



Institut für Mathematik

Algebraische Topologie

Tim Netzer



AyqE9-zA
A-9EbYAA



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen der Topologie	3
1.1 Grundlegende Definitionen	3
1.2 Konstruktionen	5
1.3 Kompaktheit	11
1.4 Zusammenhang	13
1.5 Kategorientheorie	15
2 Homotopie und Fundamentalgruppe	19
2.1 Homotopie	19
2.2 Die Fundamentalgruppe	24
2.3 Die Fundamentalgruppe des Kreises	29
3 Homologietheorie	35
3.1 Homologie für abstrakte Simplizialkomplexe	35
3.2 Axiomatische Homologietheorie	46
3.3 Konstruktion der Singulären Homologie	56
Literaturverzeichnis	63
Übungsaufgaben	65

Einleitung

Topologie ist ein Teilbereich der Mathematik, der sich mit gewissen *räumlichen Strukturen* befasst. Der Begriffe der Räumlichkeit ist hier aber sehr schwach gefasst. Man spricht nicht wie in der Geometrie über Größe, Winkel, Abstände etc..., sondern verwendet nur einen qualitativen Begriffe von *räumlicher Nähe*. Das genügt aber, um beispielsweise über Konvergenz und Stetigkeit zu sprechen. Obwohl, oder vielleicht gerade weil der Begriff eines topologischen Raums so allgemein ist, findet er in fast allen Bereichen der Mathematik Anwendung.

Wie in der Mathematik üblich, versucht man die zu untersuchenden Objekte möglichst vollständig bis auf Isomorphie zu klassifizieren. Ein Isomorphismus wird in der Topologie übrigens auch *Homöomorphismus* genannt; es handelt sich um eine bijektive und in beide Richtungen stetige Abbildung. Dieser Begriff drückt aus, dass sich die Räume durch eine Verformung ineinander überführen lassen, die vielleicht Größe und Winkel ändert, nicht jedoch die durch die Topologie definierte Nahebeziehung von Punkten. Ein Raum darf dabei also (anschaulich formuliert) nicht aufgerissen oder irgendwo zusammengeklebt werden. Ein echt schwächerer Begriff als Homöomorphie ist *Homotopieäquivalenz* von Räumen. Hier darf bei der Verformung (wieder sehr anschaulich formuliert) auch Material vernichtet werden. Beispielsweise ist ein Ball homotopieäquivalent zu einem Punkt. Wenn zwei Räume homöomorph oder homotopieäquivalent sind, kann man das oft durch die explizite Angabe einer erlaubten Transformation (also z.B. eines Homöomorphismus) beweisen. Sind sie es nicht, ist die Sache oft schwieriger. Man kann ja gewöhnlich nicht sämtliche möglichen Abbildungen daraufhin überprüfen, ob sie Homöomorphismen sind. Man muss stattdessen Eigenschaften der Räume extrahieren, die eine Homöomorphie ausschließen. In der algebraischen Topologie ordnet man dabei den Räumen gewissen algebraischen Strukturen zu, zum Beispiel Gruppen, Vektorräume oder Moduln. Dabei werden homöomorphen Räumen isomorphe Strukturen zugeordnet. Interessanterweise kann man dann manchmal wirklich zeigen, dass die zugeordneten Strukturen nicht

isomorph sind. Damit hat man die Homöomorphie widerlegt. Dieser Ansatz wird in der Vorlesung demonstriert. Im ersten Kapitel wiederholen wir die wichtigsten topologischen Begriffe und lernen einige interessante Konstruktionen kennen. Im zweiten Kapitel besprechen wir die *Fundamentalgruppe* eines topologischen Raums. Dieses anschaulich gut verständliche Konzept ist auch historisch der Beginn der algebraischen Topologie, später haben sich daraus viel abstraktere Methoden entwickelt. Ein solches Beispiel, die sogenannte *Homologietheorie*, besprechen wir dann in Kapitel 3, zunächst rein kombinatorisch für Simplizialkomplexe und dann ganz allgemein. Diese Vorlesung beruht zum Teil auf einer Vorlesung von Prof. Volker Puppe an der Universität Konstanz. Fehler gehen dabei aber natürlich auf mein Konto. Eine Liste mit einigen Büchern zum Thema der Vorlesung findet sich im Anhang.

Kapitel 1

Grundlagen der Topologie

1.1 Grundlegende Definitionen

Zuerst wiederholen wir kurz einige grundlegende Begriffe der mengentheoretischen Topologie.

Definition 1.1.1. Sei X eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X heißt **Topologie**, falls gilt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- (ii) $A_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$.

Das Paar (X, \mathcal{O}) heißt dann **topologischer Raum**, $A \in \mathcal{O}$ heißt **offene Menge** und $X \setminus A$ heißt **abgeschlossene Menge**. \triangle

Beispiel 1.1.2. (i) Es ist stets $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X , die *feinstmögliche*. Ebenso ist $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ stets eine Topologie, die *grobstmögliche*.
(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren

$$A \subseteq X \text{ offen} : \Leftrightarrow \forall a \in A \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(a) \subseteq A.$$

Dann bildet die Menge

$$\mathcal{O} = \{A \subseteq X \mid A \text{ offen}\}$$

eine Topologie auf X , die **von der Metrik induzierte Topologie**. \triangle

Definition 1.1.3. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, und $x \in U \subseteq X$.

- (i) U heißt **Umgebung von x in X** falls $A \in \mathcal{O}$ existiert mit $x \in A \subseteq U$. In diesem Fall nennt man x einen **inneren Punkt** von U .
- (ii) Die Menge \mathring{U} aller inneren Punkte von U heißt **Inneres von U** . Es ist die größte in U enthaltene offene Teilmenge von X .
- (iii) Die Menge $\overline{U} = \{x \in X \mid \text{jede Umgebung von } x \text{ schneidet } U\}$ heißt **Abchluss von U** . Es ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von U .
- (iv) Die Menge $\partial U := \overline{U} \setminus \mathring{U}$ heißt **Rand von U** .
- (v) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X **konvergiert** gegen $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x ein n_0 existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. \triangle

Definition 1.1.4. Der topologische Raum (X, \mathcal{O}) heißt **hausdorffsch**, falls für zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ offene Mengen $A, B \in \mathcal{O}$ existieren mit

$$x \in A, y \in B \text{ und } A \cap B = \emptyset. \quad \triangle$$

Beispiel 1.1.5. Metrische Räume induzieren hausdorffsche Topologien. Für $x \neq y$ gilt nämlich

$$B_{d(x,y)/3}(x) \cap B_{d(x,y)/3}(y) = \emptyset. \quad \triangle$$

In dieser Vorlesung interessieren wir uns hauptsächlich für metrische Räume. Verschiedene Metriken definieren aber oft dieselbe Topologie, und fast alle unserer Aussagen hängen nur von der Topologie ab. Das Konzept der abstrakten Topologie erlaubt es ausserdem, Konstruktionen einfacher durchzuführen als es mit metrischen Räumen oft möglich wäre.

Definition 1.1.6. Es seien (X, \mathcal{O}) und (Y, \mathcal{O}') topologische Räume sowie $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (i) f heißt **stetig**, falls für $B \in \mathcal{O}'$ stets $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$ gilt.
- (ii) f heißt **Homöomorphismus**, falls $g: Y \rightarrow X$ stetig existiert, mit

$$g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y.$$

- (iii) X und Y heißen **homöomorph** (in Zeichen $X \cong Y$), falls ein Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ existiert. \triangle

Ab sofort erwähnen wir die Topologie \mathcal{O} auf X oft gar nicht mehr und sprechen nur vom topologischen Raum X . Dabei ist natürlich trotzdem eine Topologie im Hintergrund fixiert. Meist ist es die von einer kanonischen Metrik induzierte. Außerdem sind praktisch *alle* von uns betrachteten Abbildungen stetig. Wir werden es deshalb ebenfalls nicht mehr erwähnen.

