Bachelorarbeit

Vollständig positive und kopositive Matrizen

Sigrid Schwarzer

Innsbruck, 05.10.2020

Verfasst im Rahmen des Bachelorstudiums:

Mathematik

Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Fakultät für Mathematik

BetreuerIn: Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr. Netzer Tim

Abstrakt

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit nichtnegativen Einträgen nennt man *vollständig positiv*, wenn es eine nichtnegative Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ gibt, sodass $A = BB^T$. Bei vollständig positiven Matrizen handelt es sich um spezielle positiv semidefinite Matrizen. Bis zur Dimension vier gilt sogar, dass jede positiv semidefinite Matrix, welche nur nichtnegative Einträge besitzt, vollständig positiv ist. Für Matrizen höherer Dimension kann man Beispiele finden, für welche diese Aussage nicht gilt. Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit vollständig positiven Matrizen ist der CP-Rang. Er gibt die kleinstmögliche Anzahl der Spalten von B an, sodass $A = BB^T$ gilt.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nennt man *kopositiv*, wenn $x^T Ax \geq 0$ für jeden Vektor $x \geq 0$ gilt. Daraus folgt, dass jede positiv semidefinite Matrix kopositiv ist. Wie bei den vollständig positiven Matrizen kann man auch bei den kopositiven Matrizen eine Aussage über Matrizen bis zur Dimension vier treffen. Jede symmetrische $n \times n$ Matrix mit $n \leq 4$ ist genau dann kopositiv, wenn sie als Summe einer positiv semidefiniten Matrix und einer nichtnegativen, symmetrischen Matrix geschrieben werden kann. Man kann wiederum Matrizen finden, mit welchen diese Behauptung für höhere Dimensionen widerlegt werden kann.

Ein wichtiges Gegenbeispiel dafür ist die Hornsche Matrix. Es handelt sich dabei um eine kopositive Matrix der Dimension fünf, welche nicht als Summe einer positiv semidefiniten und einer nichtnegativen, symmetrischen Matrix geschrieben werden. Zusätzlich kann man aus dieser Matrix ein Polynom bilden, indem man von beiden Seiten einen Vektor $x^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2)$ hinzu multipliziert. Das Polynom ist nichtnegativ, kann jedoch trotzdem nicht als Summe von Quadraten von Polynomen geschrieben werden.

Bei der Menge der kopositiven Matrizen handelt es sich ebenso wie bei der Menge der vollständig positiven Matrizen um einen konvexen Kegel. Eines der wichtigsten Gebiete, in welchem diese Kegel zum Einsatz kommen, ist die Optimierung. Von einer kopositiven Optimierung spricht man, wenn es sich um Programme über die beiden Mengen handelt. Da die Kegel dual zueinander sind, kann man zu einem Programm über den vollständig positiven Kegel immer ein duales Programm über den kopositiven Kegel definieren. Quadratische Optimierungsprobleme können mit diesem Wissen in kopositive und somit lineare Probleme umgeformt werden. Mit genügend Wissen über beide Matrizenarten und deren Kegel kann man diese Probleme besser lösen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Arbeit befasst sich mit vollständig positiven und kopositiven Matrizen. Obwohl ihr Bekanntheitsgrad im Gegensatz zu anderen Matrizenarten eher gering ist, finden sie dennoch Anwendung in den verschiedensten Bereichen, wie der Statistik und Optimierung. Beide Matrizenarten sind eng mit positiv semidefiniten Matrizen verbunden. So sind vollständig positive Matrizen spezielle positiv semidefinite Matrizen. Jede Matrix, für die die positive Semidefinitheit gilt, ist wiederum kopositiv.

Das erste Kapitel der Arbeit umfasst die wichtigsten Grundkenntnissen über Matrizen allgemein und über positiv semidefinite Matrizen im Speziellen. Dieses Vorwissen wird benötigt, um gewisse Zusammenhänge in der Arbeit besser verstehen zu können.

Das zweite Kapitel ist das Kernkapitel der Arbeit und beinhaltet den aktuellen Wissensstand über vollständig positive und kopositive Matrizen. Es wird der Frage nachgegangen, wie diese Matrizen aussehen und welche Eigenschaften sie besitzen. Es zeigt sich, dass man für Matrizen mit niedriger Dimension viele Aussagen treffen kann, für Matrizen höherer Dimension jedoch nicht.

Im dritten Kapitel wird ein genauerer Einblick in den Anwendungsbereich kopositive Optimierung gegeben. Dabei handelt es sich um lineare Optimierungsprobleme über die Kegel der vollständig positiven und kopositiven Matrizen. Es wird auf den Nutzen ebenso eingegangen wie auf die Einsatzmöglichkeiten der kopositiven Optimierungsprogramme.

Der Kern des vierten Kapitels ist ein Beweis betreffend die Hornsche Matrix, eine bedeutende kopositive Matrix. Sie dient als Gegenbeispiel, mit welchem die Gültigkeit einer bestimmten Behauptung über kopositive Matrizen für höhere Dimensionen widerlegt werden kann.

Im fünften und letzten Kapitel liefere ich für ein bestimmtes Polynom den Beweis, dass es nicht als Summe von Quadraten von Polynomen dargestellt werden kann, obwohl es nichtnegativ ist.

Diese Arbeit stützt sich hauptsächlich auf das Buch von Berman und Shaked-Monderer [1], welches einen Überblick über die zwei Matrizenarten gibt, sowie den Artikel von Dür [2] über die kopositive Optimierung und die Arbeit von Diananda [3]. In ihrer Arbeit liefert sie den Beweis zur Hornschen Matrix.

2 Vorwissen

Um vollständig positive und kopositive Matrizen erklären und verstehen zu können, benötigen wir Vorwissen über Matrizen, besonders über positiv semidefinite Matrizen. Die Arbeit befasst sich ausschließlich mit reellen Matrizen.

Dieses Kapitel basiert auf [1].

Definition 2.1 (symmetrische Matrix)**.** Eine $n \times n$ Matrix ist *symmetrisch*, wenn sich ihre Einträge an der Hauptdiagonalachse spiegeln, also falls für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

gilt, wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A bezeichnet.

Eine Matrix A nennt man *nichtnegativ*, wenn alle Einträge der Matrix nichtnegativ sind und *positiv*, wenn alle ihre Einträge positiv sind.

S_n bezeichnet in dieser Arbeit die Menge aller $n \times n$ symmetrischen Matrizen und SNN_n die Menge aller $n \times n$ symmetrischen und nichtnegativen Matrizen.

$$S_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{A ist symmetrisch}\}$$
$$SNN_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{A ist symmetrisch und nichtnegativ}\}$$

Definition 2.2 (Rang einer Matrix)**.** Der *Rang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension des Spaltenraums von A. Der Spaltenraum ist jener Untervektorraum von $\mathbb{R}^{m \times 1}$, welcher von den Spalten dieser Matrix erzeugt wird. [7]

Eine Matrix A mit Rang r kann als Summe von r Matrizen, welche jeweils den Rang 1 haben, geschrieben werden.

Definition 2.3 (Transponierte Matrix)**.** Sei A eine Matrix mit reellen Einträgen. Die transponierte Matrix A^T erhält man, wenn man die Zeilen und Spalten von A vertauscht, so entspricht zum Beispiel die erste Spalte der Matrix A der ersten Zeile von A^T. Die Elemente werden also an der Hauptdiagonale gespiegelt.

Definition 2.4 (Eigenwerte einer Matrix)**.** Die Eigenwerte einer $n \times n$ Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta_A(x) = det(xI - A)$$

Definition 2.5 (Hauptminoren)**.** Unter *Hauptminoren* versteht man die Determinanten der Untermatrizen, die entstehen, wenn man beliebige Zeilen und die dazugehörigen Spalten streicht. Die führenden Hauptminoren sind jene Determinanten der Untermatrizen, die entstehen, wenn man von rechts unten startend, jeweils eine Zeile und die dazugehörige Spalte streicht.

