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)\right)^n \\
=& |z|\left(\cos\left(\frac{\arg(z)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg(z)}{n}\right)\right)^n \\
=& |z|\left(e^{i\frac{\arg(z)}{n}}\right)^n = |z|\left(e^{in\frac{\arg(z)}{n}}\right) \\
=& |z|\left(e^{i\arg(z)}\right) = |z|\left(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right) \\
=& z
\end{aligned}$$

□

Satz 7.6. *(Der Cauchysche Minimumsatz) Für jedes Polynom $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$ gibt es ein $z_{min} \in \mathbb{C}$, sodass*

$$\forall z \in \mathbb{C} :\ |p(z_{min})| \le |p(z)|.$$

Beweis. Für $|z| \to \infty$ gilt $|p(z)| \to \infty$. Wegen der Grenzwertaussage gibt es zu jedem $M > 0$ ein $R > 0$, sodass $|p(z)| > M$ für $|z| > R$. Die Scheibe $|z| \leq R$ ist kompakt. Die Funktion $(x, y) \mapsto |p(x + iy)|$ ist reellwertig und stetig, daher nimmt p dort sein Minimum an nach dem Satz vom Minimum und Maximum. ([5], S. 32)

□

Satz 7.7. *(Argandsche Ungleichung) Sei* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ *eine nichtkonstante Polynomfunktion. Ist* $p(z_0) \neq 0$, *dann ist* $|p(z_0)|$ *kein Minimumstelle von* $|p(z)|$.

Beweis. Sei p wie oben und wähle z_0 so, dass $p(z_0) \neq 0$. Wir verschieben p um z_0, das bedeutet z wird ersetzt mit $z + z_0$. Daher gilt $p(0) \neq 0$. Anschießend multiplizieren wir p mit $\frac{1}{p(0)}$ und erhalten $p(z_0) = 1$. Also muss in einem nächsten Schritt gezeigt werden, dass 1 kein Minimum von $|p(z)|$ ist. Sei $k > 0$ die kleinste Zahl für die $c_k \neq 0$ ist. Dann hat $p(z)$ hat die Form:

$$p(z) = 1 + c_k z^k + \sum_{i=k+1}^{n} c_i z^i$$

Wir wählen nun $\zeta = \sqrt[k]{-\frac{1}{c_k}}$ und ersetzen z mit ζz. Also erhalten wir:

$$p(z) = 1 - z^k + z^{k+1} q(z)$$

wobei $q(z) \in \mathbb{C}[x]$ ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt: $|p(z)| \leq |1 - z^k| + |z^{k+1} q(z)|$. Für ein positives, reelles x kann dies vereinfacht werden zu:

$$|p(x)| \leq |1 - x^k| + x^{k+1} |q(x)|.$$

Für $x < 1$ gilt $x^k < 1$ ergibt sich:

$$|p(x)| \leq \ 1 - x^k + x^{k+1} |q(x)| = 1 - x^k (1 - x|q(x)|)$$

Für ein kleines x ist auch $x|q(x)|$ klein, also können wir ein x_0 wählen, sodass $x_0 |q(x_0)| < 1$ ist. Folglich ist $x_0^k (1 - x_0 |q(x)|) > 0$ und damit ist $|p(x_0)| < 1 = |p(0)|$. Also ist 1 kein Minimum und das Lemma wurde gezeigt. ([5], S. 32f) □

Beweis. (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$ ein Polynom mit $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n \neq 0$. Dann folgt aus Lemma 6.1, dass p ein Minimum besitzt an einer Stelle z_0. Nach Lemma 6.2 ist $|p(z_0)| = 0$ und damit $p(z_0) = 0$, da dies sonst kein Minimum wäre. Das bedeutet z_0 ist eine Nullstelle. ([5], S. 33) □

8 Der Fundamentalsatz der Algebra in der Schule

Der Lehrplan der 7. Klasse allgemeinbildenden höhere Schulen beinhaltet den Fundamentalsatz der Algebra.[3] Dieser wird im Kontext der komplexen Zahlen folgendermaßen eingebettet:

Komplexe Zahlen:

- Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung der reellen Zahlen erkennen
- Komplexe Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ kennen; mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können
- **Den Fundamentalsatz der Algebra kennen**
- Komplexe Zahlen in Polarform kennen

Es stellt sich somit die Frage, wie kann der Fundamentalsatz der Algebra den Schülern und Schülerinnen vermittelt werden, sodass diese von der Richtigkeit des Satzes überzeugt sind. In der Mathematik ist es üblich die Richtigkeit des Satzes zu beweisen, daher wird in diesem Kapitel diskutiert, welcher von den erarbeiteten Beweisen unterrichtstauglich und damit durchführbar ist. Anschließend wird die Aussage des Fundamentalssatzes der Algebra wesentlich vereinfacht, somit wird eine zweite Möglichkeiten geboten im Sinne einer Individualisierung.