Bemerkung/Beispiel 1.1.7. (i) Sind X, Y metrische Räume, so ist die Definition von Stetigkeit einer Abbildung äquivalent zur bekannten ϵ - δ -Definition aus der Analysis (Aufgabe 1).

(ii) Homöomorphie von topologischen Räumen ist eine Äquivalenzrelation.

(iii) Es gilt beispielsweise $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ und $[0, 1] \cong [0, 2]$. Als Homöomorphismus kann man im ersten Fall eine geeignet skalierte Tangensfunktion verwenden, im zweiten Fall eine lineare Funktion.

(iv) Es gilt $[0, 1] \not\cong \mathbb{R}$ (Aufgabe 1).

(v) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ r &\mapsto e^{ir} \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus (Aufgabe 1). \triangle

Eine der Leitfragen dieser Vorlesung ist, wie man Homöomorphie von topologischen Räumen entscheiden kann. Falls ein Homöomorphismus existiert, kann man ihn gewöhnlich auch angeben. Falls keiner existiert, muss man meist auf andere Argumente zurückgreifen. Es ist beispielsweise nicht einfach zu zeigen, dass \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m für $n \neq m$ nicht homöomorph sind.

1.2 Konstruktionen

Wir besprechen nun einige interessante Konstruktionen mit topologischen Räumen, die später auch wieder aufgegriffen werden.

Definition 1.2.1. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{O}' := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y , genannt die **Teilraumtopologie**. \triangle

Bemerkung 1.2.2. (i) Die Teilraumtopologie ist die gröbste Topologie, welche die Inklusion $\iota: Y \hookrightarrow X$ stetig macht.

(ii) Eine Abbildung $f: Z \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $\iota \circ f: Z \rightarrow X$ stetig ist.

(iii) Wenn wir von Teilmengen des \mathbb{R}^n sprechen, etwa $[0, 1]$ oder

$$S^{n-1} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_2 = 1\}$$

$$D^n = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_2 \leq 1\},$$

so verstehen wir sie stets als mit der Teilraumtopologie der kanonischen Topologie des \mathbb{R}^n versehen. \triangle

Definition 1.2.3. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Sei

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

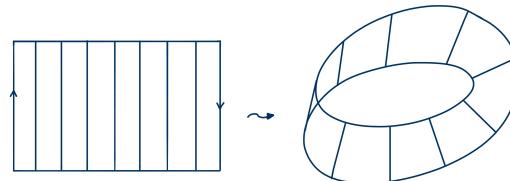
die Menge der Äquivalenzklassen und $p: X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion. Die **Quotiententopologie** \mathcal{O}' auf X/\sim ist definiert durch

$$\mathcal{O}' := \{B \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(B) \in \mathcal{O}\}. \quad \triangle$$

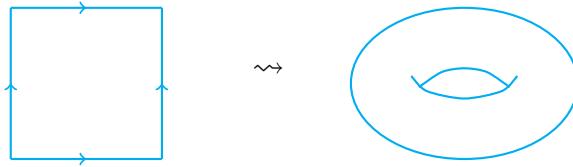
Bemerkung 1.2.4. (i) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf X/\sim , welche die Projektion p stetig macht.

(ii) Eine Abbildung $f: X/\sim \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ p: X \rightarrow Y$ stetig ist. \triangle

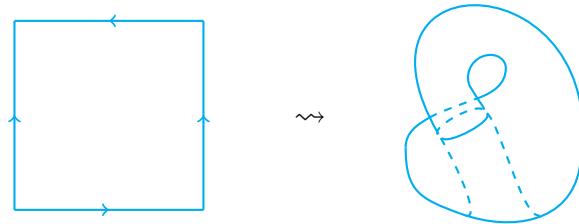
Beispiel 1.2.5. (i) Das **Möbiusband** kann man beispielsweise als Quotient definieren. Dabei identifiziert man auf einer Seite eines Rechtecks die Punkte mit Punkten auf der gegenüberliegenden Seite, gemäß folgender Orientierung:



(ii) Durch Identifikation auch der anderen Seiten anhand der folgenden Orientierung ergibt sich ein **Torus**:



(iii) Identifiziert man anhand folgender Orientierung, entsteht die **Klein'sche Flasche**, die sich allerdings in den dreidimensionalen Raum nicht ohne Überschneidungen einbetten lässt:



(iv) Identifiziert man in $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jeden Punkt mit seinem gegenüberliegenden ($x \sim -x$), so entsteht als Quotient gerade der **reelle projektive Raum**:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := S^n / \sim.$$

△

Definition 1.2.6. Seien (X, \mathcal{O}) und (Y, \mathcal{O}') topologische Räume. Auf der disjunktten Vereinigung $X \sqcup Y$ definiert man eine Topologie

$$\mathcal{O}'' := \{A \subseteq X \sqcup Y \mid A \cap X \in \mathcal{O}, A \cap Y \in \mathcal{O}'\},$$

die sogenannte **Summentopologie**.

△

Bemerkung 1.2.7. (i) Die Summentopologie ist die feinste Topologie auf $X \sqcup Y$, welche beide Inklusionen $\iota_1: X \hookrightarrow X \sqcup Y, \iota_2: Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ stetig macht.
(ii) Eine Abbildung $f: X \sqcup Y \rightarrow Z$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \iota_1: X \rightarrow Z$ und $f \circ \iota_2: Y \rightarrow Z$ stetig sind.

△

Beispiel 1.2.8. (i) Versieht man $[0, 1]$ und $[2, 3]$ jeweils mit der Teilraumtopologie von \mathbb{R} , so ist die Summentopologie wieder genau die Teilraumtopologie, die $[0, 1] \cup [2, 3]$ von \mathbb{R} erbt.

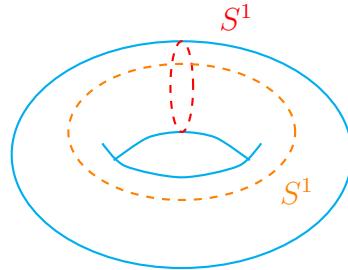
(ii) Für $[0, 1]$ und $(1, 2]$ stimmt das nicht. Beispielsweise ist die Menge $[0, 1]$ in der Summentopologie von $[0, 1] \cup (1, 2]$ offen, nicht aber in der Teilraumtopologie auf $[0, 2]$. \triangle

Definition 1.2.9. Seien (X, \mathcal{O}) und (Y, \mathcal{O}') topologische Räume. Auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ betrachten wir die Topologie \mathcal{O}'' , die von allen Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{O}, B \in \mathcal{O}'$ erzeugt wird. Es besteht \mathcal{O}'' also aus beliebigen Vereinigungen solcher Mengen. Wir nennen sie die **Produkttopologie**. \triangle

Bemerkung 1.2.10. (i) Die Produkttopologie ist die grösste Topologie, welche die beiden kanonischen Projektionen $p_1: X \times Y \rightarrow X, p_2: X \times Y \rightarrow Y$ stetig macht.
(ii) Eine Abbildung $f: Z \rightarrow X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn $p_1 \circ f: Z \rightarrow X$ und $p_2 \circ f: Z \rightarrow Y$ stetig sind. \triangle

Beispiel 1.2.11. (i) Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ entspricht genau der Standardtopologie auf \mathbb{R}^{n+m} .