Beispiel 2.6. Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

dann sind die führenden Hauptminoren von A folgende Determinanten:

$$A_3 = det(A) = 0, \quad A_2 = det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}) = -3, \quad A_1 = det(1) = 1$$

Definition 2.7 (Träger eines Vektors)**.** Der Träger eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist folgenderweise definiert:

$$supp(x) = \{i \mid x_i \neq 0\}$$

Definition 2.8 (Gramsche Matrix)**.** Die Matrix $A = Gram(v_1, \dots v_n)$ mit den Vektoren $v_1, \dots v_n$ in dem Vektorraum V und dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nennt man *Gramsche Matrix.* Für sie gilt:

$$A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\dots n}$$

Definition 2.9 (Kronecker Produkt)**.** Das Kronecker Produkt von zwei Matrizen $A \otimes B$ ist die Matrix, die entsteht, wenn jedes Element a_{ij} mit der Matrix B multipliziert wird.

Eine Menge C in einem Vektorraum ist *konvex*, falls für alle $x, y \in C$ und $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in C$.

Definition 2.10 (konvexer Kegel). Eine Menge K ist ein *Kegel*, wenn für jedes $x \in K$ und ein $a \geq 0$ auch $ax \in K$. Der Kegel ist zusätzlich konvex, falls für $t \in [0, 1]$, $tax + (1-t)by \in K$, wobei $a, b > 0$. Daraus folgt, dass K ein *konvexen Kegel* ist, wenn für alle $x, y \in K$ und Skalare $m, n \geq 0$ auch $mx + ny \in K$.

Definition 2.11 (dualer Kegel). Der duale Kegel eines Kegels K in einem Vektorraum V, welcher ein Skalarprodukt besitzt, ist wie folgt definiert:

$$K^* = \{y \in V \mid \forall x \in K : \langle x, y \rangle \geq 0\}$$

Definition 2.12 (extremer Strahl). Eine Matrix A vom einem konvexen Kegel K in einem Matrixraum ist extrem, wenn $A = A_1 + A_2$ mit $A_1, A_2 \in K$ impliziert, dass $A_1 = aA$ und $A_2 = (1-a)A$, wobei a zwischen 0 und 1 liegt.

Sei A eine beliebige Matrix, dann nennt man sie *diagonaldominant*, falls für jeden Diagonaleintrag gilt, dass sein Betrag größer oder gleich wie die Summe der restlichen Einträge in dieser Zeile ist.

Eine Matrix $\hat{A}$ nennt man *Vergleichsmatrix* von A, wenn für ihre Einträge gilt, dass $a_{ii} = |a_{ii}|$ und $a_{ij} = -|a_{ij}|, \quad i \neq j$.

Beispiel 2.13.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$ ist die Vergleichsmatrix von A.

2.1 Positiv semidefinite Matrizen

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich mit semidefiniten Matrizen, da diese eng mit kopositiven und vollständig positiven Matrizen zusammenhängen.

Definition 2.14 (positiv semidefinite Matrix). Eine symmetrische Matrix $A \in S_n$ heißt *positiv semidefinit*, wenn $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Die Menge aller $n \times n$ positiv semidefiniten Matrizen wird in der Arbeit mit PSD_n bezeichnet.

$$PSD_n = \{A \in S_n \mid \text{A ist positiv semidefinit}\}$$

Die Matrizen dieser Menge bilden im Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$ einen konvexen Kegel. Vewendet man auf S_n das Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = trace(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$, dann ist PSD_n als ein Kegel in S_n selbstdual, was bedeutet, dass sein dualer Kegel wiederum der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen ist. Es gilt also $PSD_n^* = PSD_n$.
Zudem bezeichnen wir alle $n \times n$ positiv semidefiniten Matrizen, welche zusätzlich nichtnegative Einträge haben, mit DNN_n.

$$DNN_n = \{A \in S_n \mid A \quad \text{ist positiv semidefinit mit nichtnegativen Einträgen}\}$$

Im englischsprachigen Raum werden diese Matrizen auch 'doubly nonnegativ matrices' genannt, deshalb die Bezeichnung DNN.

Folgende Aussagen über positiv semidefinite Matrizen sind äquivalent:

- Die Matrix A ist positiv semidefinit.
- Alle Eigenwerte von A sind nichtnegativ.
- Alle Hauptminoren von A sind nichtnegativ.
- Es exisitiert eine $n \times k$ Matrix B, sodass sich A als Produkt $A = BB^T$ schreiben lässt.
- Es existieren k-dimensionale Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, wobei V ein Vektorraum ist, sodass $A = Gram(v_1, \ldots v_n)$.
- Es existieren Vektoren $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$, sodass $A = \sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T$.

Definition 2.15 (Schur-Komplement)**.** Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

wobei A_1, A_2, A_3 und A_4 Matrizen sind. Außerdem muss die Matrix A_4 invertierbar sein. Dann ist das Schur-Komplement A/A_4 wie folgt definiert:

$$A/A_4 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$$

Aus der positiven Semidefinitheit der Matrizen A und B folgt außerdem:

- Sind $A, B \in PSD_n$, dann ist auch die Summe $A + B \in PSD_n$.
- Ist $A \in PSD_n$ und $k > 0$, dann ist auch die Skalarmultiplikation $kA \in PSD_n$.
- Ist $A \in PSD_n$ und $k \in \mathbb{N}$, dann ist auch A^k positiv semidefinit.
- Ist S eine beliebige $n \times m$ Matrix und $A \in PSD_n$, dann ist $S^T AS$ ebenso positiv semidefinit.
- Ist $A \in PSD_n$, dann ist auch das Schur-Komplement positiv semidefinit.

Bemerkung 2.16. Sei A eine positiv semidefinite Matrix. Falls a_{ii}, also der Eintrag in der i-ten Zeile und der i-ten Spalte von A, gleich null ist, dann sind alle Einträge der $i - ten$ Zeile und $i - ten$ Spalte, gleich null, was man schnell an den 2×2 Hauptminoren sehen kann.
Sei

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

der führende 2×2 Hautpminor von A. Da A positiv semidefinit ist, muss die Determinante $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \geq 0$ sein. Außerdem sind die Einträge a_{21} und a_{12} ident. Falls also $a_{11} = 0$ oder $a_{22} = 0$, dann muss auch $a_{12} = a_{21} = 0$ sein, damit die Determinantenbedingung erfüllt ist.

Beispiel 2.17.

- Jede Einheitsmatrix I_n ist positiv semidefinit
- Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist positiv semidefinit, da $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ gilt.

- Sei

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von C sind $\lambda = \{6+\sqrt{15}, 3, 6-\sqrt{15}\}$. Da alle Eigenwerte nichtnegativ sind, ist die Matrix C positiv semidefinit.

3 Vollständig positive und kopositive Matrizen

Weniger bekannte, aber durchaus wichtige Arten von Matrizen sind die vollständig positiven und kopositiven Matrizen. Sie sind in den verschiedensten Bereichen wie der Statistik und Optimierung von Bedeutung. Dieses Kapitel basiert auf dem Buch von Berman [1].

Widmen wir uns zuerst den vollständig positiven Matrizen.

3.1 Vollständig positive Matrizen

Laut Berman [1] liegt die Schwierigkeit bei vollständig positiven Matrizen nicht darin, solche Matrizen zu finden, sondern bei einer vorliegenden Matrix zu bestimmen, ob es sich um eine vollständig positive Matrix handelt.

Definition 3.1 (Vollständig positive Matrix)**.** Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A mit nichtnegativen Einträgen nennt man *vollständig positiv*, wenn es eine nichtnegative Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ gibt, sodass $A = BB^T$ gilt.

Die Matrix B muss also nicht notwendigerweise quadratisch sein. Jedoch sind die positive Semidefinitheit und die Nichtnegativität notwendige Bedingungen für die vollständige Positivität einer Matrix A.

Die Menge aller $n \times n$ vollständig positiven Matrizen bezeichnen wir mit

$$CP_n = \{A \in S_n \mid \text{A ist vollständig positiv}\}.$$

Offensichtlich bildet sie eine Teilmenge der Menge der positiv semidefiniten Matrizen PSD_n.

$$CP_n \subseteq PSD_n$$

Wir wissen bereits aus dem ersten Kapitel, dass für eine positiv semidefinite Matrix A eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ existiert, sodass $A = BB^T$. Damit die Matrix vollständig positiv ist muss zusätzlich gelten, dass die Matrix B nichtnegativ ist. Somit ist die Menge CP_n kleiner als die Menge PSD_n. Jede vollständig positive Matrix ist damit automatisch auch positiv semidefinit, die Umkehrung muss nicht gelten. Somit kann man sagen, dass vollständig positive Matrizen spezielle positiv semidefinite Matrizen sind.