8.1 Beweismethoden für den Unterricht

In diesem Kapitel wird die Perspektive auf die Beweismöglichkeiten des Fundamentalsatzes der Algebra gewechselt, vom mathematischen Blickwinkel zum Fachdidaktischen. Es geht nicht mehr um die Lösung eines mathematischen Problems, sondern um die Erklärungsmöglichkeiten in der Schule. In diesem Kontext sind die Beweise mittels der Galoistheorie, der Funktionentheorie und der Beweis nach Laplace auszuschließen, da die notwendige Basis zur Beweisführung in der Schule fehlt. Folglich gilt es den Beweis nach Gauß, nach Argands und den Beweis mit Mitteln der Topologie zu analysieren. Die Analyse wird unter dem Gesichtspunkt einer hohen Unterrichtsqualität geführt. Laut Barzel ergibt sich diese aus sieben Qualitätsbereichen: Fachlichkeit, Überfachlichkeit, Verstehen, Vernetzung, Vielfalt, Authenzität und Sinnstiftung. ([1], S.26) Fachlichkeit meint die notwendige fachsprachliche Präzision. Da diese Arbeit im Kontext eines Fachstudiums in Mathematik verfasst wird, kann davon ausgegangen werden, dass alle Beweismöglichkeiten diesem Kriterium genügen. Allerdings ergibt sich daraus die Problematik der Überfachlichkeit. Die vorgestellten Beweise müssen in ihrer Formulierung wesentlich an die Schüler und Schülerinnen angepasst werden und es soll auch die Möglichkeit gegeben werden, soziale Lernziele zu erreichen. Das bedeutet einzelne Beweiselemente sollen eigenständig und in Gruppenarbeiten erarbeitet werden. Diese Möglichkeit ergibt sich ebenfalls in allen drei Beweisvarianten. Konkret können vorherigen Sätze und Definitionen eigenständig erarbeitet und anschließend in Gruppen präzise formuliert werden.

Das Vernetzen und Verstehen meint das Aufbauen einer stabilen und tragfähigen Vorstellung von mathematischen Konzepten, welche mit früheren Inhalten vernetzt werden können. Auf den ersten Blick erscheint der Beweis nach Argand demnach ideal, denn dieser kommt mit der reellen Analysis aus und verwendet bekannte Konzepte. Allerdings ist dieser Beweis nicht intuitiv. Salopp formuliert, funktioniert er einfach nur. Im Gegensatz dazu können der Beweis nach Gauß und der Beweis mit Mitteln der Topologie geometrisch veranschaulicht werden und somit die Beweisidee bildlich skizziert werden.

Daher sind letzere Beweise im Sinne des Verstehens dem Beweis nach Argand vorzuziehen. Dennoch bleiben die Beweise anspruchsvoll und es gilt diese zugänglicher zu gestalten. Hierzu bietet es sich an, den ursprünglichen Beweis von Gauß zu untersuchen, welcher in Kapitel 2 bereits erwähnt wurde. Hierzu sei $f(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ ein nicht konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Wir folgen einem Zweig von $\Re(f(z)) = 0$ und $\Im(f(z)) = 0$ und tritt dieser in den Kreis ein, so wird dieser Zweig den Kreis durch einen anderen Schnittpunkt wieder verlassen. Somit müssen die zwei Kurven $\Re(f(z)) = 0$ und $\Im(f(z)) = 0$ sich im Inneren des Kreises schneiden und der Schnittpunkt dieser ist gerade die Nullstelle. Dieser Beweis beruht auf der Behauptung, dass ein Zweig der Kurven $\Re(f(z)) = 0$ und $\Im(f(z)) = 0$ beim Eintreten des Kreises diesen auch wieder verlässt. Im Sinne der Einfachheit könnte diese Behauptung als bekannt angenommen werden. Dadurch ist der Beweis aus Kapitel 2 wesentlich einfacher und somit in der Schule anwendbar. Eine solche Vereinfachung ist beim Beweis im Kapitel 4 nur bedingt möglich, da ansonsten grundlegende Konzepte von Kurven und Wegen missverstanden werden können. Eine Vernetzung mit Bekanntem beim Beweis von Gauß zwangsläufig, da die Beweisidee auf der geometrische Darstellung der komplexen Zahlen aufgebaut ist. Folglich erscheint dieser Beweis am geeignetesten. Ebenso gibt diese Methode den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit die Geschichte der Mathematik kennenzulernen und somit ist der Unterricht nicht nur authentisch und sinnstiftend, sondern verwendet auch das genetische Prinzip. Anders formuliert den Schülern und Schülerinnen wird die Möglichkeit geboten in die Rolle des Mathematikers oder der Mathematikerin hineinzuschlüpfen. Eine weitere Möglichkeit wird im Kapitel 8.2 vorgestellt und somit auch Vielfalt als Qualitätskriterium berücksichtigt.