(ii) Man kann den Torus beispielsweise auch als Produkt definieren: $T := S^1 \times S^1$:



\triangle

Definition 1.2.12. Sei folgendes Diagramm von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen gegeben:

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \\ & j_1 \nearrow & \\ X_0 & & \searrow j_2 \\ & & X_2 \end{array}$$

Dann heisst

$$X := (X_1 \sqcup X_2) /_{j_1(x) \sim j_2(x)}$$

das **Pushout** des Diagramms. Einbettung in die Summe und Projektion auf den Quotienten liefern folgendes kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & j_1 \nearrow & & \searrow i_1 & \\ X_0 & & & & X \\ & j_2 \searrow & & \nearrow i_2 & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

△

Bemerkung 1.2.13. Das Pushout hat folgende universelle Eigenschaft:

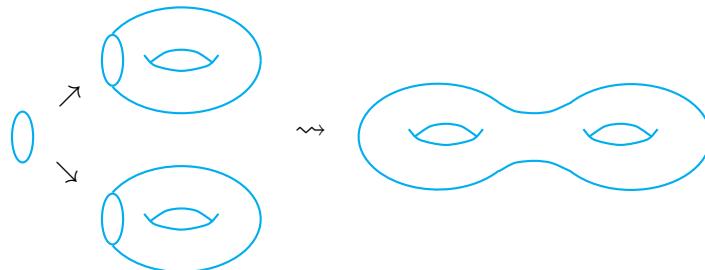
$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & j_1 \nearrow & & \searrow i_1 & \\ X_0 & & & & X \\ & j_2 \searrow & & \nearrow i_2 & \\ & & X_2 & & \end{array} \quad \begin{array}{c} f_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ X \xrightarrow{f} Y \\ \uparrow \quad \downarrow \\ f_2 \end{array}$$

Die stetigen Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ entsprechen den Paaren (f_1, f_2) stetiger Abbildungen $f_i: X_i \rightarrow Y$ mit $f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2$, vermöge der Zuordnung

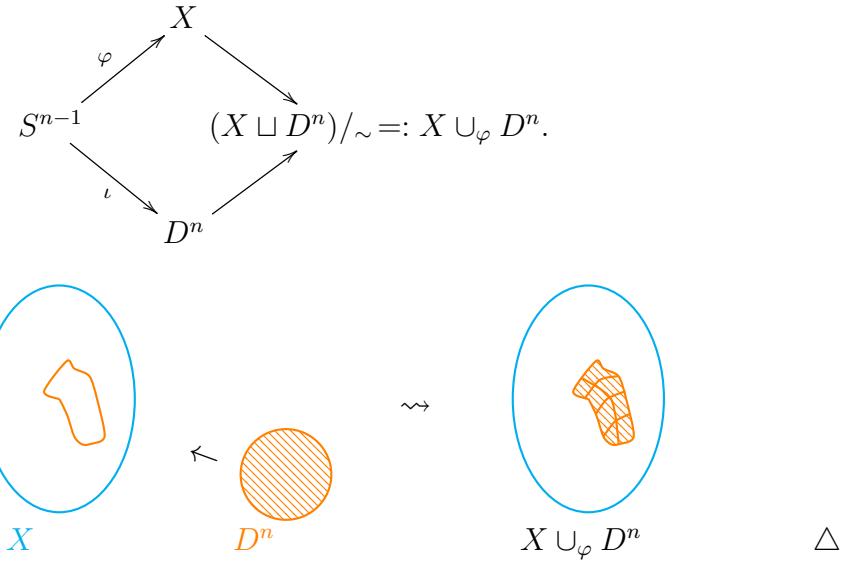
$$f \mapsto (f \circ i_1, f \circ i_2).$$

△

Beispiel 1.2.14. (i) Das **Schneiden und Zusammenkleben** von Räumen kann man als Pushout realisieren. So entsteht etwa ein Doppeltorus durch Verkleben von zwei aufgeschnittenen Tori X_1, X_2 entlang der Schnittlinie X_0 :



(ii) Auch das sogenannte **Anheften von Zellen** wird als Pushout realisiert:



Definition 1.2.15. Ein Raum, der durch Anheften endlich vieler Zellen an eine endliche Punktmenge entsteht, heißt **endlicher CW-Komplex**. \triangle

Beispiel 1.2.16. (i) Es entsteht beispielsweise die Sphäre S^{n-1} durch Anheften einer Zelle D^{n-1} an einen einzelnen Punkt. Also sind alle Sphären endliche CW-Komplexe.

(ii) Der Torus entsteht durch Anheften zweier D^1 an einen Punkt, und anschließendem geeigneten Anheften einer D^2 (Anschauungsaufgabe). \triangle

Definition 1.2.17. Sei folgendes Diagramm von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen gegeben:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & & \\
 & q_1 \searrow & \\
 & & X_0 \\
 & q_2 \nearrow & \\
 & & X_2
 \end{array}$$

Dann heißt

$$X := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid q_1(x_1) = q_2(x_2)\}$$

das **Pullback** des Diagramms. Durch Einbettung ins Produkt und Projektion auf die Komponenten entsteht ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ p_1 \nearrow & \swarrow q_1 & \\ X & & X_0 \\ p_2 \searrow & \swarrow q_2 & \\ & X_2 & \end{array}$$

△

Bemerkung 1.2.18. Das Pullback hat die folgende universelle Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & f_1 \nearrow & \swarrow p_1 & \swarrow q_1 & \\ Y & \xrightarrow{f} & X & & X_0 \\ & f_2 \searrow & \swarrow p_2 & \swarrow q_2 & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

Die stetigen Abbildungen $f: Y \rightarrow X$ entsprechen den Paaren (f_1, f_2) stetiger Abbildungen $f_i: Y \rightarrow X_i$ mit $q_1 \circ f_1 = q_2 \circ f_2$, vermöge der Zuordnung

$$f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f).$$

△

1.3 Kompaktheit

Definition 1.3.1. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **kompakt**, falls jede Überdeckung von X mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. In Formeln:

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i, A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in I : X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}. \quad \triangle$$

Beispiel 1.3.2. (i) Der \mathbb{R}^n ist nicht kompakt. Die offene Überdeckung

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{B}_n(0)$$

besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

(ii) Das Intervall $[0, 1]$ ist kompakt. Angenommen $[0, 1] = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist eine offene Überdeckung. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in [0, 1]$ ein $i \in I$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq U_i$. Ansonsten könnte man nämlich eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1]$ wählen mit

$$\left(x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n} \right) \not\subseteq U_i \text{ für alle } i \in I.$$

Diese Folge hätte aber eine konvergente Teilfolge (dafür muss man *nicht* schon die Kompaktheit des Intervalls verwenden, man kann es mit Intervallschachtelungen und der Vollständigkeit von \mathbb{R} zeigen!). Wenn also o.B.d.A. $x_n \rightarrow x \in [0, 1]$ gilt, dann gibt es aber ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U_i$ für ein $i \in I$, und damit bekommt man einen Widerspruch.

Aus der Existenz von $\epsilon > 0$ wie oben erhält man aber sofort eine endliche Teilüberdeckung für $[0, 1]$. Ein solches ϵ nennt man auch **Lebesgue-Konstante** zur gegebenen Überdeckung. \triangle

Satz 1.3.3. Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt

- (i) Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.
- (ii) Ist X hausdorffsch und A kompakt, so ist $A \subseteq X$ abgeschlossen.
- (iii) Ist X kompakt, so auch $f(X)$. Insbesondere folgt aus $X \cong Y$ dass X genau dann kompakt ist, wenn Y kompakt ist.
- (iv) X, Y kompakt $\Leftrightarrow X \sqcup Y$ kompakt.
- (v) Für $X, Y \neq \emptyset$ gilt: X, Y kompakt $\Leftrightarrow X \times Y$ kompakt.

Beweis. Aufgabe 7. \square

Satz 1.3.4 (Heine-Borel). Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$X \text{ kompakt} \Leftrightarrow X \text{ beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis. Aufgabe 8. \square

Beispiel 1.3.5. D^n und S^{n-1} sind kompakt. Insbesondere sind D^n sowie S^{n-1} nicht zu \mathbb{R}^m homöomorph. \triangle

Satz 1.3.6. Sei X kompakt, Y hausdorffsch und $f: X \hookrightarrow Y$ injektiv und stetig. Dann gilt $X \cong f(X)$.

Beweis. Aufgabe 9. \square

1.4 Zusammenhang

Definition 1.4.1. X heißt **zusammenhängend**, wenn man X nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer offener (oder abgeschlossener) Teilmengen schreiben kann. \triangle

Beispiel 1.4.2. (i) $[0, 1]$ ist zusammenhängend. Ist nämlich $[0, 1] = A \sqcup B$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen, so ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach $[0, 1]$, die höchstens 0 und 1 als Wert annimmt. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass entweder A oder B leer sein muss.