Bei der Menge der vollständig positiven Matrizen CP_n handelt es sich, wie auch bei den positiv semidefiniten Matrizen, um einen konvexen Kegel. Wir werden diesen Kegel später genauer analysieren.

Es gilt die folgende Äquivalenz:

- Die Matrix $A \in S_n$ ist vollständig positiv, also $A \in CP_n$.
- A kann geschrieben werden als die Summe

$$A = \sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T, \tag{1}$$

wobei alle Vektoren b_i mit $i = 1, \ldots, k$ nichtnegativ sind. Dabei ist der Vektor b_i die i-te Spalte der nichtnegativen Matrix B.

Für vollständig positive Matrizen $A, B \in CP_n$ gelten folgende Eigenschaften:

- Wenn $A, B \in CP_n$, dann ist auch die Summe $A + B \in CP_n$.

  Beweis. Da $A, B \in CP_n$ gilt $A = \sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T$ und $B = \sum_{i=k+1}^{k+m} b_i b_i^T$, wobei alle b_i nichtnegativ sind. Somit gilt für die Summe $A + B = \sum_{i=1}^{k+m} b_i b_i^T$. Da alle b_i nichtnegativ sind und $A+B$ als diese Summe geschrieben werden kann, ist $A+B \in CP_n$. □

- Wenn $A, B \in CP_n$, dann ist auch das komponentenweise Produkt $A \circ B \in CP_n$.

  Beweis. Für $A, B \in CP_n$ gilt $A = \sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T$ und $B = \sum_{j=1}^{m} c_j c_j^T$, und für das komponentenweise Produkt $A \circ B = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (b_i \circ c_j)(b_i \circ c_j)^T$. Da die komponentenweisen Produkte $(b_i \circ c_j)$ nichtnegativ sind, ist $A \circ B \in CP_n$. □

- Wenn $A \in CP_n$ und $k \geq 0$, dann ist $kA \in CP_n$.
- Wenn $A \in CP_n$, dann gilt auch, dass $A^{(k)} = A \circ \cdots \circ A \in CP_n$.
- Wenn $A \in CP_n$ ist und Q eine $m \times n$ nichtnegative Matrix dann gilt $QBQ^T \in CP_m$.
- Wenn $k \in \mathbb{N}$ und $A \in CP_n$ dann ist auch $A^k \in CP_n$.

  Beweis. Man kann zwei Fälle unterscheiden:
  $\boxed{\text{Fall 1}}$: Sei k eine gerade Zahl, also $k = 2m$. Es gilt somit $A^k = A^{2m} = (A^m)^2 = A^m (A^m)^T$, also ist A^k vollständig positiv.

  $\boxed{\text{Fall 2}}$: Sei k eine ungerade Zahl, also $k = 2m + 1$. Es gilt somit $A^k = A^{2m+1} = (A^m)^2 A = (A^m) A (A^m)^T$. Aus der vorherigen Eigenschaft folgt dann, dass A^k vollständig positiv ist. □

- Wenn $A, B \in CP_n$, dann gilt für das Kroneckerprodukt der beiden $A \otimes B \in CP_n$.

Beweis. Es gilt $A = CC^T$ und $B = DD^T$, wobei $C, D \geq 0$. Das Kroneckerprodukt von zwei nichtnegativen Matrizen ist wieder nichtnegativ. Also gilt $C \otimes D \geq 0$ und somit $A \otimes B = (C \otimes D)(C \otimes D)^T$. $A \otimes B$ ist also vollständig positiv. □

Bemerkung 3.2. Die Faktorisierung $A = BB^T$ einer vollständig positiven Matrix, wobei B nichtnegativ ist, ist nicht eindeutig.

Nun wollen wir uns ein paar Beispiele ansehen:

Beispiel 3.3.

- Sei A die positiv semidefinite und nichtnegative Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrix A gibt es mehrere Möglichkeiten für eine nichtnegative Matrix B, sodass A als Produkt $A = BB^T$ geschrieben werden kann.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A ist somit vollständig positiv und die Bemerkung 3.2 ist damit gezeigt [5].

- Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die symmetrische und positiv semidefinite Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit nichtnegativen Einträgen kann in das Produkt der nichtnegativen Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ihrer Transponierten B^T zerlegt werden.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dieses Produkt kann wiederum dargestellt werden als eine Summe wie in **??**, indem wir die Spalten von B und die jeweiligen dazugehörigen transponierten Spalten multiplizieren und dann aufsummieren:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Somit stellen wir fest, dass die Matrix A vollständig positiv ist.

- Die symmetrische und positiv semidefinite Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

kann dargestellt werden als Produkt von der nichtnegativen Matrix D und ihrer transponierten Matrix D^T, wobei

$$DD^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man, dass die nichtnegative Matrix D in der Darstellung $C = DD^T$ nicht notwendigerweise quadratisch sein muss.

- Jede Diagonalmatrix mit nichtnegativen Diagonaleinträgen $d_1, \ldots d_n$ ist vollständig positiv.

3.1.1 Vollständige Positivität von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \leq 4$

Dieses Kapitel befasst sich mit kleineren $n \times n$ Matrizen, also Matrizen mit $n \leq 4$. Bis zu dieser Dimension herrscht völlige Klarheit über den Kegel CP_n.

Satz 3.4. *Jede positiv semidefinite Matrix $A \in PSD_n$, mit $n \leq 4$, welche nur nichtnegative Einträge besitzt, ist vollständig positiv. Es existiert eine nichtnegative Matrix B, sodass $A = BB^T$.*

Es gilt somit für $n \times n$ Matrizen, mit $n \leq 4$, die Gleichung $DNN_n = CP_n$ oder:

$$CP_n = PSD_n \cap NN_n$$

wobei mit NN_n die nichtnegativen $n \times n$ Matrizen gemeint sind. Für Matrizen mit höheren Dimensionen gilt dies im Allgemeinen nicht.

Beweis. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall:

$\boxed{n = 2}$: Es ist zu zeigen, dass $CP_2 = PSD_2 \cap NN_2$ gilt.
Sei A die nichtnegative und positiv semidefinite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Man kann für diese Matrix A eine nichtnegative Matrix B finden, sodass $A = BB^T$ gilt. Es gibt dabei zwei Fälle, die zu beachten sind:
Fall 1: Für $c > 0$ ist

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{a - \frac{b^2}{c}} & \frac{b}{\sqrt{c}} \\ 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix A positiv semidefinit ist, gilt $a \geq \frac{b^2}{c}$. Zusammen mit der Nichtnegativität der Matrix A, ist damit die Matrix B nichtnegativ.
Fall 2: Wenn $c = 0$, dann ist

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist jede 2×2 nichtnegative und positiv semidefinite Matrix vollständig positiv.

Beispiel 3.5.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B^T}$$

$\boxed{n = 3}$: Es ist zu zeigen, dass $CP_3 = PSD_3 \cap NN_3$ gilt.
Sei die Matrix A eine 3×3 symmetrische und positiv semidefinite Matrix mit nichtnegativen Einträgen. Ist der Diagonaleintrag $a_{ii} = 0$, dann sind aufgrund der positiven Semidefinitheit die Einträge der dazugehörige Zeile und Spalte auch gleich Null. Somit wäre A dann wieder eine 2×2 Matrix. Deshalb können wir annehmen, dass alle Diagonalelemente von A positiv sind. Der Einfachheit halber werden die Diagonaleinträge gleich 1 angenommen. A ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a_{12} \geq a_{13}$. A kann nun als die Summe

$$A = bb^T + \underbrace{\begin{pmatrix} D & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

geschrieben werden, wobei $b = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & 1 \end{pmatrix}^T$ und

