Leopold-Franzens-Universität

Bachelorarbeit

Darstellungstheorie endlicher Gruppen über $\mathbb{C}$-Vektorräume

Grundlagen und Beispiele

Florian Willmann

1. März 2022

Betreut durch Prof. Dr. Tim Netzer,
Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.
Ich erkläre mich mit der Archivierung der vorliegenden Bachelorarbeit einverstanden.

Innsbruck, am 1. März 2022 Florian Willmann

1 Einleitung

Die Automorphismen einer mathematischen Struktur bilden bekanntermaßen eine Gruppe. Die Grundmotivation der Darstellungstheorie ist es, Gruppen besser zu verstehen, indem man einer Gruppe, mit Hilfe von Homomorphismen und Isomorphismen, Automorphismusgruppen zuordnet. In jenen kann man dann in einem gewissen Sinne konkreter rechnen. Auch kann man besonderes Wissen über die Struktur, die den Automorphismus definiert, verwenden. Die in diesem Zusammenhang vermutlich wichtigste und bestuntersuchte Klasse von Strukturen sind Vektorräume. Die entsprechenden Darstellungen nennt man dann lineare Darstellungen. Dieser Fall liefert viele nützliche Resultate:
"Diese Brücke zwischen der Linearen Algebra und der Gruppentheorie ist sehr fruchtbar. Die Darstellungstheorie spielt beispielsweise eine fundamentale Rolle in der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Sie hat darüber hinaus auch Anwendungen in nahezu allen Gebieten der Mathematik, von der Gruppentheorie über die Algebra bis zur algebraischen Geometrie und Zahlentheorie, von der Kombinatorik bis zur Stochastik, in der Topologie, der Analysis, und sogar der Quantenphysik: die Darstellungstheorie erklärt die Struktur des Wasserstoffatoms." [4]
Wie aus dem Titel meiner Bachelorarbeit größtenteils hervorgeht, schränke ich mich dort fast immer auf endliche Gruppen, und endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume ein. Unter diesen Bedingungen sind einige starke Sätze möglich, die die Untersuchung der Darstellungen deutlich vereinfacht. Kernpunkte meiner Arbeit werden zum Beispiel der „Satz von Maschke“ und die „Charaktertheorie“ sein. Ersterer zeigt unter anderem, dass man Darstellungen in sogenannte “irreduzible Darstellungen“ zerlegen kann. Zweitere erlaubt jeder Darstellung einen Vektor χ aus dem Raum $\mathbb{C}^G$ zuzuordnen, welcher alle wichtigen Eigenschaften der Darstellung festlegt. Des weiteren wird auch das Konzept, dass man Darstellungen auch als Module über der Gruppenalgebra $K[G]$ auffassen kann, behandelt. Anwendungen der Theorie in anderen Gebieten finden sich in dieser Bachelorarbeit jedoch keine.

2 Grundlagen

2.1 Definitionen

Notation:
Sei G eine Gruppe. Wir notieren das neutrale Element mit e. Bei (linearen) Abbildungen schreiben wir gerne fg statt $f \circ g$

Definition 1 (Darstellung)**.** Sei V ein Vektorraum, wir nennen $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ genau dann eine Darstellung von G, wenn p ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wenn die Abbildung p klar ist, nennen wir auch den Vektorraum V die Darstellung. Im folgenden werden wir nur endlich-dimensionale Vektorräume betrachten, also $V \cong K^n$. Außerdem schreiben wir statt $p(g)$ auch kurz p_g

Definition 2 (Dimension)**.**

$$\dim(p : G \to \mathrm{GL}(V)) := \dim(V)$$

Definition 3 (Isomorphie von Darstellungen)**.** Seien $p : G \to \mathrm{GL}(V)$, $q : G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen.

$$p \text{ isomorph zu } q \quad \Leftrightarrow$$
$$\exists f : W \mapsto V \text{ linear und invertierbar } \forall g \in G : \; q_g = f^{-1} p_g f$$

Damit p, q isomorph sein können, muss gelten $V \cong W \cong \mathbb{C}^n$ das besagte f ist damit quasi eine invertierbare $n \times n$-Matrix

Beispiel 4. Zwei Darstellungen p, q von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind isomorph, genau dann wenn $p_{[1]}, q_{[1]}$ ähnlich sind.

Beweis.

$$\forall [n] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \; q_{[n]} = f^{-1} p_{[n]} f \qquad \Rightarrow \qquad q_{[1]} = f^{-1} p_{[1]} f$$
$$q_{[1]} = f^{-1} p_{[1]} f \qquad \Rightarrow \qquad \forall [n] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \; q_{[n]} = q_{[1]}^n = (f^{-1} p_{[1]} f)^n = f^{-1} p_{[1]}^n f = f^{-1} p_{[n]} f$$

□

2.2 Der Satz von Maschke

Definition 5 (Teildarstellung)**.** Sei V ein Vektorraum, und M eine Menge linearer Abbildungen. Dann heißt $V_1 \subseteq V$ M-invariant, falls gilt:

$$\forall f \in M, v_1 \in V_1 : f v_1 \in V_1$$

Sei nun $p: G \mapsto \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und V_1 ein Untervektorraum. V_1 heißt Teildarstellung (oder G-invariant), wenn V_1 $p(G)$-invariant ist. Also wenn gilt

$$\forall g \in G, v_1 \in V_1 : p_g v_1 \in V_1$$

$V, \{0\}$ sind die trivialen Teildarstellungen

Definition 6 (irreduzible Teildarstellung)**.** Eine Darstellung heißt irreduzibel, wenn sie nur die trivialen Teildarstellungen besitzt.

Definition 7 (Projektion)**.** Sei $\pi : V \mapsto V$ linear, dann heißt π genau dann Projektion, wenn

$$\exists V_1, V_2 \subseteq V \text{ Untervektorräume} : (V = V_1 \oplus V_2 \wedge \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 : \ \pi(v_1 + v_2) = v_1)$$

Offensichtlich gilt $V_1 = \mathrm{Bild}(\pi) \wedge V_2 = \mathrm{Kern}(\pi)$

Lemma 1. V_1, V_2 sind invariant unter $p(G) \quad \Leftrightarrow \quad \forall g \in G : \ \pi p_g = p_g \pi$

Beweis. " $\Rightarrow$ " $\forall v \in V \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 : \ v = v_1 + v_2 \ \Rightarrow$

$$\pi p_g v = \pi p_g (v_1 + v_2) = \pi(p_g v_1 + p_g v_2) \overset{p_g v_1 \in V_1 \wedge p_g v_2 \in V_2}{=} p_g v_1 = p_g \pi(v_1 + v_2) = p_g \pi v$$

" $\Leftarrow$ " $\forall v \in V$:

$$((\exists v' \in V : v = \pi v') \ \Rightarrow \ p_g v = p_g \pi v' = \pi(p_g v')) \quad \wedge \quad (\pi v = 0 \Rightarrow \pi p_g v = p_g \pi v = p_g 0 = 0)$$

Damit sind $V_1 = \mathrm{Bild}(\pi)$, $V_2 = \mathrm{Kern}(\pi)$ invariant unter $p(G)$ □

Lemma 2. Sei $\pi : V \mapsto V_1$ linear, dann gilt: π ist Projekion auf $V_1 \Leftrightarrow \pi_{|V_1} = \mathrm{id}$

Beweis. " $\Rightarrow$ " $\forall v_1 \in V : \pi v_1 = v_1$
" $\Leftarrow$ " $V_2 := \mathrm{Kern}(\pi)$ Wir zeigen $V = V_1 \oplus V_2$
Sei $v \in V_1 \cap V_2 \overset{v \in V_1}{\Rightarrow} \exists v' \in V : v = \pi v' \quad \Rightarrow \quad v = \pi\pi v' = \pi v = 0$
Zudem gilt $\forall v \in V : x = \pi v + (v - \pi v) \ \wedge \pi v \in V_1 \wedge (v - \pi v) \in V_2$
Damit ist wie gewünscht $V = V_1 \oplus V_2$ zudem gilt $\pi(v_1 + v_2) = \pi v_1 = \pi\pi v' = \pi v' = v_1$
π ist also eine Projektion. □

Satz 1 (von Maschke)**.** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$ und $V_1 \subseteq V$ eine Teildarstellung, dann gibt es ein G-invariantes Komplement V_2 mit $V = V_1 \oplus V_2$

[1][S.6] [2][S.22]

Beweis. Mit Hilfe des Basisergänzungssatz kann man sehen, dass es ein $\hat{V_2}$ gibt mit $V = V_1 \oplus \hat{V_2}$.
Dadurch können wir die Projektion $\hat{\pi} : V \to V_1 : (v_1 + \hat{v_2}) \to v_1$ definieren.
Wegen $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$ gilt in K: $\#G := \sum_{g \in G} 1 \neq 0$

$$\pi := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g \hat{\pi} p_{g^{-1}}$$

$$\forall g \in G : p_g \hat{\pi} p_{g^{-1}}(V) = p_g \hat{\pi}(V) = p_g(V_1) \overset{V_1 \text{ ist } G\text{-invariant}}{=} V_1$$

Das Bild liegt also in V_1. Da V_1 ein Vektorraum ist, liegen Summen und Skalierungen wieder drinnen, also gilt:

$$\pi(V) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g \hat{\pi} p_{g^{-1}}(V) \subseteq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} V_1 = V_1$$

$\forall v_1 \in V_1$:

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g \hat{\pi} p_{g^{-1}} v_1 \overset{p_{g^{-1}} v_1 \in V_1 \wedge \hat{\pi}_{|V_1} = \mathrm{id}}{=} \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g p_{g^{-1}} v_1 = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} v_1 = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} 1 \right) v_1 = v_1$$