(ii) Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist $f(X)$ zusammenhängend. Insbesondere folgt aus $X \cong Y$ dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(iii) Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so auch \overline{A} (Aufgabe 10). \triangle

Definition 1.4.3. X heißt **wegzusammenhängend**, falls zu $x, y \in X$ stets eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Ein solches γ heißt (stetiger) **Weg** von x nach y . \triangle

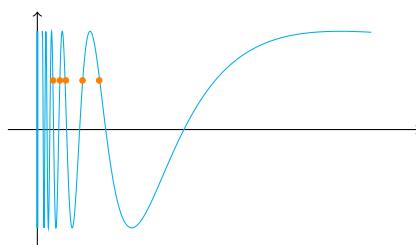
Proposition 1.4.4. Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis. Angenommen $X = A \sqcup B$ ist eine Zerlegung in nichtleere offene Mengen. Wähle $x \in A, y \in B$ und einen Weg γ von x nach y . Dann ist $\gamma^{-1}(A) \sqcup \gamma^{-1}(B)$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ in nichtleere offene Mengen, ein Widerspruch zu Beispiel 1.4.2 (i).

Betrachte nun die Menge

$$X = \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, 1/(2\pi)]\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die offensichtlich wegzusammenhängend und damit zusammenhängend ist.



Damit ist nach Beispiel 1.4.2 (iii) auch $\overline{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend. Es gibt in \overline{X} aber keinen stetigen Weg γ von $(1/(2\pi), 0)$ nach $(0, 1)$. Sonst gäbe es eine Folge $x_n \rightarrow 1$ mit $\gamma(x_n) = (*, 1/2)$, und also wäre $(0, 1) = \gamma(1) = (*, 1/2)$, ein Widerspruch. \square

Beispiel 1.4.5. (i) \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend. Dasselbe gilt auch noch für $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$, falls $n \geq 2$.

(ii) Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und X wegzusammenhängend, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend. Insbesondere folgt aus $X \cong Y$ dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(iii) $\mathbb{R}^1 \setminus \{a\}$ ist nicht (weg)zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ für $n \geq 2$ schon. Insbesondere gilt $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^n$. Dasselbe stimmt für D^1 und D^n . Ganz ähnlich erhält man $S^1 \not\cong S^n, S^1 \not\cong D^m$ für alle m und dass S^1 nicht zum Möbiusband homöomorph ist. \triangle

Definition/Lemma 1.4.6. Sei X ein topologischer Raum.

(i) Auf X ist durch folgende Setzung eine Äquivalenzrelation definiert:

$$a \sim b : \Leftrightarrow \text{es existiert in } X \text{ ein stetiger Weg von } a \text{ nach } b.$$

Eine Äquivalenzklasse nennt man dabei auch **Wegzusammenhangskomponente**. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$\pi_0(X)$$

bezeichnet.

(ii) Für jede stetige Funktion $f: X \rightarrow Y$ gilt: $a \sim b \Rightarrow f(a) \sim f(b)$. Also induziert f eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_0(f): \pi_0(X) &\rightarrow \pi_0(Y) \\ [a] &\mapsto [f(a)]. \end{aligned}$$

(iii) Für Abbildungen $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ gilt

$$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$$

sowie

$$\pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_0(X)}.$$

(iv) Für homöomorphe Räume $X \cong Y$ gibt es eine Bijektion zwischen $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$.

Beweis. Klar. □

Die Eigenschaften (i)-(iii) aus der letzten Aussage definieren einen sogenannten *Funktor* zwischen *Kategorien*. Weil es das Verständnis vieler mathematischer Konzepte deutlich verbessert, wollen wir diese Begriffe im nächsten Abschnitt kurz einführen.

1.5 Kategorientheorie

Definition 1.5.1. (i) Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus einer Klasse

$$\text{Obj}(\mathcal{C})$$

(von sogenannten **Objekten**) und für alle $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ jeweils einer Menge

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

(von sogenannten **Morphismen**), sowie einer partiellen Verknüpfung von Morphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) &\rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

welche folgenden zwei Bedingungen genügt:

(I) $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \exists \text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ mit

$$\text{id}_X \circ f = f, g \circ \text{id}_X = g$$

für alle $f \in \mathcal{C}(Y, X), g \in \mathcal{C}(X, Y)$.

(2) Für alle $f \in \mathcal{C}(W, X), g \in \mathcal{C}(X, Y), h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ii) Ein $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ heißt **Isomorphismus**, falls $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ existiert mit

$$g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y.$$

(iii) Zwei Objekte $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ heißen **isomorph** (in Zeichen $X \cong Y$), falls in $\mathcal{C}(X, Y)$ ein Isomorphismus existiert. △

Grafisch stellt man Ausschnitte aus Kategorien gewöhnlich durch (kommutative) Pfeildiagramme dar:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Beispiel 1.5.2. (i) Die **Kategorie Men der Mengen** hat als Objekte die Mengen und als Morphismen die Abbildungen, wobei die Verknüpfung gerade die Hintereinanderausführung ist. Ein Isomorphismus ist eine bijektive (also invertierbare) Abbildung, und zwei Mengen sind isomorph wenn sie die gleiche Mächtigkeit besitzen.

(ii) Die **Kategorie Top der topologischen Räume** hat als Objekte die topologischen Räume und als Morphismen die stetigen Abbildungen. Ein Isomorphismus ist gerade ein Homöomorphismus, und isomorphe Objekte sind homöomorphe Räume.

(iii) Die **Kategorie Gr der Gruppen** hat als Objekte die Gruppen und als Morphismen die Gruppen-Homomorphismen.

Ganz analog definiert man die Kategorien der Ringe, Körper, Vektorräume über einem festen Körper, Moduln über einem festen Ring, etc...

(iv) Morphismen müssen nicht immer Abbildungen sein. Sei etwa (G, \cdot) eine feste Gruppe. Wir definieren eine Kategorie \mathcal{C}_G durch

$$\text{Obj}(\mathcal{C}_G) := \{*\}$$

und

$$\mathcal{C}_G(*, *) := G.$$

Die Gruppenverknüpfung \cdot dient uns dabei als Verknüpfung von Morphismen

$$\cdot : \mathcal{C}_G(*, *) \times \mathcal{C}_G(*, *) \rightarrow \mathcal{C}_G(*, *)$$

und man überprüft leicht die Bedingungen (1) und (2). Auf diese Weise lässt sich G als eigene Kategorie auffassen. Jeder Morphismus ist hier ein Isomorphismus.

△

Definition 1.5.3. Ein **kovarianter** (bzw. **kontravarianter**) **Funktor** von der Kategorie \mathcal{C} in die Kategorie \mathcal{D} besteht aus einer Abbildung

$$\mathcal{F} : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$$

sowie Abbildungen

$$\mathcal{F}: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

$$(\text{bzw. } \mathcal{F}: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X)))$$

mit

$$(i) \quad \mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \quad (\text{bzw. } \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)).$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & Z & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ & \searrow \mathcal{F}(g \circ f) & \downarrow \mathcal{F}(g) \\ & \mathcal{F}(Z) & \end{array} \quad \triangle$$

Beispiel 1.5.4. (i) $\pi_0: \mathcal{T}\text{op} \rightarrow \mathcal{M}\text{en}$ ist ein kovarianter Funktor. Die entsprechenden Eigenschaften haben wir in Definition/Lemma 1.4.6 nachgerechnet.

(ii) Sei k ein Körper und $k\text{-Vek}$ die Kategorie der k -Vektorräume und linearen Abbildungen. Die Bildung des Dualraums ist ein kontravarianter Funktor von $k\text{-Vek}$ in sich selbst.

(iii) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der die Objekte wirklich aus Mengen und die Morphismen wirklich aus Abbildungen zwischen diesen bestehen (z.B. $\mathcal{T}\text{op}$, $\mathcal{G}\text{r}$, ...). Der **Vergiss-Funktör** ist ein kovarianter Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}\text{en}$, der einfach eine eventuelle zusätzliche Struktur auf den Objekten der Kategorie (z.B. eine Topologie, eine Gruppenstruktur,...) vergisst. Ebenso vergisst er die Tatsache, dass Morphismen eventuell sehr spezielle Abbildungen sind, und betrachtet sie einfach nur noch als Abbildungen.