$$bb^T = \begin{pmatrix} a_{13}^2 & a_{13}a_{23} & a_{13} \\ a_{23}a_{13} & a_{23}^2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix D ist das Schurkomplement $A/A[3]$ also:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{12} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_{13}^2 & a_{12} - a_{13}a_{23} \\ a_{12} - a_{13}a_{23} & 1 - a_{23}^2 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass beide Matrizen der Summe vollständig positiv sind. Wir können aus der positiven Semidefinitheit von A schließen, dass $1 \geq a_{13}, a_{23}, a_{12}$ gelten muss. Die Matrix bb^T ist vollständig positiv, da sie offensichtlich ein Produkt einer Matrix $B = b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und ihren Transponierten B^T ist, wobei B nichtnegativ ist. Die Matrix D ist symmetrisch und nichtnegativ aufgrund von $a_{12} \geq a_{13}$ und $1 \geq a_{13}, a_{23}$. Die positive Semidefinitheit folgt daraus, dass D das Schur Komplement $A/A[3]$ ist und A positiv semidefinit. Damit ist auch D positiv semidefinit. D ist also eine symmetrische, nichtnegative und positiv semidefinite Matrix mit $n = 2$. Wir wissen bereits, dass jede 2×2 nichtnegativ und positiv semidefinite Matrix vollständig positiv ist, also gilt $D \in CP_n$. Damit sind beide Matrizen vollständig positiv und wie wir bereits wissen, ist die Summe von zwei vollständig positiven Matrizen, wieder vollständig positiv. A ist also vollständig positiv.
Somit ist gezeigt, dass jede nichtnegative und positiv semidefinite Matrix mit $n = 3$ vollständig positiv ist.

Beispiel 3.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{n = 4}$: Es ist zu zeigen, dass $CP_4 = PSD_4 \cap NN_4$ gilt.
Für diesen Beweis benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma 3.7. *Sei A eine $n \times n$ vollständig positive Matrix und sei B eine positiv semidefinite $n \times n$ Matrix, deren Einträge, bis auf eine 2×2 Hauptuntermatrix, Null sind. Ist die Summe $A + B$ nichtnegativ, dann folgt daraus, dass $A + B$ vollständig positiv ist.*

Wie bei $n = 3$ sei A wieder eine symmetrische, positiv semidefinite und nichtnegative Matrix, deren Diagonaleinträge der Einfachheit halber gleich 1 sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass a_{34} der kleinste Eintrag von A ist und alle Einträge reell sind. Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist offensichtlich nichtnegativ, da a_{34} nichtnegativ ist. Berechnet man $B = S^{-1}A(S^{-1})^T$, so bekommt man die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} - a_{14}a_{34} & a_{14} \\ a_{12} & 1 & a_{23} - a_{24}a_{34} & a_{24} \\ a_{13} - a_{14}a_{34} & a_{23} - a_{24}a_{34} & 1 - a_{34}^2 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da S eine beliebige 4×4 Matrix ist und A positiv semidefinit, ist die Matrix $B = S^{-1}A(S^{-1})^T$ positiv semidefinit. Die Nichtnegativität von B folgt auch aus der positiven Semidefinitheit von A. Es gilt $a_{ij} \leq 1$ für alle i, j und a_{34} ist nach Voraussetzung der kleinste Eintrag. Außerdem ist a_{34} kleiner als 1. Wäre $a_{34} = 1$ dann wäre der Diagonaleintrag gleich Null und somit wiederum die Einträge jener Spalte und Zeile ebenso Null, was dazu führen würde, dass wir es mit einer 3×3 Matrix zu tun haben. Dividiert man die dritte Spalte und dritte Zeile mit $\sqrt{1 - a_{34}^2}$ bekommt man eine nichtnegative und positiv semidefinite Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & 1 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass diese Matrix vollständig positiv ist. Wir teilen sie wieder in eine Summe $C = EE^T + F$ auf und zeigen, dass beide Summanden vollständig positiv sind. Die Matrix EE^T

$$EE^T = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & c_{23} & 1 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich vollständig positiv, da E nichtnegativ ist. Die Matrix F sieht folgenderweise aus:

$$F = \begin{pmatrix} G & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$G = C/C[3,4] = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ c_{12} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_{13} & c_{23} \\ c_{14} & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_{13}^2 - c_{14}^2 & c_{12} - c_{13}c_{23} - c_{14}c_{24} \\ c_{12} - c_{23}c_{13} - c_{14}c_{24} & 1 - c_{23}^2 - c_{24}^2 \end{pmatrix}$$

Da Matrix G das Schur Komplement $C/C[3,4]$ ist und C positiv semidefinit ist, ist auch die Matrix G positiv semidefinit. Die Matrix F ist somit positiv semidefinit und alle Einträge außer einer 2×2 Matrix sind Null. Laut dem vorigen Lemma ist somit die Summe von $EE^T + F$ vollständig positiv. C ist also vollständig positiv. Damit ist gezeigt, dass jede nichtnegative und positiv semidefinite Matrix mit $n = 4$ vollständig positiv ist. $\square$

Weiters gilt für Matrizen mit kleinen Dimensionen folgendes:

Bemerkung 3.8. Sei A eine $n \times n$ positiv semidefinite Matrix mit nichtnegativen Einträgen und $n \leq 4$, dann existiert eine quadratische, nichtnegative Matrix B, sodass $A = BB^T$ gilt.

Bemerkung 3.9. Jede diagonaldominante Matrix, welche ebenso nichtnegativ und symmetrisch ist, ist vollständig positiv.

Beispiel 3.10.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.11. Wenn A symmetrisch und nichtnegativ ist und die Vergleichsmatrix positiv semidefinit, dann ist A vollständig positiv. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Beispiel 3.12.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist die Vergleichsmatrix von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und da B positiv semidefinit ist und A symmetrisch und nichtnegativ, ist A vollständig positiv.

3.1.2 CP-Rang

Definition 3.13 (CP-Rang)**.** Der *CP-Rang* einer vollständig positiven Matrix A ist das kleinste k, für welches $A = BB^T$ gilt, wobei B eine nichtnegative $n \times k$ Matrix ist.

$$CP - Rang(A) = inf\{k \in \mathbb{R} \mid \exists B \in \mathbb{R}^{n \times k}, B \geq 0, A = BB^T\} \quad [5]$$

Da A vollständig positiv ist können wir diese Matrix, wie bereits bekannt, als folgende Summe schreiben:

$$A = \sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T,$$

wobei alle b_i mit $i = 1, \ldots, k$ nichtnegativ sind. Somit ist der CP-Rang k dieser Matrix die kleinste Anzahl der Summanden in dieser Darstellung.

Der CP-Rang der Matrix A ist immer größer oder gleich der Rang dieser Matrix, also es gilt die Ungleichung:

$$CP - Rang(A) \geq Rang(A)$$

Für die Summe von zwei vollständig positiven Matrizen gilt:

Bemerkung 3.14. Falls $A, B \in CP_n$, dann ist auch die Summe $A + B \in CP_n$ und es gilt:

$$CP - Rang(A + B) \leq CP - Rang(A) + CP - Rang(B)$$

Für Matrizen mit kleinen Dimensionen hat der CP-Rang folgende Eigenschaften:

- Sei A eine $n \times n$ vollständig positive Matrix, wobei $n \leq 3$ ist, dann gilt

$$CP - Rang(A) = Rang(A).$$

- Der CP-Rang einer $n \times n$ vollständig positive Matrix mit $n \leq 4$ ist höchstens n. Falls $n \geq 5$ kann der CP-Rang aber auch größer sein als n.

Für jede vollständig positive $n \times n$ Matrix A mit $n \geq 2$ und $Rang(A) = r$ ist der CP-Rang von A nach oben beschränkt durch $\frac{r(r+1)}{2} - 1$

Berman hat in seinem Buch folgendes Beispiel angeführt:

Beispiel 3.15. Sei A folgende vollständig positive Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat den Rang 3 und den CP-Rang 4. Um den CP-Rang zu bestimmen, betrachten wir die Summendarstellung $\sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T$ mit der minimalsten möglichen Anzahl an Summanden. Der CP-Rang von A ist dann k, also die kleinste Anzahl der Summanden in dieser Darstellung. Es muss für mindestens ein b_i gelten, dass $1 \in supp(b_i)$. Wir nehmen an, dass $1 \in supp(b_1)$. Wenn 1 kein Element vom Träger von allen b_i mit $i \neq 1$ ist, dann ist bei allen diesen b_i mit $i \neq 1$, der erste Eintrag gleich Null. Also muss für b_1 gelten:

$$b_1 b_1^T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allerdings bekommen wir hier einen Widerspruch, da $(A - b_1 b_1^T)_{23} < 0$. $(A - b_1 b_1^T) = \sum_{i=2}^{k} b_i b_i^T$ muss aber nichtnegativ sein, da A vollständig positiv ist und deshalb alle b_i nichtnegativ sind. Also muss 1 mindestens noch im Träger von einem weiteren b_i enthalten sein. Da die Matrix symmetrisch ist muss 4 auch im Träger von mindestens zwei b_i sein, allerdings können 1 und 4 nicht im selben Träger sein. Deshalb gilt CP-Rang $= k \geq 4$. Wir wissen allerdings, dass der CP-Rang einer 4×4 Matrix nicht größer als 4 sein kann, wie wir oben gesehen haben. Also gilt für A:

$$k = CP - Rang(A) = 4$$

3.2 Kopositive Matrizen

Neben den vollständig positiven Matrizen gibt es auch die kopositiven Matrizen.