Da π auf V_1 abbildet und darauf auch die Identität ist, ist es nach dem vorherigen Lemma eine Projektion. Deshalb gibt es ein V_2 mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $\pi(v_1 + v_2) = v_1$. Dass V_2 G-invariant ist müssen wir zeigen: $\forall g \in G : \ \pi p_g = p_g \pi$
Da $\forall g \in G : g\cdot$ ist bijektiv auf G stimmt tatsächlich

$$p_g \pi p_{g^{-1}} = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} p_{gh} \hat{\pi} p_{(gh)^{-1}} = \frac{1}{\#G} \sum_{h' \in G} p_{h'} \hat{\pi} p_{h'^{-1}} = \pi$$

□

Beispiel 8 (Gegenbeispiel für $\mathrm{char}(K) \mid \#G$)**.**

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet G eine Gruppe und besitzt außerdem noch die kanonische Darstellung auf $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
e_1 ist ein Eigenvektor aller Matrizen in G, daher ist $\mathrm{span}(e_1)$ G-invariant. Gäbe es nun ein Komplement V_2, so wäre dies 1-eindimensional und jedes v_2 mit $0 \neq v_2 \in V_2$ ein Eigenvektor. (e_1, v_2) wären dann eine Eigenbasis von allen $g \in G$.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist aber tatsächlich die einzige Matrix, welche eine Eigenbasis besitzt/diagonalisierbar ist.

Korollar 1. Ein Vektorraum V mit einer Darstellung p lässt sich in irreduzible Untervektorräume erlegen. D.h

$$\exists V_1 \dots V_k \text{ irreduzibel} : V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_k$$

[1][S.7]

Beweis. Wenn eine Darstellung nicht irreduzibel ist, kann sie in zwei Teildarstellungen aufgespalten werden. Nach sukzessivem Anwenden (höchstens $\dim(V)$ oft) sind alle Teildarstellungen irreduzibel. □

3 Die charakteristische Funktion und ihre Anwendungen

Hier soll es darum gehen, die charakteristischen Funktionen einzuführen und zu verwenden.

3.1 Einführung der char.Fkt.

G-lineare Abbildungen

Seien V, W zwei Vektorräume, auf denen G mit den Darstellungen p, q operiert.

Definition 9. Auf $V \otimes W$ gibt es die Darstellung $p \otimes q$, welche man das Tensorprodukt der beiden Darstellungen nennt:

$$p \otimes q(g) : V \otimes W \to V \otimes W : \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} p_g v_i \otimes q_g w_i$$

Wenn man Basen $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$ wählt, bekommt man einen Isomorphismus

$$\iota : V \otimes W \to K^{n \times m} : \sum_{i=1}^{k} v_{a_i} \otimes w_{b_i} \mapsto \sum_{i=1}^{k} e_{a_i} e_{b_i}^T$$

Mit "transport of structure"bekommt man auch eine, zu $p \otimes q$ isomorphe Darstellung. Man kann sehen, dass das Bild von $g \in G$ folgende Form hat:

$$K^{n \times m} \to K^{n \times m} : A \mapsto \hat{p}_g A \hat{q}_g^T$$

Wobei $\hat{p}_g$, $\hat{q}_g^T$ die entsprechenden Darstellungsmatrizen sind. [2][S.52-55]

Satz 2. Es gilt

$$\operatorname{tr} p \otimes q(g) = \operatorname{tr} p_g \cdot \operatorname{tr} q_g$$

Beweis. Sei o.b.d.a $V = K^n, W = K^m$
Dann bildet $(e_i e_j^T)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ eine Basis von $\operatorname{Hom}(W, V)$

$$\operatorname{tr} p \otimes q(g) = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \left(p \otimes q(g) \left(e_i e_j^T \right) \right)_{ij} = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \left(p_g (e_i e_j^T) q_g \right)_{ij} =$$
$$= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \left(p_g e_i e_j^T q_g \right)_{ij} = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} e_i^T p_g e_i e_j^T q_g e_j = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (p_g)_{ii} (q_g)_{jj} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (p_g)_{ii} \cdot \sum_{j=1}^{m} (q_g)_{jj} = \operatorname{tr} p_g \cdot \operatorname{tr} q_g$$

□

Definition 10 (G-lineare Abbildungen)**.**

$$f : V \to W$$

heißt G-linear, falls f linear und

$$\forall g \in G : q_g f = f p_g$$

Man kann also nicht nur Skalare und Summen, sondern auch Gruppenelemente herausziehen.

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) := \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid f \text{ ist } G \text{ linear}\}$$

[2][S.14]

In Anlehnung an den Beweis des Satzes von Maschke kann man für $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$ folgende lineare Abbildung konstruieren.

$$\Pi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}_G(V, W) : f \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} q_g f p_{g^{-1}}$$

[2][S.38] Analog zum Beweis des Satzes von Maschke sieht man, dass Π tatsächlich in die G-linearen Abbildungen abbildet.

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_G(V, W) : \Pi f = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} q_g f p_{g^{-1}} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} q_g q_{g^{-1}} f = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f = f$$

Π ist daher eine Projektion.

Im folgenden soll die Dimension von $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ bestimmt werden. Dazu zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3. Sei $\pi : V_1 \oplus V_2 \mapsto V_1 : v_1 + v_2 \to v_1$ eine Projektion, dann gilt $\dim V_1 = \mathrm{tr}\, \pi$

Beweis. Man wählt Basen $(v_1, \dots v_k), (v_{k+1}, \dots v_n)$ von V_1, V_2, dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und π dargestellt bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$\mathrm{tr}\, \pi = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, I_k = k = \dim(V_1)$$

□

Man muss also nur die Spur von Π berechnen, um $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W))$ zu bekommen.

Satz 3.

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W)) = \mathrm{tr}\, \Pi = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\, q_g \cdot \mathrm{tr}\, p_{g^{-1}}$$

Beweis. Mit der Definition der Darstellung

$$p^{-1} : G \to \mathrm{GL}(W) : g \to p_{g^{-1}}^T$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\Pi = \operatorname{tr}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\left(f \to q_g f p_{g^{-1}}\right) = \operatorname{tr}\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} q\otimes p^{-1}(g) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\operatorname{tr} q_g \cdot \operatorname{tr} p_g^{-1} = \\ = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\operatorname{tr} q_g \cdot \operatorname{tr} p_{g^{-1}}^T = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\operatorname{tr} q_g \cdot \operatorname{tr} p_{g^{-1}} \end{aligned}$$

□

Die charakteristische Funktion und Klassenfunktionen

Ab jetzt sei $K = \mathbb{C}$

Definition 11 (Charakteristische Funktion)**.** Wir nennen $\chi_p : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \operatorname{tr} p_g$ die charakteristische Funktion von p

Definition 12 (inneres Produkt erste Version)**.** Seien $a, b \in \mathbb{C}^G := \{a : G \to \mathbb{C}\}$

$$\langle a, b\rangle := \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} a(g)b(g^{-1})$$

Wegen dem letzten Satz gilt $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W)) = \langle\chi_p, \chi_q\rangle$
Man kann leicht nachrechnen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische Bilinearform ist.

Lemma 4. Sei $p : G \mapsto \mathrm{GL}(V)$ ein Darstellung, dann gilt

$$\forall g \in G : p_g \text{ ist diagonalisierbar } \wedge \left(\lambda \text{ ist Eigenwert } \Rightarrow \lambda^{\mathrm{ord}(g)} = 1\right)$$

Dabei ist $\mathrm{ord}(g)$ die Ordnung des Gruppenelement g.

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über $\dim(V)$
I.A.$(n = 1)$: Klar

I.S.$(n \to n + 1)$: Sei $g \in G$, wir betrachten $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ord}(g)\mathbb{Z}$ und $p' := p_{|\langle g\rangle}$
Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es mindestens einen Eigenvektor v. Dann ist $\mathrm{span}(v)$ ein $\langle g\rangle$ invarianter Unterraum. Wegen dem Satz von Maschke gibt es $V_2 \subseteq V$ $\langle g\rangle$-invariant mit $V = \mathrm{span}(v) \oplus V_2$. Nach I.V. ist $p'(g)_{|V_2} = p(g)_{|V_2}$ diagonalisierbar, mit Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$. Dann ist $(v, v_1, \dots, v_n)$ eine Eigenbasis von ganz V
Wegen $p_g^{\mathrm{ord}(g)} = \mathrm{id}$ gilt auch $\lambda^{\mathrm{ord}(g)} = 1$ □

Satz 4. Eine gelte $\dim(p) = n$, dann erfüllt die charakteristische Funktion χ_p :

i) $\chi_p(e) = n$

ii) $\chi_p(h^{-1}gh) = \chi_p(g)$

iii) $\chi_p(g^{-1}) = \chi_p(g)^*$

Beweis. i) gilt wegen $\chi_p(e) = \operatorname{tr} I_n = n$
ii) gilt, da sich sich die Spur beim Konjugieren nicht ändert

iii): In der Eigenbasis hat $p(g)$ die Form $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Wegen $\lambda_i^{\operatorname{ord}(g)} = 1$ gilt $|\lambda| = 1$ und daher $\lambda^{-1} = \lambda^*$.
Deshalb hat $p(g^{-1})$ die Form $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$ $=\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ $=\operatorname{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ Daraus folgt:

$$\operatorname{tr} p(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^* = (\operatorname{tr} p(g))^*$$