(iv) Das Bilden der Koordinatenalgebra ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der affinen k -Varietäten in die Kategorie der endlich erzeugten reduzierten k -Algebren.

(v) Seien G, H Gruppen und $\mathcal{C}_G, \mathcal{C}_H$ die dazugehörigen Kategorien (siehe Beispiel 1.5.2 (iv)). Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ induziert einen kanonischen kovarianten Funktor $\mathcal{F}_\varphi: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$. Jeder solche Funktor kommt von einem Gruppenhomomorphismus. \triangle

Lemma 1.5.5. Sei $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und in \mathcal{C} gelte $X \cong Y$. Dann gilt in \mathcal{D}

$$\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. \mathcal{F} kovariant. Sei $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ein Isomorphismus mit inversem Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$. Dann gilt $g \circ f = \text{id}_X$ und nach Anwendung von \mathcal{F} also

$$\text{id}_{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{F}(\text{id}_X) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

Analog bekommt man $\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) = \text{id}_{\mathcal{F}(Y)}$ und damit $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$. \square

Zum Abschluss des ersten Kapitels nun nochmal eine kurze Reflexion. Unser Hauptziel ist, die Homöomorphie von topologischen Räumen zu entscheiden. Falls zwei Räume homöomorph sind, findet man gewöhnlich früher oder später einen Homöomorphismus und hat die Frage damit entschieden. Schwieriger ist die Sache, wenn die Räume nicht homöomorph sind. Man muss dann Eigenschaften finden, in denen sich die Räume unterscheiden und die eine Homöomorphie ausschließen. Ein Beispiel dafür ist Kompaktheit, siehe dazu Satz 1.3.3 (iii). Ein weiteres Kriterium ist (Weg-)Zusammenhang. Etwas konzeptioneller haben wir das mit dem Funktor π_0 formuliert:

$$X \cong Y \Rightarrow \pi_0(X) \cong \pi_0(Y).$$

Sind umgekehrt $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ nicht isomorph (in der Kategorie der Mengen), so können X und Y nicht homöomorph gewesen sein. Dabei kann man in X und Y auch noch endlich viele Punkte entfernen, denn wenn $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus ist, so ist

$$f: X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

ebenfalls ein Homöomorphismus. Mit Hilfe von π_0 konnten wir so zum Beispiel

$$\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^n \text{ für } n \geq 2$$

zeigen. Weiter kommt man damit aber nicht. Die Idee ist nun, ein höher-dimensionales Analogon zu π_0 zu konstruieren. Das ist zunächst die sogenannte *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X)$, welche uns dann $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ beweisen lässt. Das ist der Inhalt von Kapitel 2. Darauf aufbauend hat sich dann die *Homologietheorie* entwickelt, welche die Konstruktionen auf alle Dimensionen verallgemeinert. Das ist Inhalt von Kapitel 3.

Kapitel 2

Homotopie und Fundamentalgruppe

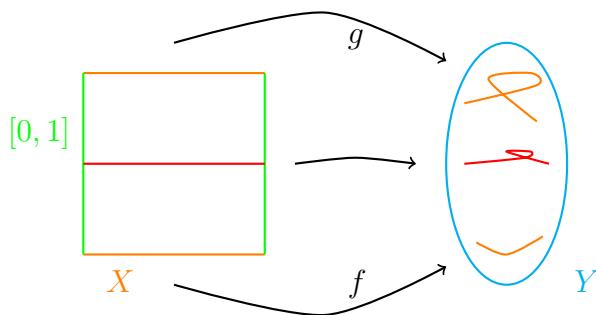
2.1 Homotopie

Eine Homotopie ist eine stetige Deformation von einer stetigen Abbildung zu einer anderen:

Definition 2.1.1. (i) Seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. Eine **Homotopie** von f nach g ist eine stetige Abbildung

$$h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$.



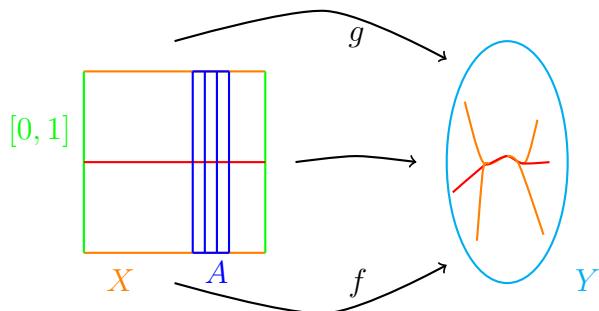
(ii) Zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow X$ heißen **homotop**, wenn es eine Homotopie h zwischen ihnen gibt. Wir notieren das durch

$$f \simeq g \quad \text{oder} \quad f \underset{h}{\simeq} g.$$

(iii) Gilt für eine Teilmenge $A \subseteq X$ bereits $f|_A = g|_A$, so heißen f und g **homotop relativ A** , falls eine Homotopie h existiert mit

$$h(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A, t \in [0, 1].$$

Wir notieren das mit $f \xrightarrow[A]{h} g$.



△

Bemerkung 2.1.2. (i) Man überlegt sich leicht, dass Homotopie von Abbildungen eine Äquivalenzrelation auf $\text{Top}(X, Y)$ ist.

(ii) Falls $f_1, g_1: X \rightarrow Y$ und $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $f_1 \simeq g_1, f_2 \simeq g_2$ sind, so gilt (Aufgabe 13):

$$(f_2 \circ f_1) \simeq (g_2 \circ g_1).$$

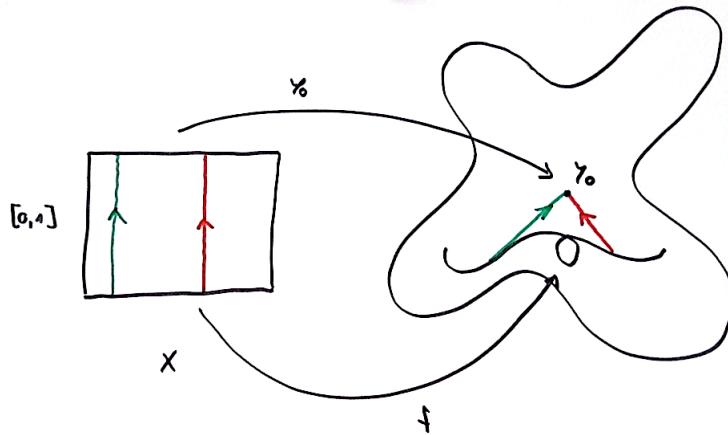
△

Beispiel 2.1.3. (i) Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls ein $y_0 \in Y$ existiert mit

$$ty_0 + (1 - t)y \in Y \quad \forall y \in Y, t \in [0, 1].$$

Ein Spezialfall davon ist natürlich eine konvexe Menge. Ist Y nun sternförmig, so ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $x \mapsto y_0$. Man erhält eine Homotopie durch die Formel

$$h(x, t) = ty_0 + (1 - t)f(x).$$



Insbesondere sind je zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ homotop.

(ii) Seien $x, y \in X$ sowie

$$\begin{array}{ll} f: \{\ast\} \rightarrow X & g: \{\ast\} \mapsto X \\ \ast \mapsto x & \ast \mapsto y. \end{array}$$

Dann ist eine Homotopie von f und g nichts anderes als ein stetiger Weg in X von x nach y . Insbesondere könnte man $\pi_0(X)$ als Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $f: \{\ast\} \rightarrow X$ definieren.

(iii) Anschaulich sollte folgendes klar sein (ein exakter Beweis folgt später): Hat eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Loch, so ist die Abbildung, die $[0, 1]$ einmal um das Loch herumwickelt nicht homotop zu einer konstanten Abbildung. \triangle

Definition 2.1.4. Seien X, Y topologische Räume.