Definition 3.16 (Kopositive Matrix)**.** Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A nennt man *kopositiv*, wenn $x^T A x \geq 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R} \geq 0$ gilt. Sie heißt strikt kopositiv, wenn $x^T A x > 0$ für jeden Vektor $x > 0$, also für jeden nichtnegativen Vektor ohne den Nullvektor, gilt.

Im Gegensatz zu den vollständig positiven Matrizen müssen die Einträge von kopositiven Matrizen nicht nichtnegativ sein. Eine notwendige Bedingung für die Kopositivität einer Matrix ist allerdings, dass zumindest die Diagonaleinträge nichtnegativ sind.

Die Menge aller $n \times n$ kopositiven Matrizen bezeichen wir mit:

$$CoP_n = \{A \in S_n \mid \text{A ist kopositiv}\}$$

Sie bildet eine Obermenge der vollständig positiven und positiv semidefiniten Matrizen.

$$CP_n \subseteq PSD_n \subseteq CoP_n$$

Jede positiv semidefinite Matrix und somit auch jede vollständig positive Matrix ist kopositiv, was aus den Definitionen hervorgeht.

Bei der Menge der kopositiven Matrizen CoP_n handelt es sich ebenso wie bei den vollständig positiven Matrizen um einen konvexen Kegel. Der Kegel CoP_n ist der zu CP_n duale Kegel. Der Beweis für die Dualität ist am Ende dieses Kapitels angeführt.

Für kopositive Matrizen $A, B \in CoP_n$ gilt:

- Wenn $A, B \in CoP_n$, dann ist auch die Summe $A + B \in CoP_n$.

  Beweis. Da $A, B \in CoP_n$ gilt $x^T Ax \geq 0$ und $x^T Bx \geq 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n \geq 0$. Somit gilt für die Summe $x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx \geq 0$. $\square$

- Wenn $k \geq 0$ und $A \in CoP_n$ gilt, dann ist auch $kA \in CoP_n$.

- Wenn $A \in CoP_n$ ist, dann ist jede $n-1 \times n-1$ Hauptuntermatrix von A kopositiv. Ebenso sind alle $k \times k$ Hauptuntermatrizen mit $k \leq n-2$ kopositiv. [6]

3.2.1 Kopositivität von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \leq 4$

Wie weiter oben schon erwähnt sind die Menge der symmetrischen, nichtnegativen Matrizen und die Menge der positiv semidefiniten Matrizen Teilmengen der Menge der kopositiven Matrizen:

$$SNN_n \subseteq CoP_n \quad \text{und} \quad PSD_n \subseteq CoP_n$$

Da der Kegel CoP_n konvex ist, ist die Summe der beiden Mengen auch eine Teilmenge der kopositiven Matrizen, also es gilt:

$$SNN_n + PSD_n \subseteq CoP_n$$

Die Gleichheit gilt allerdings nur wenn $n \leq 4$:

Satz 3.17. *Jede symmetrische $n \times n$ Matrix A mit $n \leq 4$ ist genau dann kopositiv, wenn sie als Summe von einer positiv semidefiniten Matrix und einer nichtnegativen symmetrischen Matrix geschrieben werden kann.*

$$SNN_n + PSD_n = CoP_n$$

Für Matrizen mit $n \geq 5$ gilt diese Gleichheit nicht, was wir in Kapitel 4 noch mit einem Gegenbeispiel beweisen werden.
Nun wollen wir uns ein paar Beispiele für kopositive Matrizen ansehen.

Beispiel 3.18.

- Jede positiv semidefinite Matrix $A \in PSD_n$ ist kopositiv.
- Jede symmetrische Matrix mit nichtnegativen Einträgen ist kopositiv.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist nichtnegativ, aber nicht positiv semidefinit und trotzdem kopositiv.

-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist nicht positiv semidefinit und hat außerdem negative Einträge, aber sie ist symmetrisch. Bei der ersten Matrix der Summe handelt es sich um eine positiv semidefinite Matrix, da sie symmetrisch ist und alle Hauptminoren und Eigenwerte positiv sind. Die zweite Matrix ist nicht positiv semidefinit, da der zweite Hauptminor negativ ist, jedoch offensichtlich nichtnegativ und symmetrisch. Somit ist A eine kopositive Matrix.

- Eine symmetrische 2×2 Matrix C ist kopositiv, wenn $c_{11} \geq 0, c_{22} \geq 0$ und $c_{12} + \sqrt{c_{11}c_{22}} \geq 0$. [6] Also ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

kopositiv, da beide Diagonalelemente größer oder gleich 0 sind und ebenso $-1 + \sqrt{16} = 3$ nichtnegativ ist.

3.3 Kegel

3.3.1 Kegel der vollständig positiven Matrizen

Bei der Menge CP_n handelt es sich um einen konvexen Kegel.

1. Konvexität: Damit es sich um eine konvexen Kegel handelt, muss folgendes gelten:

$$\forall A, B \in CP_n, \quad a, b \geq 0 \Rightarrow aA + bB \in CP_n$$

   Wie oben schon angeführt, ist von zwei vollständig positiven Matrizen $A, B \in CP_n$ die Summe $A+B$ vollständig positiv. Da ebenso gilt, dass für eine Matrix $A \in CP_n$, $kA = (\sqrt{k}B)(\sqrt{k}B)^T)$ mit $k > 0$ auch vollständig positiv ist. CP_n bildet damit einen konvexen Kegel.

2. Extreme Strahlen: Erzeugt wird dieser Kegel CP_n von den Rang-1-Matrizen xx^T, wobei $x \in \mathbb{R}^n \geq 0$ ist. Also gilt:

$$Ext(CP_n) = \{xx^T \mid x \geq 0\}$$

3. Innere: Das Innere dieses Kegels sind alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, welche vollen Rang haben, also $Rang(A) = n$ und für welche $A = BB^T$ gilt, wobei $B > 0$ ist. Es gilt also:

$$Int(CP_n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Rang(A) = n, A = BB^T, B > 0\} \quad [5]$$

3.3.2 Kegel der kopositiven Matrizen

Die Menge der kopositiven Matrizen CoP_n ist, genauso wie die Menge der vollständig positiven Matrizen CP_n, ein konvexer Kegel, genauer der duale Kegel von CP_n:

1. Konvexität: Wir wissen bereits, dass für kopositive Matrizen $A, B \in CoP_n$ gilt, dass die Summe $A + B \in CoP_n$. Ebenso gilt dann $kA \in CoP_n$, wobei $k > 0$ ist. Somit ist auch der Kegel der kopsitiven Matrizen konvex.

2. Extreme Strahlen: Die extremen Strahlen des Kegels CoP_n sind nicht vollständig erforscht. Ein paar Sachen sind trotzdem bekannt:
   Sei E_{ij} die Matrix, wessen Einträge alle null sind, bis auf den Eintrag in der $i - ten$ Zeile und $j - ten$ Spalte. Die Matrizen E_{ii} und $E_{ij} + E_{ji}$ sind dann extreme Strahlen von CoP_n.
   Für Matrizen $n \leq 4$ sind die extremen Strahlen von CoP_n die extremen Strahlen von

$SNN_n + PSD_n$. Alle extremen Strahlen, welche extreme Strahlen von $SNN_n + PSD_n$ sind, sind erzeugt von Matrizen xx^T mit $x \in \mathbb{R}^n$, wobei x sowohl positive und negative Einträge hat und von den Matrizen $e_i e_j^T$ für $i, j = 1 \dots n$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Auch extreme Strahlen von CoP_n mit höheren Dimensionen können extreme Strahlen von $SNN_n + PSD_n$ sein, müssen aber nicht.