□

Definition 13 (inneres Produkt zweite Version)**.** Seien $a, b \in \mathbb{C}^G$

$$(a \mid b) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} a(g) b(g)^*$$

$(\cdot \mid \cdot)$ ist also ein richtiges Skalarprodukt.
Für Charaktere χ_p, χ_q sieht man am vorherigen Satz, dass $\langle \chi_p, \chi_q \rangle = (\chi_p \mid \chi_q)$

Weiter inspiziert Satz 4. die folgende Definition:

Definition 14. $a \in \mathbb{C}^G$ heißt Klassenfunktion, falls gilt

$$\forall g, h \in G : a(h^{-1} g h) = a(g)$$

Die Klassenfunktionen bilden einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^G$

Satz 5. Über Summe, Produkt einer char. Fkt. Es gilt

i) $\chi_{p \oplus q} = \chi_p + \chi_q$

ii) $\chi_{p \otimes q} = \chi_p \cdot \chi_q$

[2][S.59]

Beweis. i) $(p \oplus q)_g$ hat in der richtigen Basis Blockdiagonalgestalt. Die Spur ist dann die Summe der Spuren von den Blöcken.

ii) Nach Satz 3. gilt $\operatorname{tr}((p \otimes q)_g) = \operatorname{tr} p_g \cdot \operatorname{tr} q_g$

□

3.2 Eigenschaften und Anwendungen der char.Fkt.

3.2.1 Das Lemma von Schur

Satz 6 (Lemma von Schur)**.** Seien $p : G \to \operatorname{GL}(V)$, $p' : G \to \operatorname{GL}(V')$ zwei irreduzible Darstellungen, und sei $f : V \to V'$ eine G-lineare Abbildung, also

$$\forall g \in G : f p_g = p'_g f$$

i) Falls p, p' nicht isomorph sind gilt $f = 0$

ii) Falls $p = p'$ ist, existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda\,\mathrm{id}$

Beweis. [1][S.13]
i) $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V$,$\mathrm{Im}(f) \subseteq V'$ sind G-invariant. Damit gilt

$$(\mathrm{Kern}(f) = \{0\} \vee \mathrm{Kern}(f) = V) \;\wedge\; (\mathrm{Im}(f) = \{0\} \vee \mathrm{Im}(f) = V')$$

Angenommen $f \neq 0$, wegen

$$\mathrm{Kern}(f) = V \;\vee\; \mathrm{Im}(f) = \{0\} \;\Rightarrow\; f = 0$$

kann nur noch gelten, dass $\mathrm{Kern}(f) = \{0\} \wedge \mathrm{Im}(f) = V'$ damit ist f aber ein Isomorphismus zwischen V, V'. Da er G-linear ist, sieht man, dass p, p' isomorph waren, ein Widerspruch zu Annahme.

ii) Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat f mindestens einen Eigenwert λ. Dann gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) \subseteq V$ ist G-invariant. Daher gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \{0\} \vee \mathrm{Eig}(f,\lambda) = V$, da der Eigenraum mindestens 1-eindimensional sein muss, gilt $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = V$ □

Tatsächlich ist die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$ notwendig, denn über $\mathbb{R}$ stimmt der zweite Teil des Satzes nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 15. Im $\mathbb{R}^2$ besitzt jede Drehung, außer jene um den Winkel $0, \pi$, keinen Eigenwert. Daher besitzt jede nicht triviale Untergruppe(z.b. die Drehungen um 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$) keinen 1-dim G-invarianten Unterraum. Die Darstellung ist daher irreduzibel. Trotzdem kommutieren nicht nur Vielfache der Identität, sondern auch alle anderen Drehungen mit den Gruppenelementen.

Durch das Lemma von Schur ergeben sich die sehr bedeutsamen Ortogonalitätsrelationen für irreduzible Darstellungen:

Korollar 2. Seien $p : G \to \mathrm{GL}(V)$, $p' : G \to \mathrm{GL}(V')$ zwei irreduzible Darstellungen, dann gilt

$$(\chi_p \mid \chi_{p'}) = \langle \chi_p, \chi_{p'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } p, p' \text{ sind isomorph} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1][S.15]

Beweis. Folgt aus der Tatsache, dass $\langle \chi_p, \chi_{p'} \rangle$ die Dimension von $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ angibt, dem schurschen Lemma und der Tatsache, dass isomorphe Darstellungen die gleiche charakteristische Funktion haben. □

Die char. Fkt. bilden also ein Ortomormalsystem und sind daher linear unabhängig. Es gibt daher höchsten $\dim(\mathbb{C}^G) = \#G$ viele.

Satz 7. Sei $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und sei

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$$

eine Zerlegung in irred. Darstellungen. Sei $p_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ eine beliebige irred. Darstellung. Und seinen $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ genau jene irred. Darstellungen, die zu W b.z.w p_W isomorph sind. Dann gilt $k = \langle \chi_p, \chi_{p_W} \rangle$ [1][S.16]

Beweis. Wegen dem Satz über die Summe der char. Fkt. und den Ortogonalitätsrelationen gilt

$$\langle \chi_p, \chi p_W \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \chi_{p_{V_i}}, \chi_{p_W} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{\{p_{V_i}, p_W \text{ sind isomorph}\}} = \sum_{j=1}^{k} 1 = k$$

□

Man kann daran sehen, dass bei Zerlegung in irred. Darstellungen die Summanden bis auf Isomorphie eindeutig sind.

Die reguläre Darstellung und ihre Anwendung

Definition 16 (Reguläre Darstellung)**.** Folgende Abbildung ist ein injektiver Homomorphismus in die Permutationsgruppe (vgl Satz v Cayley) :

$$\tilde{p} : G \to \mathrm{Bij}(G) = S_G : g \mapsto (h \to gh)$$

$\tilde{p}_g$ kann linear auf $\mathbb{C}^G$:=span$(e_h)_{h\in G}$ erweitert werden.

$$p_{\mathrm{reg}} : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G) : g \mapsto \left(\sum_{h\in G} \lambda_h e_h \mapsto g \sum_{h\in G} \lambda_h e_h = \sum_{h\in G} \lambda_h e_{gh} \right)$$

p_{reg} ist eine Darstellung. Die sogenannte reguläre Darstellung von G

Satz 8 (char. Fkt. der reg. Darstellung)**.**

$$\chi_{p_{\mathrm{reg}}}(g) = \begin{cases} \#G & \text{falls } g = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1][S.18]

Beweis.

$$g = e \Rightarrow p_{\mathrm{reg}}(g) = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{tr}\, p_{\mathrm{reg}}(g) = \#G$$

In der Basis $(e_h)_{h\in G}$ ist $p_{\mathrm{reg}}(g)$ eine Permutaionsmatrix. Die Spur einer Permutaionsmartix berechnet sich aus der Anzahl der Fixpunkte von der Permutation.
Wegen

$$(\exists h \in G : gh = h) \Rightarrow g = e$$

hat die Permutation für $g \neq e$ keinen Fixpunkt. □

Für eine beliebige Darstellung $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ gilt deshalb:

$$\langle \chi_p, \chi_{p_{\mathrm{reg}}} \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \chi_p(g) \chi_{p_{\mathrm{reg}}}(g)^* = \frac{1}{\#G} \chi_p(e) \cdot (\#G)^* = \mathrm{tr}\, \mathrm{id}_V = \dim(p)$$

Daher kommt jede irreduzible Darstellung in der regulären Darstellung also so oft vor, wie ihre Dimension. Das bedeutet:
Seien $p_1, \ldots, p_l$ alle bis auf Isomorphie irreduziblen Darstellungen von G mit entsprechenden Dimensionen $n_1, \ldots, n_l$.

Dann gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, l\}$ invariante Untervektorräume $V_{i,1}, \ldots V_{i,n_i} \in \mathbb{C}^G$, deren Darstellung isomorph zu p_i ist und es gilt:

$$\mathbb{C}^G = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=1}^{n_i} V_{i,j}$$

Es folgt

$$\chi_{p_{\text{reg}}} = \sum_{i=1}^{l} n_l \chi_{p_l}$$

Daraus bekommen wir unmittelbar folgenden Satz

Satz 9. i) $\sum_{i=1}^{l} n_l^2 = \#G$

ii) Für $g \neq e$ gilt $\sum_{i=1}^{l} \chi_{p_i}(g) = 0$
[1][S.18]

Die letzten Gleichungen liefern nützliche Informationen über die irred. Darstellungen. Mehr kann man sagen, nachdem man gezeigt hat, dass ihre Anzahl gleich jener der Konjugationsklassen ist.

Anzahl der irred.Darstellungen

Seien $H_1, \ldots H_k$ die Konjugationsklassen von G

Definition 17 (Algebra der reg. Darstellung)**.**

$$A_{\text{reg}} := \{\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\text{reg}}(g) \mid \lambda_g \in \mathbb{C}\}$$

A_{reg} ist eine Unteralgebra von $\text{Hom}(\mathbb{C}^G)$. Man betrachte

$$\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\text{reg}}(g) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\text{reg}}(g)\right) e_1 = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} \lambda_g e_g = 0 \Rightarrow \forall g \in G : \lambda_g = 0$$

Die $p_{\text{reg}}(g)$ sind also linear unabhängig. Zudem gilt offensichtlich:

$$p_{\text{reg}}(g) p_{\text{reg}}(h) = p_{\text{reg}}(gh)$$

Man kann an diesen Fakten sehen, dass A_{reg} isomorph zu Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ ist. Mehr dazu in einem späteren Kapitel.