(i) X und Y heißen **homotopieäquivalent**, falls es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ gibt mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X, \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

Wir notieren das durch

$$X \simeq Y.$$

Die Abbildungen f und g heißen dann **Homotopieäquivalenzen**.

(ii) X heißt **zusammenziehbar**, falls $X \simeq \{\ast\}$.

(iii) Eine Teilmenge

$$A \stackrel{\iota}{\subseteq} X$$

heißt **Retrakt**, falls es eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ gibt mit

$$r \circ \iota = \text{id}_A \quad (\text{d.h. } r|_A = \text{id}_A).$$

Ein solches r heißt **Retraktion**.

(iv) $A \subseteq X$ heißt **Deformationsretrakt**, falls eine Retraktion r existiert mit

$$\iota \circ r \simeq \text{id}_X.$$

A heißt **starker Deformationsretrakt**, falls sogar

$$\iota \circ r \stackrel{A}{\simeq} \text{id}_X.$$

△

Bemerkung 2.1.5. Anschaulich sind zwei Räume X und Y homotopieäquivalent, wenn man sie stetig ineinander umformen kann. A ist ein Deformationsretrakt von X , wenn man X stetig auf A zurückziehen kann. Werden bei der Zurückziehung die Punkte aus A nicht bewegt, ist es ein starker Deformationsretrakt. Wir veranschaulichen das durch die folgenden Beispiele. △

Bemerkung/Beispiel 2.1.6. (i) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume.

(ii) Homöomorphe Räume sind homotopieäquivalent:

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y.$$

(iii) Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so gilt insbesondere $A \simeq X$.

(iv) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. x_0 . Dann ist $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt. Die (einzig) Retraktion $r: X \rightarrow \{x_0\}$ liefert

$$\iota \circ r \stackrel{\{x_0\}}{\simeq} \text{id}_X$$

mittels der Homotopie aus Beispiel 3.1.11 (i). Insbesondere ist X zusammenhängbar. Insbesondere gilt

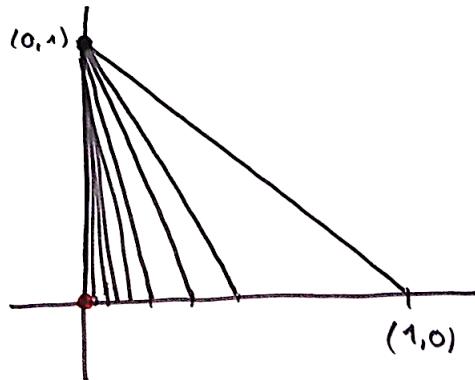
$$\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n$$

für alle Werte von m, n .

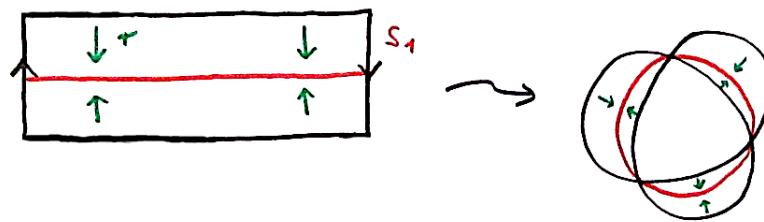
(v) Wir betrachten die Menge

$$X = \text{conv} \{(0, 1), (0, 0)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \text{conv} \{(0, 1), (1/n, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

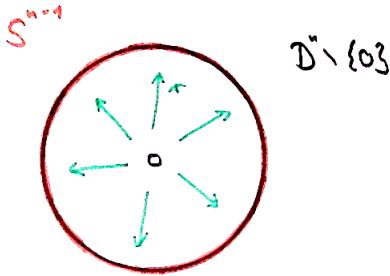
Dann ist der Punkt $(0, 1)$ ein starker Deformationsretrakt. Der Punkt $(0, 0)$ ist ein Deformationsretrakt, aber kein starker!



(vi) Sei M das Möbiusband und $S^1 \subseteq M$ in der Mitte eingebettet. Dann ist S^1 ein starker Deformationsretrakt, insbesonderer $S^1 \simeq M$. Es gilt aber $S^1 \not\cong M$, wie wir in Beispiel 1.4.5 (iii) gesehen haben.



(vii) Es ist $S^{n-1} \subseteq D^n \setminus \{0\}$ ein starker Deformationsretrakt.



Es ist allerdings S^{n-1} nicht homotopieäquivalent zu D^n , und es gibt keine Retraktion $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$. Das können wir erst später beweisen, und der Brouwer'sche Fixpunktsatz basiert darauf. \triangle

Lemma 2.1.7. Der Funktor $\pi_0: \mathcal{T}\text{op} \rightarrow \mathcal{M}\text{en}$ ist **homotopieinvariant**:

$$f, g \in \mathcal{T}\text{op}(X, Y), f \simeq g \Rightarrow \pi_0(f) = \pi_0(g).$$

Inbesondere folgt aus $X \simeq Y$ schon $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$.

Beweis. Wenn $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g ist, dann ist für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$h(x, \cdot): [0, 1] \rightarrow Y$$

ein stetiger Weg in Y von $f(x)$ nach $g(x)$. Daraus folgt

$$\pi_0(f)([x]) = [f(x)] = [g(x)] = \pi_0(g)([x]),$$

also $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Aus der Funktoreigenschaft folgt damit sofort, dass Homotopieäquivalenzen durch π_0 zur Isomorphismen werden. \square

Bei Homotopieäquivalenz ist also die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten gleich.

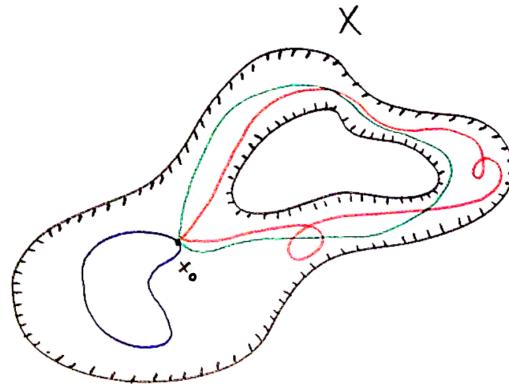
2.2 Die Fundamentalgruppe

Definition 2.2.1. Sei (X, x_0) ein topologischer Raum mit ausgewähltem Punkt (ein sogenannter *punktierter* topologischer Raum). Wir definieren

$$\pi_1(X, x_0) := \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\} / \begin{matrix} \text{Homotopie} \\ \text{relativ } \{0, 1\} \end{matrix}$$

und nennen es die **Fundamentalgruppe** von (X, x_0) . \triangle

Die Fundamentalgruppe besteht also aus Homotopieklassen von geschlossenen Wegen ab x_0 , wobei die Homotopie relativ Anfangs- und Endpunkt des Weges zu verstehen ist. Im folgenden Bild wären der rote und der grüne Weg etwa zueinander homotop, nicht aber zum blauen Weg.