3. Inneres: Das Innere dieses Kegels CoP_n der kopositiven Matrizen sind alle strikt kopositiven Matrizen, also gilt:

$$Int(CoP_n) = \{A \in S_n \mid x^T A x > 0 \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, x \neq 0\}$$

3.3.3 Dualität der Kegel

Satz 3.19. *Die Menge der vollständig positiven Matrizen CP_n und die Menge der kopositiven Matrizen CoP_n sind beides konvexe Kegel, welche zueinander duale Kegel im Raum aller $n \times n$ symmetrischen Matrizen bilden. Also gilt:*

$$CP_n^* = CoP_n$$

Beweis. Sei S eine symmetrische $n \times n$ Matrix, also $S \in S_n$. Es gilt $S \in CP_n^*$ genau dann, wenn für alle $A \in CP_n$ die $trace(SA) \geq 0$ ist. Die Spur zweier Matrizen ist definiert als $trace(SA) = \langle S, A \rangle = \sum_{i,j=1}^n s_{ij} a_{ij}$. Die $trace(SA)$ ist genau dann größer gleich Null, wenn die $trace(SBB^T) \geq 0$ ist, da A vollständig positiv und somit $A = BB^T$ mit B ist nichtnegativ gilt. Wiederum ist dies genau dann der Fall, wenn $trace(B^T S B) \geq 0$. Außerdem gilt $trace(B^T S B) \geq 0$ genau dann, wenn $\forall b \in \mathbb{R}^n \geq 0, b^T S b \geq 0$ ist. Somit gilt die Äquivalenz:

$$S \in CP_n^* \quad \Leftrightarrow \quad S \quad \text{ist kopositiv}$$

□

4 Motivation

Die im vorherigen Kapitel untersuchten Matrizen, finden in vielen Gebieten Anwendung. Eines dieser Gebiete ist die Statistik, wo sie zum Beispiel für bestimmte Evolutionsmodelle verwendet werden [1]. Vorallem aber werden sie in der Optimierung eingesetzt. Diese Optimierung, von welcher dieses Kapitel handelt wird, nennt man kopositive Optimierung.

Das Kapitel basiert auf [2].

4.1 Kopositive Optimierung

Die kopositive Optimierung umfasst Optimierungsprobleme über die beiden konvexen Kegel CP_n und CoP_n. Ein kopositives Programm, also ein Programm über den Kegel der kopositiven Matrizen oder dem Kegel der vollständig positiven Matrizen, ist ein lineares Optimierungsprogramm, also eines mit einer linearen Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen. Da die Kegel zueinander dual sind, gibt es zu jedem Programm über CoP_n ein duales Programm über CP_n. Speziell sind die beiden Kegel in der quadratischen und kombinatorischen Optimierung von großem Nutzen.

Dür [2] erwähnt in ihrem Artikel, dass die Möglichkeit der Nutzung der Kegel CP_n und CoP_n in dem Bereich der Optimierung, erst vor wenigen Jahren entdeckt wurde und an Bedeutung gewann. Somit handelt es sich bei der kopositiven Optimierung um ein sehr junges Gebiet.

Die Optimierung über den Kegel CoP_n ist eine Verallgemeinerung der semidefiniten Optimierung, also der Optimierung über den Kegel der positiv semidefiniten Matrizen PSD_n. Ein solches Optimierungproblem über den Kegel CoP_n ist, wie wir bereits wissen, ein lineares Optimierungsproblem, bei welchem es sich bei den Variablen um Matrizen, statt um Vektoren handelt. Es ist von der Form

$$\begin{aligned} min \quad & f(X) = \langle Q, X \rangle \\ s.d. \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots m), \\ & X \in CoP_n, \end{aligned}$$

wobei die symmetrische Matrix $Q \in S_n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $(A_1, \dots A_m) \in S_n^m$ gegeben sind.
Das Skalarprodukt zweier $n \times n$ Matrizen Q, X ist dabei die Spur des Produkts $Q^T X$,

also es gilt

$$\langle Q, X \rangle = trace(Q^T X) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_{ij}.$$

Da es sich in unserem Fall bei der Matrix Q um eine symmetrische Matrix handelt, gilt $Q = Q^T$. Die Zielfunktion dieses Problems ist die lineare Funktion $f(X) = \langle Q, X \rangle$ mit $X \in CoP_n$. Zudem haben wir die lineare Nebenbedingung $\langle A_i, X \rangle - b_i = 0$ mit $i = 1, \ldots, m$. Eine zulässige Lösung ist damit eine kopositive Matrix $X \in CoP_n$, welche die Nebenbedingung für alle $i = 1, \ldots, m$ erfüllt und die zulässige Menge Ω, also die Menge aller zulässigen Lösungen, ist somit

$$\Omega = \{X \in CoP_n \mid \langle A_i, X \rangle = b_i\}.$$

Das Ziel ist es unter allen diesen zulässigen Lösungen jene Lösung zu finden, welche die Zielfunktion $f(X)$ minimiert.

Da es sich bei CoP_n und CP_n um zueinander duale Kegel handelt, gibt es zu dem oben angeführten kopositiven Problem, auch ein dazugehöriges Problem über den dualen Kegel CP_n. Für die duale Zielfunktion gilt in unserem Fall $g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ und für die Nebenbedingung $Q - \langle y, A \rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in CP_n$. Somit entsteht das dazugehörige duale Optimierungsproblem von der Form

$$\begin{aligned} max \quad & g(y) = \langle b, y \rangle \\ s.d. \quad & Q - \langle y, A \rangle = Q - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \in CP_n, \\ & y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

wobei $Q \in S_n$, $(A_1, \ldots A_m) \in S_n^m$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind. Eine zulässige Lösung ist ein Vektor $y \in \mathbb{R}^m$, welcher die Nebenbedingung erfüllt, wodurch wir die zulässige Menge

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Q - \langle y, A \rangle \in CP_n\}$$

erhalten. Wir wollen also bei diesem Problem jene zulässige Lösung finden, welche die lineare Zielfunktion $g(y)$ maximiert.

Bei dem ersten Problem wird über den Kegel der kopositiven Matrizen optimiert und bei dem zweiten Problem über den Kegel der vollständig positiven Matrizen. Augrund der

Dualität der Kegel können wir das Optimierungsproblem aus zwei Perspektiven betrachten. Das erste Problem nennt man *Urproblem* und das zweite *duales Problem*.

Ein Optimierungsproblem nennt man konvex, wenn die Zielfunktion und die zulässige Menge konvex sind. Da jede lineare Abbildung konvex ist, handelt es sich bei beiden Zielfunktionen, ebenso wie bei beiden zulässigen Mengen, um konvexe Abbildungen, beziehungsweise um konvexe Mengen, was bedeutet, dass die beiden Optimierungsprobleme konvex sind.

4.1.1 Anwendung in der quadratischen Optimierung

Die Umformulierung von quadratischen Problemen, welche meist schwer zu lösen sind, in lineare, kopositive Optimierungsprobleme, eröffnet neue Lösungsmöglichkeiten. Kopositive Probleme sind im Allgemeinen auch schwer zu lösen, jedoch hilft ein gutes Verständnis über die beiden Kegel. Wie Witzel [4] in ihrer Arbeit betont, ist die genaue Untersuchung der Eigenschaften der Kegel CoP_n und CP_n eine Voraussetzung um kopositive Programme besser lösen zu können.

Nun soll gezeigt werden, dass ein quadratisches Problem in ein kopositives Problem umgeformt werden kann.