Wir nennen das Zentrum der Algebra A_{reg} ab jetzt Z

Lemma 5.

$$f \in Z \quad \Leftrightarrow \quad f \in A_{\text{reg}} \wedge \forall g \in G : f p_{\text{reg}}(g) = p_{\text{reg}}(g) f$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Klar, da $p_{\text{reg}}(g) \in A_{\text{reg}}$
" $\Leftarrow$ " Wenn es für die einzelnen Elemente stimmt, gilt es für Linearkombinationen auch auch. □

Satz 10. Man kann zwei verschiedene Basen von Z als Vektorraum finden i)

$$\sum_{g\in H_1} p_{\mathrm{reg}}(g)\ ,\ldots,\ \sum_{g\in H_k} p_{\mathrm{reg}}(g)$$

ii) Es gilt wie zuvor diskutiert

$$\mathbb{C}^G = \bigoplus_{i=1}^{l}\bigoplus_{j=1}^{n_i} V_{ij}$$

mit

$$\hat{V}_i := \bigoplus_{j=1}^{n_i} V_{ij}$$

stimmt

$$\mathbb{C}^G = \bigoplus_{i=1}^{l} \hat{V}_i$$

bezüglich dieser Zerlegung kann man für $i \in \{1,\ldots,l\}$ Projektionen definieren:

$$\pi_i : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G : \sum_{j=1}^{l} v_j \mapsto v_i$$

Diese Projektionen bilden dann ebenfalls eine Basis.

Insbesondere gilt #irred.Darstellungen = #Konjugugationsklassen

Beweis. i)
Sei $f = \sum_{g\in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)$. Falls es $g_1, g_2 \in G$ mit $h^{-1}g_1h = g_2$ und $\lambda_{g_1} \neq \lambda_{g_2}$ gibt, dann gilt

$$p_{\mathrm{reg}}(h^{-1})fp_{\mathrm{reg}}(h) = \sum_{g\in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(h^{-1}gh) \neq \sum_{g\in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) = f$$

Ein Widerspruch zu $fp_{\mathrm{reg}}(h) = p_{\mathrm{reg}}(h)f$. Deshalb muss gelten:

$$\forall i \in \{1,\ldots k\} \exists \lambda_i \forall g \in H_i : \lambda_g = \lambda_i$$

Daher:

$$\sum_{g\in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{g\in H_i} p_{\mathrm{reg}}(g)$$

ii)Sei $f = \sum_{g\in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)$.
Man sieht, dass ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^G$, der G-invariant ist, auch A_{reg}-invariant ist. Daher:

$$\forall i \in \{1,\ldots,l\}, j \in \{1,\ldots,n_i\} : V_{ij} \text{ ist } f\text{-invariant}$$

$f_{|V_{ij}}$ ist dann ein Endomorphismus und kommutiert mit allen $p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{ij}}$.
Da V_{ij} aber irreduzibel war, gibt es nach dem Lemma von Schur λ_{ij} mit

$$f_{|V_{ij}} = \lambda_{ij}\,\mathrm{id}_{V_{ij}}$$

Bei zwei isomorphen Untervektorräumen V_{ij}, V_{io} gibt es dann einen Isomorphismus $\varphi : V_{ij} \to V_{io}$. Dieser erfüllt:

$$\forall v_{ij} \in V_{ij}, v_{io} \in V_{io}, g \in G : p_{\mathrm{reg}}(g)\varphi v_{ij} = \varphi p_{\mathrm{reg}}(g) v_{io}$$

Daraus folgt

$$\lambda_{io}\,\mathrm{id}_{V_{io}} = f_{|V_{io}} = \varphi^{-1} f_{|V_{ij}} \varphi = \varphi^{-1} \lambda_{ij}\,\mathrm{id}_{V_{ij}}\,\varphi = \lambda_{ij}\,\mathrm{id}_{V_{io}}$$

Deshalb sind $\lambda_{ij}, \lambda_{io}$ gleich, es gibt daher ein λ_i mit

$$\forall a \in \{1, \ldots, n_i\} : \lambda_{ia} = \lambda_i$$

Es gilt

$$f_{|V_i} = \lambda_i\,\mathrm{id}_{V_i}$$

Wir erhalten letztlich

$$f = f \circ \mathrm{id} = f \circ \sum_{i=1}^{l} \pi_i = \sum_{i=1}^{l} f \circ \pi_i = \sum_{i=1}^{l} f_{|V_i} \circ \pi_i = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \pi_i$$

Da die Projektionen auch offensichtlich linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis. □

Eine ähnliche Idee wie in Satz 10. findet sich in [1][S.50]

Definition 18 (Charaktertafel)**.** Sei G eine Gruppe mit geordneten Konjugationsklassen $[g_1], \ldots, [g_k]$, und irreduziblen Darstellungen $p_1, \ldots, p_k$ mit char. Fkt. $\chi_1, \ldots, \chi_k$. Im Normalfall wählt man $g_1 = e,\ p_1 = p_{\text{triv.}}$.

$$T_G := (\chi_i(g_j))_{1 \leq i,j \leq k}$$

Da die char. Fkt auf Konjugationsklassen konstant ist, enthält die Charaktertafel alle wichtigen Informationen über die char. Fkt. der irred. Darstellungen.

Beispiel 19 (Charaktertafel der S_3)**.**

S_3	id	(a,b)	(a,b,c)
id	1	1	1
sgn	1	-1	1
Dieder	2	0	1

Satz 11 (Umformulierung der Orthogonalitätsrelation)**.** Sei G eine Gruppe, $A := T_G$, $D := \mathrm{diag}(\#[g_1], \ldots, \#[g_k])/(\#G)$ dann gilt

$$ADA^* = \mathrm{id}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_j(g)^* = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \frac{1}{\#G} \sum_{l=1}^{k} \#[g_l]\chi_i(g_l)\chi_j(g_l)^* = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \sum_{l=1}^{k} A_{il} \frac{\#[g_l]}{\#G} A_{jl}^* = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \sum_{l=1}^{k} A_{il} \frac{\#[g_l]}{\#G} (A^*)_{lj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \sum_{l=1}^{k} A_{il} (DA^*)_{lj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : A(DA^*)_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\
ADA^* = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

□

Korollar 3. Mit den Bedingungen von Satz (11) gilt

$$A^*A = D^{-1}$$

Beweis.

$$ADA^* = \mathrm{id} \;\Leftrightarrow\; DA^* = A^{-1} \;\Leftrightarrow\; DA^*A = \mathrm{id} \;\Leftrightarrow\; A^*A = D^{-1}$$

□

Ein ähnliches Resultat findet sich in [1][S.20], [2][S.76-77]

3.3 Methoden zu expliziten Zerlegung von Darstellungen

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, wie man eine Darstellung explizit in Teildarstellungen zerlegen kann.

Definition 20 (Kanonische Zerlegung)**.** Sei $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und seien $p_1, \dots, p_l$ die irred. Darstellungen von G und $m_i = \langle \chi_p, \chi_{p_i} \rangle$.
Dann kommt p_i genau m_i mal in p vor. Deshalb gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$, G-invariante Unterräume von V $V_{i1}, \dots, V_{im_i}$, deren Darstellung isomorph zu p_i ist, und es gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=1}^{m_i} V_{ij}$$

Mit

$$V_i := \bigoplus_{j=1}^{m_i} V_{ij}$$

Gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{l} V_i$$

Diese Zerlegung in G-invariante Unterräume von V nennen wir die Kanonische Zerlegung. [1][S.21]
Die kanonische Zerlegung wurde eigentlich schon in Satz. 10 verwendet.

Im Gegensatz zur Zerlegung in irred. Teildarstellungen sind die Untervektorräume V_i (nicht nur bis auf Isomorphie von Darstellungen sondern völlig) eindeutig.
Man kann sie auch explizit berechnen:

Satz 12. Sei $\dim(p_i) = n_i$

$$\pi_i = \frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) p_g$$

ist eine Projektion auf V_i bezüglich der Zerlegung

$$V = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j$$

[1][S.21]

Beweis. Wegen

$$p_{h^{-1}} \pi_i p_h = p_{h^{-1}} \left(\frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) p_g \right) p_h = \frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) p_{h^{-1}gh} = \frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(hg^{-1}h^{-1}) p_g = $$
$$= \frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) p_g$$

kommutiert π_i mit allen p_h und ist daher G-linear.

$$(\pi_i)_{|V_{kj}} = \frac{n_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) (p_g)_{|V_{kj}}$$

Daher bildet $(\pi_i)_{|V_{kj}}$ V_{kj} auf V_{kj} ab und ist G-linear. Da V_{kj} irreduzibel ist, gilt nach dem Lemma von Schur

$$(\pi_i)_{|V_{kj}} = \lambda \operatorname{id}_{V_{kj}}$$

Mit

$$\lambda = \frac{1}{n_i} \operatorname{tr}(\pi_i)_{|V_{kj}} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) \operatorname{tr}(p_g)_{|V_{kj}} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{p_i}(g^{-1}) \chi_{p_k}(g) = \langle \chi_{p_i}, \chi_{p_k} \rangle = \delta_{ik}$$

π_i ist also id auf allen V_{ij} und 0 sonst. Daher ist es offensichtlich die Projektion auf V_i □

Wir wissen aus den vorherigen Teilen, dass

$$\Pi : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}_G(V, W) : f \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} q_g f p_{g^{-1}}$$

eine Projektion auf $\operatorname{Hom}_G(V, W)$ ist. Wegen dem Lemma von Schur gilt

$$\operatorname{Bild}(\Pi) = \operatorname{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} \{\lambda \operatorname{id} \mid \lambda \in \mathbb{C}\} & \text{falls } p = q \\ \{0\} & \text{falls } p, q \text{ sind nicht isomorph} \end{cases}$$

Deshalb können wir das folgende Lemma formulieren.

(Der Fall dass $p \neq q$, aber trotzdem isomorph sind, wurde nicht behandelt, ergibt sich aber aus dem Fall $p = q$.)