Bemerkung 2.2.2. Sind $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege mit $\gamma(1) = \delta(0)$, so kann man γ und δ *hintereinanderhängen*, und erhält so einen neuen Weg $\gamma\delta$ von $\gamma(0)$ nach $\delta(1)$. Formal definiert man das so:

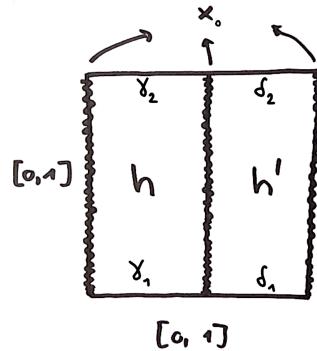
$$(\gamma\delta)(s) := \begin{cases} \gamma(2s) & s \leq 1/2 \\ \delta(2s - 1) & s \geq 1/2. \end{cases} \quad \triangle$$

Satz 2.2.3. Die Hintereinanderhängung von Wegen macht $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Wohldefiniertheit, also dass sich das Hintereinanderhängen mit Homotopie verträgt. Seien also

$$\gamma_1 \xrightarrow[h]{\sim} \gamma_2 \text{ und } \delta_1 \xrightarrow[h']{\sim} \delta_2$$

jeweils homotope Wege. Wir konstruieren daraus eine Homotopie h'' relativ $\{0, 1\}$ von $\gamma_1\delta_1$ zu $\gamma_2\delta_2$ wie folgt:



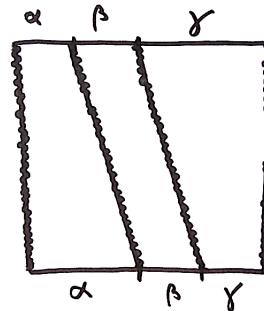
Als Formel:

$$h''(s, t) := \begin{cases} h(2s, t) & s \leq 1/2 \\ h'(2s - 1, t) & s \geq 1/2. \end{cases}$$

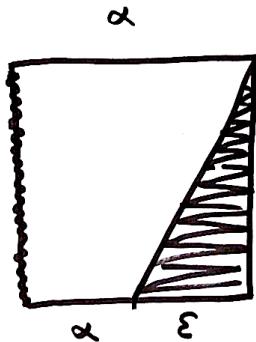
Für das Assoziativgesetz ist zu zeigen:

$$\alpha(\beta\gamma) \stackrel{\{0,1\}}{\simeq} (\alpha\beta)\gamma.$$

Das erhält man durch eine Homotopie wie in der folgenden Skizze, wobei die horizontalen Wege jeweils mit linear skalierter Geschwindigkeit durchlaufen werden:



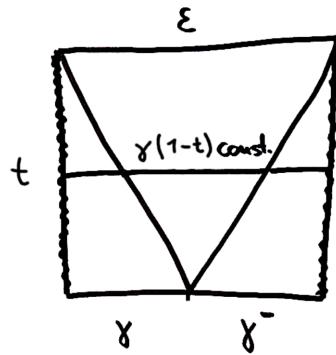
Das neutrale Element der Gruppe ist der konstante Weg $\epsilon = x_0$:



Zu einem Weg γ bezeichnen wir den rückwärts durchlaufenen Weg mit γ^- :

$$\gamma^-(s) := \gamma(1-s).$$

Dann gilt in $\pi_1(X, x_0)$ offenbar $\gamma\gamma^- = \epsilon = \gamma^-\gamma$, wie man mit folgender Homotopie sieht:



Hier werden die Wege zum Zeitpunkt t mit gleichbleibender (doppelter) Geschwindigkeit durchlaufen, aber nur jeweils bis zum Punkt $\gamma(1-t) = \gamma^-(t)$. Dazwischen verweilt der Weg konstant an diesem Punkt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Beispiel 2.2.4. (i) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so gilt $\pi_1(X, x) = \{\epsilon\}$ für alle $x \in X$ (Aufgabe 14).

(ii) Es gilt $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ (Aufgabe 15).

(iii) Es gilt $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Das müssen wir im nächsten Abschnitt noch zeigen. Insbesondere gilt dann für den Torus $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$.

(iv) Es gilt $\pi_1(S^n, x_0) = \{\epsilon\}$ für $n \geq 2$ (Aufgabe 16).

(v) Fundamentalgruppen sind im Allgemeinen nicht abelsch (siehe z.B. Aufgabe 18). \triangle

Satz 2.2.5. *π_1 ist ein kovarianter Funktor, von der Kategorie der punktierten topologischen Räume (und punkterhaltenden stetigen Abbildungen) in die Kategorie der Gruppen. Er ist homotopieinvariant (bei Homotopie relativ des Grundpunkts). Insbesondere haben homotopieäquivalente punktierte Räume isomorphe Fundamentalgruppen.*

Beweis. Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume und $f: X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Für jeden Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_0 ist dann

$$(f \circ \gamma): [0, 1] \rightarrow Y$$

ein stetiger Weg von y_0 nach y_0 , und eine Homotopie

$$\gamma \xrightarrow[\sim_h]{\simeq} \delta$$

induziert offensichtlich eine Homotopie

$$(f \circ \gamma) \xrightarrow[\sim_{f \circ h}]{\simeq} (f \circ \delta).$$

Also induziert f eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(f): \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Ebenfalls klar ist

$$f \circ (\gamma \delta) = (f \circ \gamma)(f \circ \delta),$$

und also ist $\pi_1(f)$ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter gilt offensichtlich

$$\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \quad \text{und} \quad \pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$$

und damit sind die Eigenschaften eines kovarianten Funktors gezeigt.

Für Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ gelte nun $f \xrightarrow{x_0} g$. Daraus folgt

$$f \circ \gamma \xrightarrow{\{0,1\}} g \circ \gamma$$

für alle Wege $\gamma: [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ (siehe Bemerkung 2.1.2 (ii)). Das bedeutet gerade $\pi_1(f) = \pi_1(g)$. \square

Proposition 2.2.6. In X seien x_0, x_1 durch einen stetigen Weg verbindbar. Dann gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

Beweis. Sei $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 . Die folgende Setzung liefert dann einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus, wie man ganz analog zum Beweis von Satz 2.2.3 sieht:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [\delta^- \gamma \delta]. \end{aligned}$$

Offensichtlich erhält man einen inversen Homomorphismus, indem man mit dem inversen Weg δ^- startet. \square

Bemerkung 2.2.7. (i) Wir können bei wegzusammenhängenden Räumen X also auch einfach die Notation $\pi_1(X)$ verwenden.

(ii) Eine in Bezug auf Proposition 2.2.6 leicht verallgemeinerte Variante der Homotopieinvarianz von π_1 findet sich in Aufgabe 19. \triangle

Definition 2.2.8. Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_0(X)$ und $\pi_1(X)$ trivial sind. Das bedeutet also, dass X wegzusammenhängend ist und sich jeder geschlossene Weg relativ Anfangs-/Endpunkt zusammenziehen lässt. \triangle

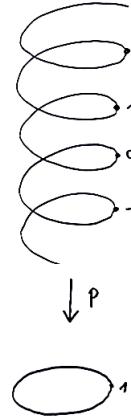
Beispiel 2.2.9. Jeder sternförmige Raum ist einfach zusammenhängend, also zum Beispiel \mathbb{R}^n und D^n . Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend (Aufgabe 16), S^1 , das Möbiusband und der Torus sind es jedoch nicht. \triangle

2.3 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Wir wollen nun die Fundamentalgruppe von S^1 berechnen. Das ist nicht ganz einfach, aber die Methode kann man anpassen um noch andere Fundamentalgruppen auszurechnen (siehe z.B. Aufgabe 17 und Aufgabe 18). Dabei betrachtet man sogenannte *Überlagerungen* der jeweiligen Räume und versucht stetige Wege zu *liften*.

Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ r &\mapsto e^{2\pi ir}. \end{aligned}$$



Proposition 2.3.1. (i) Zu jedem stetigen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(0) = 1$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = 0$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ \tilde{\gamma} \nearrow & & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \end{array}$$

(ii) Für $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = \delta(0) = \delta(1) = 1$ gilt

$$\gamma \stackrel{\{0,1\}}{\simeq} \delta \Rightarrow \tilde{\gamma} \stackrel{\{0,1\}}{\simeq} \tilde{\delta}.$$

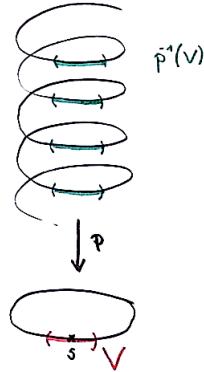
Beweis. (i) Eindeutigkeit: Seien $\tilde{\gamma}$ und $\hat{\gamma}$ zwei solche Liftingen von γ . Die Menge

$$G = \{s \in [0, 1] \mid \tilde{\gamma}(s) = \hat{\gamma}(s)\}$$

ist nicht leer, da $0 \in G$. Außerdem ist G sowohl offen als auch abgeschlossen. Sei dazu zunächst $s \in G$. Es ist p eingeschränkt auf eine kleine offene Umgebung V von $\tilde{\gamma}(s) = \hat{\gamma}(s)$ injektiv. Aus der Stetigkeit folgt, dass es eine offene Umgebung U von s gibt, die mittels $\tilde{\gamma}$ und $\hat{\gamma}$ nach V abgebildet wird. Da beides Liftingen von γ sind, folgt aus der Injektivität von p auf V also $U \subseteq G$. Also ist G offen. Die Abgeschlossenheit folgt ganz elementar aus der Stetigkeit von $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ und der Hausdorff-Eigenschaft von \mathbb{R} . Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist folgt nun $G = [0, 1]$, also $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$.