Wir haben das Standard-quadratische Problem

$$\begin{aligned} &min \quad h(x) = x^T Q x \\ &s.d. \quad e^T x = 1, \\ &\quad x \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $Q \in S_n$ gegeben ist. Außerdem ist $x \in \mathbb{R}^n$ und der Vektor $e \in \mathbb{R}^n$ ist jener Vektor, dessen Einträge alle gleich 1 sind. Bei diesem Problem handelt es sich um ein quadratisches Problem, da die Zielfunktion $h(x) = x^T Q x = \langle x, Qx \rangle$ eine quadratische Funktion ist. Die Nebenbedingung lautet $e^T x = \langle e, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Eine zulässige Lösung ist somit ein Vektor $x \geq 0$, welcher die Bedingung $e^T x = 1$ erfüllt, wodurch wir für Ω folgende Menge bekommen:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \geq 0 \mid e^T x = 1\}$$

Gesucht ist jener Vektor aus der Menge, welcher die Zielfunktion $h(x)$ minimiert.

Die vorliegende Zielfunktion $h(x)$ dieses Standard-quadratischen Optimierungsproblems kann umgeschrieben werden in die Funktion $h(x) = \langle Q, xx^T \rangle = \langle Q, X \rangle$ und die Nebenbedingung $\langle E, xx^T \rangle = \langle E, X \rangle = 1$, wobei $E = ee^T$ ist, also eine $n \times n$ Matrix. Damit bekommen wir das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} min \quad & h(X) = \langle Q, X \rangle \\ s.d. \quad & \langle E, X \rangle = 1, \\ & X \in CP_n, \end{aligned}$$

wobei es sich bei Q wieder um eine symmetrische Matrix handelt. Das Problem ist jetzt ein lineares Problem, da die Zielfunktion $h(X) = \langle Q, X \rangle$ eine lineare Abbildung ist.

Die optimale Lösung X^* unseres Problems wird also in einem Extrempunkt des konvexen Kegels CP_n erreicht. Wir wissen bereits aus dem zweiten Kapitel, dass die Extrempunkte diese Kegels genau die Matrizen xx^T sind, mit $x \in \mathbb{R}^n \geq 0$, welche Rang 1 haben. Unter der Nebenbedingung unseres Problems sind dies also jene vollständig positive Matrizen, welche den Rang 1 haben und zusätzlich die Nebenbedingung $e^T x = 1$ erfüllen. Das neu enstandene lineare Problem, ist eine exakte Umformulierung unseres Standard-quadratischen Problems. Sei X^* also eine optimale Lösung von unserem umformulierten quadratischen Problem, wobei diese Lösung eine Matrix von Rang 1 ist, dann ist es auch eine optimale Lösung von unserem ursprünglichen Standard-quadratischen Problem.

Dieses Vorgehen kann man auch auf binäre quadratische Programme anwenden, also quadratische Programme mit binären Variablen. Binäre Variablen sind Variablen, welche nur zwei Ausprägungen besitzen, in unserem Fall sind diese Ausprägungen 0 und 1. Gegeben sei ein binäres quadratisches Problem der Form

$$\begin{aligned} min \quad & l(x) = x^T Q x + 2c^T x \\ s.d. \quad & a_i^T x = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & x_j \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

wobei die symmetrische $n \times n$ Matrix Q und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind und $x \in \mathbb{R}^n$. Dieses Problem kann umgeformt werden in ein Problem über die vollständig positiven Matrizen CP_n. Es ist von der Form:

$$
\begin{aligned}
min \quad & l(X) = \langle Q, X \rangle + 2c^T x \\
s.d. \quad & a_i^T x = b_i \quad (i = 1, \dots m) \\
& \langle a_i a_i^T, X \rangle = b_i^2 \quad (i = 1, \dots m) \\
& x_j = X_{jj} \\
& \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & X \end{pmatrix} \in CP_n
\end{aligned}
$$

Dieses Problem linear und kann, falls die Kegeleigeschaften von CP_n gut untersucht wurden, besser gelöst werden.

5 Hornsche Matrix

Aus dem Kapitel über die kopositiven Matrizen wissen wir, dass die Gleichung

$$SNN_n + PSD_n = CoP_n$$

für $n \leq 4$ gilt. Für Matrizen mit Dimension $n \geq 5$ gilt diese Gleichheit allerdings nicht mehr, sondern nur

$$SNN_n + PSD_n \subseteq CoP_n.$$

Diananda hat in ihrer Arbeit den Beweis für ein berühmtes Gegenbeispiel erbracht, welches die Gleichheit $CoP_n = SNN_n + PSD_n$ für $n \geq 5$ widerlegt. Dieses Kapitel basiert auf ihrer Arbeit [3].

Bei dem Gegenbeispiel handelt es sich um die Hornsche Matrix, welche folgenderweise aussieht:

Definition 5.1 (Hornsche Matrix)**.** Die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man *Hornsche Matrix.*

Satz 5.2. *Die Hornsche Matrix H ist kopositiv, lässt sich aber nicht als Summe einer symmetrischen, nichtnegativen Matrix und einer positiv semidefiniten Matrix schreiben.*

$$H \neq S + P, \quad S \in SNN_n \quad \textit{und} \quad P \in PSD_n$$

Beweis. Zuerst müssen wir zeigen, dass die Matrix H kopositiv ist. Wenn sie zudem ein extremer Strahl von CoP_n ist, aber nicht nichtnegativ und positiv semidefinit, dann kann sie nicht als diese Summe geschrieben werden. Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

1. Kopositivität:

$$\begin{aligned}x^T H x &= x_1(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5) + x_2(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5) \\ &+ x_3(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5) + x_4(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5) \\ &+ x_5(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5) \\ &= x_4^2 - 2x_4x_5 + 2x_4x_1 + 2x_4x_2 - 2x_4x_3 + x_5^2 - 2x_5x_1 + 2x_5x_2 + 2x_5x_3 \\ &+ x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)^2 + 4x_2x_4 - 4x_3(x_5 - x_4) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4x_2x_5 - 4x_1(x_4 - x_5)\end{aligned}$$

   Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned}x^T H x &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)^2 + 4x_2x_4 - 4x_3(x_5 - x_4) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4x_2x_5 - 4x_1(x_4 - x_5)\end{aligned}$$

   Beim ersten Ausdruck gilt $x^T H x \geq 0$ für jeden nichtnegativen Vektor x mit $x_5 \leq x_4$ und bei dem zweiten Ausdruck gilt dies für jeden nichtnegativen Vektor x mit $x_5 > x_4$. Es ist gezeigt, dass die Matrix H kopositiv ist.

2. Nichtnegativität: Die Matrix H hat offensichtlich auch negative Einträge und ist somit nicht nichtnegativ.

3. Positive Semidefinitheit: Wenn wir uns die Eigenwerte dieser Matrix berechnen bekommen wir:

$$\lambda_{1,2,3,4,5} = \{1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}, 1\}$$

   Da $1 - \sqrt{5} < 0$ ist und die Matrix H somit auch negative Eigenwerte hat, gilt die positive Semidefinitheit für H nicht.

4. Extremer Strahl: Damit H ein Gegenbeispiel darstellt, müssen wir zeigen, dass H einen extremer Strahl von dem konvexen Kegel CoP_n bildet. Dafür müssen wir uns noch einmal die Definition eines extremen Strahls in Erinnerung rufen:

   Definition 5.3 (extremer Strahl)**.** Eine Matrix $A \in CoP_n \neq 0$ ist extrem, wenn $A = A_1 + A_2$ mit $A_1, A_2 \in CoP_n$ impliziert, dass $A_1 = aA$ und $A_2 = (1-a)A$, wobei a zwischen 0 und 1 liegt. [1]

H ist also ein extremer Strahl von CoP_n, wenn $H = H_1 + H_2$ mit H_1, H_2 kopositiv impliziert, dass $H_1 = aH$ und $H_2 = (1-a)H$, wobei a zwischen 0 und 1 liegt.

Wenn wir jetzt jeweils für $i = 1, \ldots 4$, die i-te und die $i+1$-te Zeile und Spalte streichen und einmal die 5-te und die 1-te Zeile/Spalte, dann bekommen wir folgende drei Matrizen:

$$H_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, H_3' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass alle drei Matrizen extreme Strahlen von CoP_3 sind. Also gilt $H_j' = H_{j1}' + H_{j2}'$, für alle j nur dann, wenn $H_{j1}' = aH_j'$ und $H_{j2}' = (1-a)H_j'$ gilt, wobei a zwischen 0 und 1 liegt.

Daraus folgt, dass $H = H_1 + H_2$ impliziert, dass

$$H_1 = aH \quad \text{und} \quad H_2 = (1-a)H.$$

Die Hornsche Matrix ist somit extrem.