Lemma 6. Seien $p : G \to \mathrm{GL}(V)$, $q : G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei irred. Darstellungen. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bel., dann gilt:

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} q_g f p_{g^{-1}} = \Pi(f) = \begin{cases} \frac{\mathrm{tr}(f)}{\dim(p)} \,\mathrm{id} & \text{falls } p = q \\ 0 & \text{falls } p, q \text{ sind nicht isomorph} \end{cases}$$

[1][S.13-14]

Beweis. $\mathrm{Fall}_1 (p = q)$:
Wegen $\mathrm{Bild}(\Pi) = \{\lambda\,\mathrm{id} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ gilt

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g f p_{g^{-1}} = \Pi(f) = \lambda\,\mathrm{id}$$

Wegen

$$\dim(p)\lambda = \mathrm{tr}(\lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{tr}\, \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g f p_{g^{-1}} = \mathrm{tr}\, f$$

gilt

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g f p_{g^{-1}} = \frac{\mathrm{tr}\, f}{\dim(p)}\,\mathrm{id}$$

Fall_2(p, q sind nicht isomorph):
Wegen $\mathrm{Bild}(\Pi) = 0$ gilt:

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p_g f p_{g^{-1}} = \Pi(f) = 0$$

□

Satz 13. Seien $p : G \to \mathrm{GL}(V)$, $q : G \to \mathrm{GL}(W)$ zwei irred. Darstellungen, und $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$ Basen von V, W bezüglich der wir $p(g)$, bzw. $q(g)$ als Matrix auffassen. Wenn wir im Fall „p, q isomorph “die Basen so wählen, dass $w_1, \dots, w_m = fv_1, \dots, fv_n$ (wobei f ein Isomorphismus ist, zudem gilt offensichtlich $m = n$) (bei einer solchen Wahl der Basen sind die Darstellungsmatrizen von p, q gleich), dann gilt:

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} p(g^{-1})_{i_1 j_1} q(g)_{i_2 j_2} = \begin{cases} \frac{1}{n} \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} & \text{falls } p, q \text{ sind isomorph} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1][S.14]

Beweis. Fall_1(p, q sind isomorph) : Wie schon erwähnt gilt $p_{ij} = q_{ij}$, wie man z.b. mit

$$\sum_{i=1}^{n} q(g)_{ij} w_i = q(g) w_j = q(g) f v_j = f p(g) v_j = f \sum_{i=1}^{n} p(g)_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} p(g)_{ij} f v_i = \sum_{i=1}^{n} p(g)_{ij} w_i$$

sieht.

Wir nehmen deshalb o.B.d.A an $W = V = K^n$
Es gilt

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g^{-1})_{i_1j_1}q(g)_{i_2j_2} = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g)_{i_1j_1}q(g^{-1})_{i_2j_2} = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} e_{i_1}^T p(g)e_{j_1}e_{i_2}^T q(g^{-1})e_{j_2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g)e_{j_1}e_{i_2}^T q(g^{-1})\right)_{i_1j_2} = \left(\frac{\operatorname{tr}(e_{j_1}e_{i_2}^T)}{\dim(p)}\operatorname{id}\right)_{i_1j_2} = \left(\frac{\delta_{j_1i_2}}{\dim(p)}\operatorname{id}\right)_{i_1j_2} = \frac{\delta_{j_1i_2}}{\dim(p)}\delta_{i_1j_2} =$$

$$= \frac{1}{n}\delta_{j_1i_2}\delta_{i_1j_2}$$

Fall$_2$(p, q sind nicht isomorph) :

$$\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g^{-1})_{i_1j_1}q(g)_{i_2j_2} = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g)_{i_1j_1}q(g^{-1})_{i_2j_2} = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} e_{i_1}^T p(g)e_{j_1}e_{i_2}^T q(g^{-1})e_{j_2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} p(g)e_{j_1}e_{i_2}^T q(g^{-1})\right)_{i_1j_2} = 0_{i_1j_2} = 0$$

□

Aus diesen Satz erhält man ebenfalls leicht Korollar 2, also:

$$(\chi_p \mid \chi_q) = \langle \chi_p, \chi_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } p, q \text{ sind isomorph} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn man sich nicht nur für die kanonische Zerlegung interessiert, sondern eine Darstellung wirklich in irred. Teildarstellungen zerlegen will, kann man folgenden Satz verwenden.

Satz 14. Sei $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und seien $p_1, \dots, p_l$ die irred. Darstellungen von G, Sei

$$q : G \to \mathrm{GL}(K^n)$$

eine zu p_i isomorphe Darstellung. Wir definieren für $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi_{\alpha\beta} := \sum_{g\in G} q(g^{-1})_{\alpha\beta}p(g)$$

dann gilt

i) Die Abbildung $\pi_{\alpha\alpha}$ ist eine Projektion auf einen Unterraum von V_i, wir nennen ihn $V_{i,\alpha}$. Es gilt

$$V_i = \bigoplus_{\alpha=1}^{n} V_{i,\alpha}$$

und

$$\pi_i = \sum_{i=1}^{n} \pi_{\alpha\alpha}$$

ii) $\pi_{\alpha\beta}$ ist auf V_j für $j \neq i$ und $V_{i,\gamma}$ für $\gamma \neq \beta$ gleich 0. Eingeschränkt auf $V_{i,\beta}$ ist es ein Isomorphismus zwischen $V_{i,\beta}$ und $V_{i,\alpha}$

iii) Sei $x_1 \in V_{i,1} \setminus \{0\}$ beliebig. Für jedes $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ kann man dann $x_\alpha := \pi_{\alpha 1}(x_1)$ definieren. Die x_α sind dann linear unabhängig und der von ihnen erzeugte n-dimensionale Vektorraum ist sogar eine irreduzible (und daher zu p_i isomorphe) Teildarstellung. Wir nennen den Vektorraum/die Teildarstellung $W(x_1)$. Es gilt zudem

$$p_g(x_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} q(g)_{\beta\alpha} x_\beta$$

iv) Falls $(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)})$ eine Basis von $V_{i,1}$ ist, gilt

$$V_i = \bigoplus_{k=1}^{n} W(x_1^{(k)})$$

[1][S.23]

Beweis. Man man kann den Satz mit Hilfe der Aussagen von Satz[13] beweisen. [1][S.23-24] □

Beispiel 21 (Zerlegung der regulären Darstellung der S_3 in irred. Teildarstellungen)**.** Die Konjugationsklassen von der S_3 sind:

$$[\mathrm{id}], [(a, b)], [(a, b, c)]$$

Es gibt daher 3 irred. Darstellungen. Die triviale Darstellung und sgn sind 2 davon. Die 3. ist die Diedergruppe, also jene Gruppe der linearen Abbildungen, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich selbst abbildet. Man sieht leicht, dass die Zuordnung zwischen den Permutationen (S_3) und den linearen Abbildungen, welche die Ecken entsprechend vertauschen, ein Isomorphismus ist. Dieser ist eine Darstellung der S_3:
Nun zur Zerlegung:

<u>triviale Darstellung:</u>

$$\pi_{\mathrm{triv}} = \sum_{\sigma \in S_3} p_{\mathrm{reg}}(\sigma)$$

Für jedes Basiselement e_τ gilt

$$\pi_{\mathrm{triv}}(e_\tau) = \sum_{\sigma \in S_3} e_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma$$

Daher gilt:

$$V_{\mathrm{triv}} = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma$$

<u>Signum:</u>

$$\pi_{\mathrm{sgn}} = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) p_{\mathrm{reg}}(\sigma)$$

Für jedes Basiselement e_τ gilt

$$\pi_{\mathrm{sgn}}(e_\tau) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) e_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma\tau^{-1}) e_\sigma = \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma$$

Daher gilt:

$$V_{\text{sgn}} = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) e_\sigma$$

<u>Dieder:</u> $\operatorname{tr}(\mathrm{id}) = 2$, die Spur einer Spiegelung ist 0. Die Spur der Drehungen um $120, 240$ Grad sind jeweils 1:

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \cos(120°) & -\sin(120°) \\ \sin(120°) & \cos(120°) \end{pmatrix} = 2\cos(120°) = -1$$

Darum:

$$\pi_{\text{Dieder}} = 2\,\mathrm{id} - p_{\text{reg}}((1,2,3)) - p_{\text{reg}}((1,3,2))$$

τ	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$\pi_{\text{Dieder}}(e_\tau)$	$2e_{\text{id}} - e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)}$	$-e_{\text{id}} + 2e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)}$	$-e_{\text{id}} - e_{(1,2,3)} + 2e_{(1,3,2)}$

Wegen $(\mathrm{id}, (1,2,3), (1,3,2)) \cdot (1,2) = ((1,2), (1,3), (2,3))$ gilt

τ	$(1,2) = \mathrm{id}(1,2)$	$(1,3) = (1,2,3)(1,2)$	$(2,3) = (1,3,2)(1,2)$
$\pi_{\text{Dieder}}(e_\tau)$	$2e_{(1,2)} - e_{(1,3)} - e_{(2,3)}$	$-e_{(1,2)} + 2e_{(1,3)} - e_{(2,3)}$	$-e_{(1,2)} - e_{(1,3)} + 2e_{(2,3)}$

Wir schreiben jeweils die Koeffizienten von $\pi_{\text{Dieder}}(e_\tau)$ in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher gilt

$$V_{\text{Dieder}} = \operatorname{span}\{e_{\text{id}} - e_{(1,3,2)}, e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)}, e_{(1,2)} - e_{(2,3)}, e_{(1,3)} - e_{(2,3)}\}$$