8.2 Vereinfachung des Fundamentalsatzes der Algebra

Auch wenn der Beweis nach Gauß für den Schulunterricht vereinfacht werden kann, ist seine Herausforderung im Schulkontext offensichtlich. Daher wäre eine Vereinfachung des Fundamentalsatz der Algebra als Alternative durchaus sinnvoll. Dies führt uns zu folgenden Satz:

Satz 8.1. *Sei* $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$ *ein Polynom mit* $c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$,$n \in \mathbb{N}$ *und* n *ungerade, dann gilt:*

$$\exists a \in \mathbb{R} : p(a) = 0$$

Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz, da dieser allerdings nicht explizit Teil des Lehrplans ist, muss dieser zunächst in einer Unterrichtssequenz erarbeitet werden. Allerdings können Schüler und Schülerinnen zu diesem Zeitpunkt bereits Grenzwerte berrechnen, was in diesem Beweis notwendig ist.

Beweis. Sei $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$ ein reellwertiges Polynom mit $c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$,$n \in \mathbb{N}$ und n ungerade. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0 = \lim_{x\to\infty} x^n(1 + c_{n-1}x^{-1} + \ldots + c_0 x^{-n}) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(z) = \lim_{x\to-\infty} x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0 = \lim_{x\to-\infty} x^n(1 + c_{n-1}x^{-1} + \ldots + c_0x^{-n}) = -\infty$$

Das bedeutet es existiert ein $a \in \mathbb{R}_{<0}$ bzw. ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $p(a) < 0$ bzw. $p(b) > 0$. Da p stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $p(x_0) = 0$. □

Eine weitere Vereinfachung bildet der folgende Satz:

Satz 8.2. *Sei $p(x) = x^n - z$ ein Polynom mit $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$\exists a \in \mathbb{C} : p(a) = 0$$

Beweis. Diese Aussage ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 7.5. Allerdings kann dieser Beweis wesentlich anschaulicher gestaltet werden, indem dieser geometrisch erarbeitet wird . Hierzu wird z in seinen Polarkoordinaten angegeben und anschließend mittels GeoGebra grafisch dargestellt. In Abbildung 2 wird dies anhand des Beispiels $\sqrt[10]{z}$ gezeigt, wobei z verschiebbar ist. Die Schüler und Schülerinnen können auch den Schieberegler verändern, also $\sqrt[n]{z}$ für alle $2 \leq n \leq 12$ darstellen. Entscheidend ist, dass zu diesem Zeitpunkt bereits ein geometrisches Verständnis für die Multiplikation zweier komplexen Zahlen vorhanden ist, sollte dies nicht der Fall sein, so könnte dies analog mit GeoGebra erabeitet werden.