H ist also nicht positiv semidefinit und auch nicht nichtnegativ, aber extrem und kann damit nicht als Summe einer symmetrischen, nichtnegativen und einer positiv semidefiniten Matrix geschrieben werden. □

Um noch mal auf extreme Strahlen von dem Kegel CoP_5 zurückzukommen, welche eben nicht extreme Strahlen von $SNN_5 + PSD_5$ sind. Einige dieser extremen Strahlen werden erzeugt von Matrizen mit der Form

$$PDHDP^T,$$

wobei P eine Permutationsmatrix ist, $D = diag(d)$ mit $d \in \mathbb{R}^n > 0$ und H ist die Hornsche Matrix. [4]

6 Beweis

In diesem letzten Kapitel möchte ich für ein bestimmtes Polynom $p(x)$ beweisen, dass obwohl $p(x) \geq 0$ ist, $p(x)$ nicht als Summe von Quadraten von Polynomen dargestellt werden kann. Damit wird außerdem bewiesen, dass sich die Hornsche Matrix nicht als Summe einer symmetrisch, nichtnegativen Matrix und einer positiv semidefiniten Matrix schreiben lässt. Wäre dies möglich, dann wäre $p(x)$ eine Quadratsumme.

Sehen wir uns zuerst das Polynom $p(x)$ an, von welchem der Beweis handeln wird.
Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ und sei

$$p(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \end{pmatrix},$$

wobei H die Hornsche Matrix aus dem vorherigen Kapitel ist. Das Polynom $p(x)$ hat Grad 4 und es gilt $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$. Somit könnte man versuchen, dieses Polynom als Summe von Quadraten von Polynomen vom Grad 2 darzustellen. Da p ein homogenes Polynom vom Grad 4 ist, müsste es sich bei diesen Polynomen um homogene Polynome vom Grad 2 handeln, also in unserem Fall quadratische Formen. Jedoch gilt folgendes:

Das Polynom $p(x)$ vom Grad 4 kann nicht als Summe von Quadraten von Polynomen vom Grad 2 geschrieben werden.

Beweis. Annahme: $p(x)$ kann als Quadratsumme geschrieben werden, also

$$p(x) = \sum_{i=1}^{5} (q_i(x))^2,$$

wobei alle q_i quadratische Formen sind.

Sei also q_i die allgemeine quadratische Form:

$$\begin{aligned} q_i(x) = {} & a_i x_1^2 + b_i x_2^2 + c_i x_3^2 + d_i x_4^2 + e_i x_5^2 + f_i x_1 x_2 + g_i x_1 x_3 + h_i x_1 x_4 \\ & + i_i x_1 x_5 + j_i x_2 x_3 + k_i x_2 x_4 + l_i x_2 x_5 + m_i x_3 x_4 + n_i x_3 x_5 + o_i x_4 x_5 \end{aligned}$$

Man geht nun ähnlich vor wie bei dem Beweis mit der Hornschen Matrix im vierten Kapitel und setzt nacheinander $x_i = x_{i+1} = 0$ für $i = 1, \dots 4$ und $x_5 = x_1 = 0$.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$:

$$p(x) = x_1^2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^3) + x_2^2(-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + x_3^2(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) = (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)^2$$

mit den Nullstellen:

$$x_{1,2,3,4} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{5,6,7,8} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laut der Annahme müssten auch alle q_i diese Nullstellen besitzen. Für q_i erhält man somit die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_i + b_i + f_i &= 0 \\ a_i + b_i - f_i &= 0 \\ b_i + c_i + j_i &= 0 \\ b_i + c_i - j_i &= 0 \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, dann bekommt man für die Koeffizienten die Bedingungen:

$$b_i = -a_i, \quad c_i = a_i, \quad f_i = 0, \quad j_i = 0$$

$\boxed{x_3 = x_4 = 0}$:

$$p(x) = x_1^2(x_1^2 - x_2^2 - x_5^2) + x_2^2(-x_1^2 + x_2^2 + x_5^2) + x_5^2(-x_1^2 + x_2^2 + x_5^2) = (x_1^2 - x_2^2 - x_5^2)^2$$

mit den Nullstellen:

$$x_{1,2,3,4} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{5,6,7,8} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Wieder bekommt man ein Gleichungssystem und die Bedingungen:

$$a_i = -e_i, \quad b_i = e_i, \quad f_i = 0, \quad i_i = 0$$

$\boxed{x_2 = x_3 = 0}$:

$$a_i = -e_i, \quad d_i = -e_i, \quad o_i = 0, \quad i_i = 0$$

$\boxed{x_1 = x_2 = 0}$:

$$d_i = -e_i, \quad m_i = 0, \quad e_i = c_i, \quad o_i = 0$$

$\boxed{x_5 = x_1 = 0}$:

$$c_i = -b_i, \quad d_i = b_i, \quad j_i = 0, \quad m_i = 0$$

Aus allen diesen Bedingungen folgt

$$b_i = -a_i = e_i = -d_i,$$

aber auch $b_i = d_i$. Also müssten die Koeffizienten bei allen Polynomen q_i gleich Null sein, wodurch wir einen Widerspruch bekommen.

$\Rightarrow p(x)$ kann nicht als Summe von Quadraten von Polynomen vom Grad 2 geschrieben werden. $\square$

7 Fazit

Vollständig positive und kopositive Matrizen besitzen zahlreiche Eigenschaften, welche für bestimmte Probleme und Modelle nützlich sein können. Es zeigte sich, dass man über kopositive und vollständig positive Matrizen kleiner Dimensionen viele Aussagen treffen kann. Zu Matrizen höherer Dimensionen bleiben allerdings viele Fragen offen. Der im vierten Kapitel geführte Beweis zeigt, dass eine für kleine Matrizen geltende Aussage für höhere Dimensionen nicht gelten muss.
Die Hornsche Matrix, mit deren Hilfe dieser Beweis gelungen ist, kann auch auf andere Weise genutzt werden. Durch Erweitern der Matrix mit einem Vektor wird ein Polynom gebildet, welches positiv ist, trotzdem aber nicht als Quadratsumme geschrieben werden kann.
Als Motivation zur Untersuchung dieser Matrizen wurde in der Arbeit besonders auf den Einsatz von vollständig positiven und kopositiven Matrizen in der Optimierung eingegangen. Mit diesem Wissen können schwer lösbare quadratische Programme in lineare Programme umgeformt und damit besser gelöst werden. In der Arbeit wurden zunächst die beiden Kegel genauer betrachtet, da ihr Verständnis die Voraussetzung dafür ist, die kopositiven Probleme leichter zu lösen. Aufgrund der in der Arbeit bewiesenen Dualität der Kegel, kann man zu jedem Programm über den Kegel der kopositiven Matrizen auch das duale Programm über den Kegel der vollständig positive Matrizen definieren. Wie in der Arbeit erwähnt, ist die kopositive Optimierung noch ein sehr junges Gebiet. Es wird erst seit Kurzem auf die Nutzung von vollständig positiven und kopositiven Matrizen gesetzt. Man kann davon ausgehen, dass sich auf diesem Gebiet noch viel tun wird und vielleicht auch noch andere Gebiete auf diese Matrizen aufmerksam werden.

Literatur

[1] Berman, A. and Shaked-Monderer, N. (2003) *Completely Positive Matrices.* Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

[2] Dür, M. (2010) *Copositive Programming - a Survey.* University of Groningen: Johann Bernoulli Institute for Mathematics and Computer Science.

[3] Diananda, P.H. (1962) *On non-negative forms in real variables some or all of which are non-negative.* Cambridge: Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 58(1), p17-25.

[4] Witzel, J. (2013) *Some aspects of the optimization over the copositive and the completely positive cone.* Universität Trier: unv. Diss.

[5] Groetzner, P. and Dür, M. (2019) *A factorization method for completely positive matrices.* University of Augsburg: Department of Mathematics.

[6] Hiriart-Urruty, J.,-B. and Seeger, A. (2010) *A variational approach to copositive matrices.* Philadelphia: SIAM review, 52(4), p593-629.

[7] Pauer, F. (2011) *Lineare Algebra 1.* Universität Innsbruck: Skriptum zu Vorlesung.