Man kann V_{Dieder} auch in irred. Darstellungen aufspalten. Dazu nennen wir $a := \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$

$$\begin{aligned} V_{\text{Dieder}} = \operatorname{span}\{&e_{\text{id}} + ae_{(1,2,3)} + a^2 e_{(1,3,2)}, e_{(1,2)} + a^2 e_{(2,3)} + ae_{(2,3)}\} \oplus \\ \oplus \operatorname{span}\{&e_{\text{id}} + a^2 e_{(1,2,3)} + ae_{(1,3,2)}, e_{(1,2)} + ae_{(2,3)} + a^2 e_{(2,3)}\} \end{aligned}$$

4 Die Gruppenalgebra

4.1 Grundlagen der Gruppenalgebra

Sei G eine endliche Gruppe

Definition 22 (Gruppenalgebra)**.** Man kann den Gruppenring

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C} \right\}$$

bilden.
Dieser besitzt die Multiplikation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \cdot \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{g_1 g_2 = g} \lambda_{g_1} \alpha_{g_2} \right) g$$

Da $\mathbb{C}$ nicht nur ein Ring, sondern auch ein Körper ist, ist $\mathbb{C}[G]$ folglich eine Algebra. [1][S.47] [5][S.36]

Da $p_{\text{reg}}(G) = \{p_{\text{reg}}(g) \mid g \in G\}$ eine linear unabh. Menge ist, ist

$$f: \; A_{\text{reg}}(= \text{span}(p_{\text{reg}}(G))) \to \mathbb{C}[G] : \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\text{reg}}(g) \to \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

ein wohldefinierter Algebren-Isomorphismus.

Definition 23 (Modul)**.** Ein Modul ist die Verallgemeinerung eines Vektorraums auf einen Ring R statt einem Körper, also eine abelsche Gruppe V mit einer Multiplikation

$$\cdot \, R \times V \to V : (r, v) \mapsto rv$$

die folgende Eigenschaften erfüllt: $\forall r, r' \in R, \;\; v, v' \in V$ gilt

i) $r(v + v') = rv + rv'$

ii) $(r + r')v = rv + r'v$

iii) $(r'r)v = r'(rv)$

Um genau zu sein, ist dies ein sogenannter Linksmodul. Beim Rechtsmodul muss die Multiplikation folgende Eigenschaften erfüllen.

i) $r(v + v') = rv + rv'$

ii) $(r + r')v = rv + r'v$

iii) $(rr')v = r'(rv)$

Man schreibt die Multiplikation mit einem $r \in R$ im Normalfall von der anderen Seite, dann wird die Bedingung *iii*) zu

$$v(r'r) = (vr')r$$

Falls R eine K-Algebra ist, ist der Modul offensichtlich auch ein Vektorraum. (Man muss die Multiplikation nur auf K einschränken)

Definition 24 (Bi-Modul)**.** Für zwei Ringe R, S heißt V ein R-S-Bimodul, falls es ein R-Linksmodul und ein S-Rechtsmodul ist und diese Multiplikationen miteinander verträglich sind, d.h. $\forall r \in R,\ s \in S\ v \in V$ gilt

$$(rv)s = r(vs)$$

[3]

$\mathbb{Z}$ operiert auf jeder Abelschen Gruppe (also auch jedem Modul) mit

$$\cdot\, \mathbb{Z} \times V \to V : (z, v) \to zv = \sum_{i=1}^{z} v$$

Diese Skalarmultiplikation kann sowohl als Rechts-, als auch als Linksmultiplikation aufgefasst werden und ist mit jeder anderen Skalarmultiplikation verträglich.
Z.B. ist ein R-Linksmodul automatisch ein R-$\mathbb{Z}$-Bimodul.
Das Prinzip der Bimodule ist allerdings vor allem dann wichtig, wenn man mit Tensorprodukten arbeiten möchte.
Fürs Erste genügen einfache Linksmodule, die wir auch einfach nur Module nennen.

Lemma 7. Die Module von $\mathbb{C}[G]$ entsprechen gerade den Darstellungen von G.
Dies bedeutet folgendes:
Wenn wir ein Modul V von $\mathbb{C}[G]$ haben, können wir für jedes $g \in G$ die Abbildung $p_g : V \to V :\ v \mapsto gv$ definierten. Wegen den Eigenschaften von Modulen und Algebren ist p_g ein linearer Isomorphismus und es gilt

$$p_h p_g v = p_h(gv) = h(gv) = (hg)v = p_{hg} v$$

Deshalb ist

$$p :\ G \to \mathrm{GL}(V) : g \mapsto p_g$$

eine Darstellung.
Auf der anderen Seite definieren wir für jede Darstellung p die Multiplikation

$$\cdot\, \mathbb{C}[G] \times V \to V : (\sum_{g \in G} \lambda_g g, v) \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g p_g v$$

Man sieht leicht, dass diese die Eigenschaften $i), ii), iii)$ erfüllt und V daher zu einem Modul macht.
Diese Zuordnungen sind zueinander invers und zeigen, dass jedes Modul gerade einer Darstellung entspricht. Es wurde nur die Multiplikation auf Linearkombinationen erweitert.
Im Folgenden werden wir deshalb nicht mehr wirklich zwischen Modulen und Darstellungen unterscheiden.

Darstellung als Matrixprodukt

Satz 15 (Einbettung in Matrixprodukt)**.** Sei G eine Gruppe und seien $p_1, \dots, p_k$ die verschiedenen irred. Darstellungen. Es ist $\bigoplus_{i=1}^k \mathrm{GL}(V_i)$ das direkte Produkt der Algebren. Dann ist

$$\psi : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{GL}(V_i) : \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \left(\sum_{g \in G} \lambda_g p_1(g), \dots, \sum_{g \in G} \lambda_g p_n(g) \right)$$

ein Algebren-Isomorphismus [1][S.48]

Beweis. Wie in Satz [10] gezeigt wurde gilt:

$$\mathbb{C}^G = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{n_i} V_{ij}$$

Wobei alle V_{ij_1}, V_{ij_2} als Darstellungen isomorph sind. Dann gibt es einen Isomorphismus $f_{j_1 j_2}$, der erfüllt:

$$f_{j_1 j_2} \circ p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{ij_1}} = p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{ij_2}} \circ f_{j_1 j_2}$$

Wir definieren

$$f_2 : A_{\mathrm{reg}} \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{GL}(V_i) : \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) \mapsto \left(\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{11}}, \dots, \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{k1}} \right)$$

Angenommen es gibt $\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)$ mit $f_2(\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)) = 0$, dann folgt

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{i1}} = 0$$

Deshalb gilt für alle $v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} \in \mathbb{C}^G$

$$\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) v = \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} = \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) f_{1j}^{-1} f_{1j} v_{ij} =$$

$$= \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_g f_{1j}^{-1} p_{\mathrm{reg}}(g) f_{1j} v_{ij} \overset{f_{1j} v_{ij} \in V_{i1}}{=} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_g f_{1j}^{-1} 0 = 0$$

Damit war $\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) = 0$ und wir erhalten:

$$\mathrm{Kern}(f_2) = \{0\}$$

Wegen Satz[9] gilt

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{GL}(V_i) \right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{GL}(V_i)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V_i)^2 = \#G = \dim(\mathbb{C}^G)$$

Also ist f_2 ein Isomorphismus.
Da wie z.B. am Anfang des Kapitels schon besprochen

$$f : A_{\mathrm{reg}}(= \mathrm{span}(p_{\mathrm{reg}}(G))) \to \mathbb{C}[G] : \sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g) \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

ein Isomorphismus ist, ist $f_2 \circ f^{-1}$ ein Isomorphismus. Es gilt

$$f_2 \circ f^{-1} : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{GL}(V_i) : \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \left(\sum_{g \in G} \lambda_g p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{11}}, \ldots, \sum_{g \in G} p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{k1}} \right)$$

Da $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \exists \varphi_i$ invertierbar : $\varphi_i p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{i1}} = p_i \varphi_i$ gilt, ist

$$\psi : \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{GL}(V_i) : \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \left(\sum_{g \in G} \lambda_g p_1(g), \ldots, \sum_{g \in G} \lambda_g p_n(g) \right) =$$

$$= \left(\sum_{g \in G} \lambda_g \varphi_1 p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{11}}(g) \varphi_1^{-1}, \ldots, \sum_{g \in G} \lambda_g \varphi_k p_{\mathrm{reg}}(g)_{|V_{k1}} \varphi_k^{-1} \right)$$

ein Isomorphismus. □

Definition 25 (Lineare Funktionen und Isomorphismen von Modulen)**.** Diese sind analog definiert, wie bei den Vektorräumen:
$f : V \to W$ heißt linear, falls gilt:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

ii) $f(rx_1) = rf(x_1)$

Falls es sich um Bimodule handelt, muss man Skalare auch von der anderen Seite herausziehen können.
R-Module V, W sind isomorph, falls es eine bijektive lineare Abbildung f zwischen ihnen gibt. So ein f wird dann Isomorphismus genannt. Man sieht leicht, dass f^{-1} auch ein Isomorphismus ist.

Man sieht auch schnell, dass zwei Darstellungen genau dann isomorph sind, wenn es die ihnen entsprechenden Module sind. Die Darstellungsisomorphismen entsprechen nämlich den Modulisomorphismen.

Die Gruppenalgebra ist ein nützliches Werkzeug bei der weiteren Untersuchung von Darstellungen. Man kann damit zum Beispiel beweisen, dass die Dimension einer irred. Darstellung die Mächtigkeit der Gruppe teilt. [1][S.54]

Insbesondere ist sie auch nützlich, um sogenannte „Induzierte Darstellungen" elegant zu beschreiben.