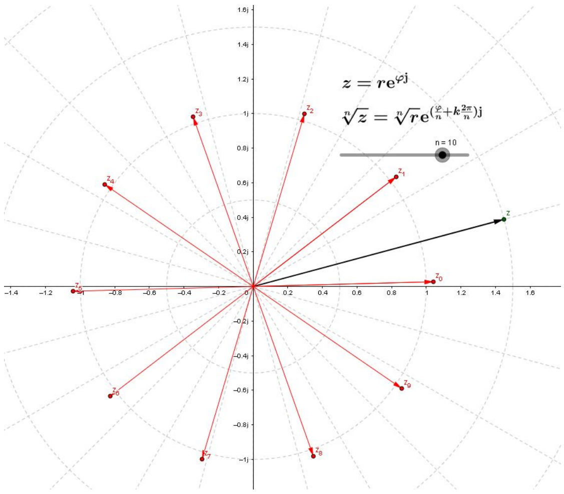

Abbildung 2: Geometrische Darstellung von $\sqrt[10]{z}$

□

8.3 Umsetzung im Unterricht

Es wurden zwei Möglichkeiten vorgelegt den Fundermentalsatz zu behandeln. Die erste Möglichkeit ist eine Herausforderung und sollte aufgrund seiner Komplexität mit besonders interessierten Schüler und Schülerinnen behandelt werden. Allerdings könnte die erste Variante abgeändert werden und mittels Geogebra erarbeitet werden. Hierzu können die Schüler und Schülerinnen in einem vorbereiteten Geogebra-File den Schnittpunkt der zwei Kurven $\Re(f(z)) = 0$ und $\Im(f(z)) = 0$ im Inneren des Kreises für ein exemplarisches f untersuchen und ihre Überlegung notieren. Ziel ist es dabei, den Beweis durch Beobachtung anstelle von formellen Beweisen zu überprüfen.

Die zweite Möglichkeit ist hingegen wesentlich einfacher, da sie Größtenteils mit dem Vorwissen der Schüler und Schülerinnen auskommt. Dennoch sind die bewiesenen Aussagen wesentlich weniger stark. Allerdings ist es eine gute Alternative für leistungsschwächere Schüler und Schülerinnen. Die beiden Überlegung lassen sich somit optimal im Sinne der Individualisierung einbauen und sie decken einen großen Teil der Polynome ab.

Literatur

[1] Bärbel Barzel u. a. *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* ger. 5. Auflage. Scriptor Praxis. Barzel, Bärbel (VerfasserIn) Holzäpfel, Lars (VerfasserIn) Leuders, Timo (VerfasserIn) Streit, Christine (VerfasserIn). Berlin: Cornelsen, 2017. 192 S. ISBN: 978-3-589-23151-5.

[2] Soham Basu und Daniel J. Velleman. "On Gauss's First Proof of the Fundamental Theorem of Algebra". In: *The American Mathematical Monthly* 124.8 (2017), S. 688. ISSN: 00029890. DOI: `10.4169/amer.math.monthly.124.8.688`.

[3] Bundesministerium für Unterricht und Kunst. *Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen.* BGBl. Nr. 88/1985. Version Fassung vom 11.06.2021. 11. Juni 2021. URL: `https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568` (besucht am 11. 06. 2021).

[4] Heinz-Dieter Ebbinghaus u. a. *Zahlen.* ger. Bd. 1. Grundwissen Mathematik. Berlin und Heidelberg: Springer, 1983. ISBN: 978-3-540-12666-9. DOI: `10.1007/978-3-642-96783-2`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-96783-2`.

[5] Benjamin Fine und Gerhard Rosenberger. *The Fundamental Theorem of Algebra.* eng. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1997. 210 S. ISBN: 9781461219286. DOI: `10.1007/978-1-4612-1928-6`.

[6] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie.* ger. Dritte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer, 2000. 541 S. ISBN: 3-540-67641-4. DOI: `10.1007/978-3-662-07352-0`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-07352-0`.

[7] Ernst Kunz. *Algebra.* ger. vieweg studium Aufbaukurs Mathematik / Advanced Lectures in Mathematic. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1991. 254 S. ISBN: 3-528-07243-1. DOI: `10.1007/978-3-322-85355-4`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-85355-4`.

[8] Serge Lang. *Algebra.* eng. Rev. 3. ed., corr. printing. Bd. 211. Graduate texts in mathematics. New York, NY: Springer, 2005. 914 S. ISBN: 978-0-387-95385-4.

[9] Kurt Meyberg und Peter Vachenauer. *Höhere Mathematik 2. Differentialgleichungen · Funktionentheorie Fourier-Analysis · Variationsrechnung.* ger. Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer, 1997. ISBN: 3-540-62398-1. DOI: `10.1007/978-3-642-97970-5`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-97970-5`.

[10] Tim Netzer. *Algebra.* Innsbruck, 2019. URL: `https://www.uibk.ac.at/mathematik/algebra/teaching/teaching-tim-netzer.html` (besucht am 10. 06. 2021).

[11] Gernot Stroth. *Algebra. Einführung in die Galoistheorie.* ger. De Gruyter Lehrbuch. Berlin: De Gruyter, 1998. 287 S. ISBN: 3-11-015534-6. URL: `http://www.degruyter.com/search?f_0=isbnissn&q_0=9783110803174&searchTitles=true`.