4.2 Induzierte Darstellungen

Definition 26 (Induzierte Darstellung)**.** Sei $p : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung, $H < G$ eine Untergruppe und $W \subseteq V$ in H-invarianter Unterraum. V heißt induziert durch die Darstellung W von H, falls für ein Vertretersystem R von G/H gilt:

$$V = \bigoplus_{r \in R} p_r W$$

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass sich die Module von $\mathbb{C}[G]$ und die Darstellungen von G entsprechen. Deshalb kann man V als $\mathbb{C}[G]$-Modul auffassen und die „Induzierte Darstellungen" analog für $\mathbb{C}[G]$-Module definieren: V heißt induziert durch das Modul/die Darstellung W von H, falls für ein Vertretersystem R von G/H gilt:

$$V = \bigoplus_{r \in R} rW$$

[1][S.28]

Wegen $ghW = g(hW) = gW$ sieht man, dass die Wahl des Vertretersystems R keine Rolle spielt.

Beispiel 27. Die reguläre Darstellung wird von $\mathrm{span}(e_e)$, welches man als Darstellung von $\{e\}$ auffasst, induziert.

Satz 16 (Existenz und Eindeutigkeit)**.** Zu jeder Darstellung W einer Untergruppe H von G gibt es eine induzierte Darstellung V. Diese Darstellung ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass es zu jedem $g \in G$ eindeutig bestimmte $r(g) \in R, h(g) \in H$ mit $g = r(g)h(g)$ gibt. Wenn V von W induziert sein soll, muss gelten

$$V = \bigoplus_{r \in R} rW$$

V ist also die formale Summe der rW. Zudem ist die Multiplikation mit g schon eindeutig festgelegt:

$$g(\sum_{r \in R} rw_r) = \sum_{r \in R} grw_r = \sum_{r \in R} r(gr)h(gr)w_r = \sum_{r \in R} r(gr)(h(gr)w_r)$$

Es muss nur noch gezeigt werden, dass die Darstellung, welche durch die so definierte Multiplikation festlegt ist, wohldefiniert ist. Tatsächlich ist

$$g\cdot : \bigoplus_{r \in R} rW \to \bigoplus_{r \in R} rW : \sum_{r \in R} rw_r \mapsto \sum_{r \in R} r(gr)(h(gr)w_r)$$

linear. Man muss nur noch zeigen, dass sich die Multiplikation mit der Gruppenmultiplikation verträgt. Also $(g'\cdot) \circ (g\cdot) = g'g\cdot$

$$g' \left(g \sum_{r \in R} rw_r \right) = g' \left(\sum_{r \in R} r(gr) \cdot h(gr)w_r \right) = \sum_{r \in R} r(g'r(gr)) \cdot h(g'r(gr))h(gr)w_r$$

Wegen

$$g'gr = g'r(gr)h(gr) = r(g'r(gr)) \cdot h(g'r(gr))h(gr)$$

gilt

$$g'g \left(\sum_{r \in R} rw_r \right) = \sum_{r \in R} r(g'r(gr)) \cdot h(g'r(gr))h(gr)w_r = g' \left(g \sum_{r \in R} rw_r \right)$$

□

Man kann die Induzierte Darstellung aber auch umformulieren:

Satz 17. Sei V durch die Darstellung W von H induziert. Dann ist V als Modul/Darstellung isomorph zu:

$$\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

[1][S.54]

Beweis. V, W sind $\mathbb{C}[G]$, bzw. $\mathbb{C}[H]$-Module, daher sind sie auch $\mathbb{C}[G]$-$\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{C}[H]$-$\mathbb{Z}$-Bimodule. Wegen der Isomorphie von Tensorprodukten reicht es zu zeigen, dass $V = \sum_{r \in R} rW$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[G] \times W \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\phi"'] & V \arrow[d, "\exists! \varphi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Dazu definieren wir

$$\theta : \mathbb{C}[G] \times W \to V : (\sum_{g \in G} \lambda_g g, w) \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g g w$$

Man rechnet nach, dass es bilinear ist.
Sei $\phi : \mathbb{C}[G] \times W \to X$ bilinear. Für eine lineare Funktion $\varphi : V \to X$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \theta = \phi &\Leftrightarrow \\
\forall \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{C}[G], w \in W : \varphi(\sum_{g \in G} \lambda_g g w) = \phi(\sum_{g \in G} \lambda_g g, w) &\overset{\text{bi/linearität}}{\Leftrightarrow} \\
\forall \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{C}[G], w \in W : \sum_{g \in G} \lambda_g g \varphi(w) = \sum_{g \in G} \lambda_g g \phi(1, w) &\Leftrightarrow \\
\forall w \in W : \varphi(w) = \phi(1, w) &\Leftrightarrow \\
\forall \sum_{r \in R} r w_r \in V : \varphi(\sum_{r \in R} r w_r) = \sum_{r \in R} r \phi(1, w_r)&
\end{aligned}$$

φ ist also die eindeutig bestimmte, wohldefinierte lineare Abbildung

$$\varphi : V \to X : \sum_{r \in R} r w_r \mapsto \sum_{r \in R} r \phi(1, w_r)$$

□

Korollar 4. Seien W, V, U Darstellungen von $H < G < K$, sei V von W induziert und U von V, dann ist auch U von W induziert.

Beweis.

$$U = \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} (\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W) = (\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

$(\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \cong \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ erfüllt aber die universelle Eigenschaft. □

5 Anhang

Sei R ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring

Definition

Sei U ein S_1-R-Bimodul , V ein R-S_2-Bimodul

Bilineare Abbildung

Sei X ein S_1-S_2-Bimodul

$\phi : U \times V \mapsto X$ heißt bilinear, falls gilt:

i) $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v), \quad \phi(u, v_1 + v_2) = \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2)$

ii) $\phi(ur, v) = \phi(u, rv)$

iii) $\phi(s_1 u, v s_2) = s_1 \phi(u, v) s_2$

Wobei $u, u_1, u_2 \in U,\ v, v_1, v_2 \in V,\ r \in R\ s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ beliebig sind.

Universelle Eigenschaft

Sei T ein S_1-S_2-Bimodul, T erfüllt die **universelle Eigenschaft** des Tensorprodukts, wenn es eine bilineare Abbildung $\theta : U \times V \mapsto T$ gibt, sodass gilt

$$\forall \phi : U \times V \to X \text{ bilinear } \exists! \varphi : T \to X \text{ linear} : \phi = \varphi \circ \theta$$

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, "\exists! \varphi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Satz 18. Wenn $(T_1, \theta_1), (T_2, \theta_2)$ beide die universelle Eigenschaft erfüllen, dann sind sie isomorph (als S_1-S_2-Bimodul).

Beweis. θ_1, θ_2 sind beide bilinear. Wenn man auf die bilineare Abbildung die universelle Eigenschaft der jeweils anderen anwendet, erhält man:

$$\exists! \varphi_1 : T_1 \to T_2 \text{ linear}, \varphi_2 : T_2 \to T_1 \text{ linear} : \quad \theta_2 = \varphi_1 \circ \theta_1 \ \wedge \ \theta_1 = \varphi_2 \circ \theta_2$$

Wenn man die zweite Gleichung in die erste Gleichung einsetzt und andererseits die erste Gleichung in die zweite Gleichung einsetzt, erhält man:

$$\theta_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \theta_2 \ \wedge \ \theta_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \theta_1$$

Mit $\theta_2 = \mathrm{id}_{T_2} \circ \theta_2 \ \wedge \ \theta_1 = \mathrm{id}_{T_1} \circ \theta_1$ und der universellen Eigenschaft gilt:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{T_2} \wedge \ \varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_{T_1}$$

Deshalb sind die Funktionen φ_1, φ_2 zu einander invers und daher Isomorphismen. □

Konstruktion Tensorprodukt

Es bezeichne A das freie $\mathbb{Z}$-Modul, welches von der Basis $U \times V$ aufgespannt wird. Formal ist A die direkte Summe:

$$A := \bigoplus_{U \times V} \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}^{U \times V}$$

Für $u \in U,\ v \in V$ bezeichnen wir mit $(u \mid v)$ das zu (u, v) gehörige Basiselement, d.h. $\forall x \in U \times V$

$$(u \mid v)_x := \begin{cases} 1 & x = (u, v) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei B das Submodul von A, welches von folgenden Elementen erzeugt wird:

i) $(u_1 + u_2 \mid v) - (u_1 \mid v) - (u_2 \mid v), \quad (u \mid v_1 + v_2) - (u \mid v_1) - (u \mid v_2)$

ii) $(ur \mid v) - (u \mid rv)$

Wobei $u, u_1, u_2 \in U,\ v, v_1, v_2 \in V,\ r \in R$ beliebig sind.

Wir definieren $U \otimes_R V := A/B$
und $\otimes_R : U \times V \to U \otimes_R V : \ (u, v) \mapsto (u \mid v) + B$ ist offensichtlich bilinear.
$S_1 \times A$ ist mit der folgenden Verknüpfung ausgestattet:

$$- \cdot - : \ S_1 \times (A = \bigoplus_{U \times V} \mathbb{Z}) \ \to (A = \bigoplus_{U \times V} \mathbb{Z}) : \ \left(s, \sum_{i=1}^{n} (u_i \mid v_i)\right) \ \mapsto \ \sum_{i=1}^{n} (su_i \mid v_i)$$

Die Verknüpfung ist additiv in der zweiten Komponente und erfüllt

$$(\hat{s}_1 \cdot -) \circ (s_1 \cdot -) = \hat{s}_1 s_1 \cdot -$$

Da zudem $\forall s_1 \in S_1 : \ s_1 \cdot B \subseteq B$ gilt, ist

$$- \cdot - : \ S_1 \times U \otimes_R V \ \to U \otimes_R V : \ \left(s, \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_R v_i\right) \ \mapsto \ \sum_{i=1}^{n} su_i \otimes_R v_i$$

wohldefiniert. Es gilt zudem

$$(\hat{s}_1 + s_1) \cdot (u \otimes v) = ((\hat{s}_1 + s_1)u) \otimes v = (\hat{s}_1 u + s_1 u) \otimes v = \hat{s}_1 u \otimes v + s_1 u \otimes v$$

$- \cdot -$ ist also auch additiv in der 1-ten Komponente und macht $U \otimes_R V$ daher zum S_1-Linksmodul.

Da V ein S_2-Rechtsmodul ist, kann man analog $U \otimes_R V$ zu einem S_2-Rechtsmodul machen. Man kann dann nachrechnen:

$$\left(s_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_R v_i\right) \cdot s_2 = \sum_{i=1}^{n} s_1 u_i \otimes_R v_i s_2 = s_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_R v_i \cdot s_2\right)$$

Daher ist $U \otimes_R V$ ein S_1-S_2-Bimodul

Satz 19. $U \otimes_R V$ erfüllt mit $\otimes_R$ die universelle Eigenschaft

Beweis. Sei $\phi : U \times V \to X$ eine bilineare Abbildung.

Existenz:

$$\varphi' : A \to X : \sum_{i=0}^{n} (u_i, v_i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \phi(u_i, v_i)$$

Da man leicht nachrechnet, dass

$$\forall b \in B : \varphi'(b) = 0$$

ist die Abbildung

$$\varphi : U \otimes V \to X : \sum_{i=0}^{n} u_i \otimes_R v_i = \left(\sum_{i=0}^{n} (u_i \mid v_i)\right) + U \mapsto \sum_{i=0}^{n} \phi(u_i, v_i)$$

wohldefiniert und es gilt

$$\forall (u, v) \in U \times V : \varphi \circ \otimes_R((u, v)) = \varphi(u \otimes_R v) = \phi(u, v)$$

Also $\phi \circ \otimes_R = \varphi$
Es gilt auch

$$\varphi(s_1 \cdot u \otimes v \cdot s_2) = \varphi(s_1 u \otimes v s_2) = \phi(s_1 u, v s_2) = s_1 \phi(u, v) s_2 = s_1 \varphi(u \otimes v) s_2$$

φ ist dann auch linear.

Eindeutigkeit:
Sei ϕ_2 linear mit $\phi_2 \circ \otimes_R = \varphi$, dann gilt wegen der Linearität

$$\varphi_2 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_R v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(u_i \otimes_R v_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i, v_i) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_R v_i\right)$$

Damit $\phi_2 = \phi$ $\square$

Assoziativität

Analog zur Bilinearform kann man für $n \in \mathbb{N}$, Ringe $R_0, \ldots, R_n$ Bimodule $V_1, \ldots, V_n$ (V_i ist R_{i-1}-R_i-Bimodul) den Begriff der n-Linearform definieren.

Dann gibt es wieder ein Tensorprodukt T , also ein R_0-R_n-Bimodul, welches die universelle Eigenschaft:

$$\exists \theta : V_1 \times \ldots \times V_n \to T \ n\text{-linear} \ \forall \phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to X \ n\text{-linear} \ \exists! \varphi : T \to X \text{ linear} : \phi = \varphi \circ \theta$$

erfüllt.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, "\exists!\varphi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Satz 20. Seien $R_0, \ldots, R_3$ Ringe, U ein R_0-R_1-Bimodul, V ein R_1-R_2-Bimodul, W ein R_2-R_3-Bimodul

$$\theta : U \times V \times W \to U \otimes_{R_1} (V \otimes_{R_2} W) \; : (u, v, w) \mapsto u \otimes_{R_1} (v \otimes_{R_2} w)$$

Dann erfüllt $(U \otimes_{R_1} (V \otimes_{R_2} W), \theta)$ die universelle Eigenschaft.

Beweis. Sei X ein R_0-R_3 Bimodul. $\phi : U \times V \times W \mapsto X$ 3-linear

Eindeutigkeit:
Sei $\varphi : U \otimes_{R_1} (V \otimes_{R_2} W) \to X$ linear mit $\phi = \varphi \circ \theta$
Für jedes Element $t \in U \otimes_{R_1} (V \otimes_{R_2} W)$ gilt

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \{1, \ldots, m\} \exists u_k, v_{k1}, \ldots v_{km_k}, w_{k1}, \ldots w_{km_k} \; :$$
$$t = \sum_{k=1}^{m} u_k \otimes_{R_1} \left(\sum_{i=1}^{m_k} v_{ki} \otimes_{R_2} w_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} u_k \otimes_{R_1} (v_{ki} \otimes_{R_2} w_{ki})$$

Deshalb lässt sich jedes Element $t \in U \otimes_{R_1} (V \otimes_{R_2} W)$ als

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_{R_1} (v_i \otimes_{R_2} w_i)$$

schreiben. Es gilt

$$\varphi(t) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \varphi(u_i \otimes_{R_1} (v_i \otimes_{R_2} w_i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi \circ \theta((u_i, v_i, w_i)) = \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i, v_i, w_i)$$

$\varphi(t)$ ist also schon eindeutig bestimmt.

Existenz:
Sei $U_X := \{f : U \to X \mid \forall u_1, u_2 \in U, r_0 \in R_0 : f(r_0 u_1 + u_2) = r_0 f(u_1) + f(u_2)\}$. Die Multiplikation

$$- \cdot - \cdot - : R_1 \times U_X \times R_3 \to U_X \; : (r_1, f, r_3) \mapsto (u \to f(u r_1) r_3)$$

macht U_X zu einem R_1-R_3-Bimodul.

$$\phi_1 : V \times W \to U_X : \; (v, w) \mapsto (u \to \phi(u, v, w))$$

ist bilinear. Wegen der universellen Eigenschaft von $V \otimes W$ gilt

$$\exists! \varphi_1 : \; V \otimes_{R_2} W \to U_X \text{ linear} : \phi_1 = \varphi_1 \circ \otimes_{R_2}$$

Wir definierten die Funktion

$$\phi_2 : U \times (V \otimes_{R_2} W) \to X : \; (u, t) \mapsto \varphi_1(t)(u)$$

Wegen

i) $\phi_2(u_1+u_2,t)=\varphi_1(t)(u_1+u_2)=\varphi_1(t)(u_1)+\varphi_1(t)(u_2)=\phi_2(u_1,t)+\phi_2(u_2,t)$,
$\phi_2(u,t_1+t_2)=\varphi_1(t_1+t_2)(u)=\varphi_1(t_1)(u)+\varphi_1(t_2)(u)=\phi_2(u,t_1)+\phi_2(u,t_2)$

ii) $\phi_2(ur_1,t)=\varphi_1(t)(ur_1)=(r_1\varphi_1(t))(u)=\varphi_1(r_1t)(u)=\varphi_1(r_1t)(u)=\phi_2(u,r_1t)$

iii) $\phi_2(r_0u,tr_3) = \varphi_1(tr_3)(r_0u) = (\varphi_1(t)r_3)(r_0u) = \varphi_1(t)(r_0u)r_3 \overset{\varphi_1(t)\in U_X}{=} r_0\varphi_1(t)(u)r_3 = r_0\phi_2(u,t)r_3$

ist ϕ_2 bilinear. Daher gilt wieder

$$\exists!\varphi_2 : U\otimes_{R_1}(V\otimes_{R_2}W)\to U_X \text{ linear} : \phi_2=\varphi_2\circ\otimes_{R_1}$$

$\forall u\in U, v\in V, w\in W$:

$$\begin{aligned}\varphi_2(u\otimes_{R_1}(v\otimes_{R_2}w))=\phi_2(u,v\otimes_{R_2}w)=\varphi_1(v\otimes_{R_2}w)(u)=\phi_1(v,w)(u)=\\ =(u\mapsto\phi(u,v,w))\,(u)=\phi(u,v,w)\end{aligned}$$

Es gilt also $\phi=\varphi_2\circ\theta$
Also erfüllt φ_2 die gewünschte Eigenschaft. □

$$\theta' : U\times V\times W\to(U\otimes_{R_1}V)\otimes_{R_2}W \ : (u,v,w)\mapsto(u\otimes_{R_1}v)\otimes_{R_2}w$$

Man kann analog zeigen, dass dann $((U\otimes_{R_1}V)\otimes_{R_2}W,\theta')$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

Da sie beide die universelle Eigenschaft erfüllen, sind $U\otimes_{R_1}(V\otimes_{R_2}W)$, $(U\otimes_{R_1}V)\otimes_{R_2}W$ isomorph.

Literaturverzeichnis

[1] Jean-Pierre Serre:*Linear Representations of Finite Groups*, Springer Verlag, New York, 1977.

[2] Ed Segal:*Group Representation Theory*, http://www.homepages.ucl.ac.uk/ ucaheps/, abgerufen am: 25.11.2021.

[3] Wikipedia:*Moduln*, https://de.wikipedia.org/wiki/Modul_(Mathematik)#Bimoduln, Abgerufen am: 17.01,2022

[4] Fabian Januszewski:*Darstellungstheorie endlicher Gruppen* ,https://www.math.kit.edu/iag3/lehre/degruppen2015s/de , abgerufen am: 16.02,2022

[5] Netzer Tim:*Algebra*, https://lms.uibk.ac.at/auth/RepositoryEntry/4651352184/CourseNode/10131967502 abgerufen am: 17.01,2022.