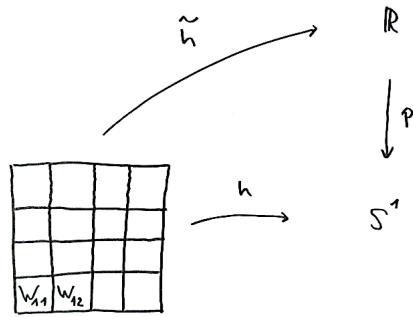
Existenz: Für jeden Punkt in S^1 gibt es eine offene Umgebung V , so dass $p^{-1}(V)$ in abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten zerfällt, von der jede einzelne mittels p zu V homöomorph ist. Insbesondere kann man jeden Weg

mit Bild in einem solchen V nach \mathbb{R} liften, wenn man die Zusammenhangskomponente im Urbild vorgibt.



Wir überdecken nun S^1 mit solchen offenen Mengen und erhalten durch Zurückziehen mittels γ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Zu dieser Überdeckung existiert nun eine Lebesgue-Konstante (vergleiche Beispiel 3.1.7 (ii)). Also erhalten wir eine Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$, so dass γ auf jedem Teilintervall $[s_{i-1}, s_i]$ geliftet werden kann, wenn man die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(\gamma([s_{i-1}, s_i]))$ vorgibt. Mit der Startvorgabe $\tilde{\gamma}(0) = 0$ erhalten wir so iterativ eine stetige Liftung von γ , wobei im i -ten Schritt immer die Zusammenhangskomponente von $\tilde{\gamma}(s_{i-1})$ gewählt wird.

(ii) Sei $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ eine Homotopie von γ und δ relativ $\{0, 1\}$. Wie im Teil (1) sieht man, dass $[0, 1] \times [0, 1]$ in kleine Quadrate W_{ij} zerlegt werden kann, so dass h eingeschränkt auf jedes W_{ij} einen eindeutigen stetigen Lift nach \mathbb{R} besitzt, wenn man die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(h(W_{ij}))$ vorgibt.



Wir liften nun h auf W_{11} in die Zusammenhangskomponente von 0. Dann stimmt der Lift wegen der Eindeutigkeit auf dem unteren Rand von W_{11} mit $\tilde{\gamma}$ überein. Danach liften wir h auf W_{12} so, dass es mit dem bereits definierten Lift auf dem Schnitt mit W_{11} über einstimmmt (was nach Auswahl der richtigen Zusammenhangskomponente automatisch der Fall ist). So fahren wir fort, bis wir h auf der ganzen unteren Zeile des Quadrats stetig geliftet haben. Auf dem unteren Rand der Zeile muss es wegen der Eindeutigkeit aus (i) dann mit $\tilde{\gamma}$ übereinstimmen, der linke Rand der Zeile wird konstant auf 0 abgebildet, der rechte konstant auf $\tilde{\gamma}(1)$.

Jetzt ersetzen wir γ durch den Weg, den man auf dem oberen Rand der unteren Zeile erhält und iterieren den Prozess. Am Schluss erhalten wir eine komplette stetige Liftung, bei der der linke Rand des Quadrats konstant auf 0 abgebildet wird, der rechte konstant auf $\tilde{\gamma}(1)$, und auf dem oberen Rand des Quadrats erhält man (wieder mit der Eindeutigkeit aus (i)) gerade $\tilde{\delta}$. Das zeigt die Behauptung. \square

Satz 2.3.2. Es gilt $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir wählen $x_0 = 1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und bezeichnen die eindeutige Liftung eines Weges γ aus dem letzten Satz wieder mit $\tilde{\gamma}$. Dann betrachten wir die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned}\varphi: \pi_1(S^1, 1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}(1).\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit von der Homotopieklassie folgt gerade aus Proposition 2.3.1 (ii), insbesondere aus der Liftbarkeit der Homotopie relativ 1. Da $\tilde{\gamma}$ ein Lift von γ ist, folgt $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ aus $\gamma(1) = 1 \in S^1$. Es gilt nun für zwei Wege γ, δ

$$\widetilde{\gamma\delta} = \tilde{\gamma}(\tilde{\delta} + \tilde{\gamma}(1))$$

und also ist φ ein Gruppenhomomorphismus. Offensichtlich liegt 1 im Bild von φ , also ist φ surjektiv. Für die Injektivität nehmen wir $\tilde{\gamma}(1) = 0$ an. Da \mathbb{R} sternförmig ist, ist $\tilde{\gamma}$ homotop zur konstanten Nullabbildung, relativ $\{0, 1\}$ (siehe Beispiel 2.2.4 (i)). Durch Komposition der Homotopie mit p erhält man sofort

$$\gamma \xrightarrow{\{0,1\}} \varepsilon,$$

also $[\gamma] = [\varepsilon]$ in $\pi_1(S^1, 1)$. \square

Beispiel 2.3.3. (i) Es gilt $\pi_1(S^n) = \{\epsilon\}$ für $n \geq 2$ (Aufgabe 16). Daraus folgt $S^1 \not\simeq S^n$ für $n \geq 2$. Genauso folgt $S^1 \not\simeq \mathbb{R}^n$ und $S^1 \not\simeq S^1 \times S^1$.

(ii) Angenommen $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \simeq S^{n-1}$$

und daraus folgt $1 = n - 1$, also $n = 2$.

(iii) $S^1 \subseteq D^2$ ist kein Retrakt. Durch Anwendung von π_1 auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\iota} & D^2 & \xrightarrow{r} & S^1 \\ & \searrow \text{id} & & & \end{array}$$

erhielte man nämlich

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_1(\iota)} & \{0\} & \xrightarrow{\pi_1(r)} & \mathbb{Z}, \\ & \searrow \text{id} & & & \end{array}$$

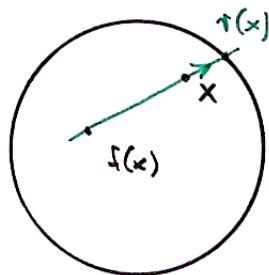
ein offensichtlicher Widerspruch. \triangle

Korollar 2.3.4 (Brouwer'scher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung*

$$f: D^2 \rightarrow D^2$$

besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Falls f keinen Fixpunkt hätte, bekäme man eine Retraktion $r: D^2 \rightarrow S^1$, indem man $x \in D^2$ auf den Schnittpunkt der Gerade durch x und $f(x)$ mit $\partial D^2 = S^1$ abbildet, auf der Seite von x :



\square

Korollar 2.3.5 (Fundamentalsatz der Algebra). \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[x]$ hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis. Angenommen die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein $d \geq 1$ und

$$p = x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{C}[x]$$

mit $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir nun die folgenden beiden wohldefinierten stetigen Abbildungen $f_i: S^1 \rightarrow S^1$:

$$\begin{aligned} f_0: z &\mapsto z^d \\ f_1: z &\mapsto \frac{p(z)}{|p(z)|} \end{aligned}$$

Es gilt nun $f_0 \simeq f_1$ mittels der folgenden Homotopie:

$$h(z, t) := \frac{z^d + ta_1 z^{d-1} + t^2 a_2 z^{d-2} + \cdots + t^d a_d}{|z^d + ta_1 z^{d-1} + t^2 a_2 z^{d-2} + \cdots + t^d a_d|}.$$

Man beachte, dass der Zähler für alle $t \in [0, 1], z \in S^1$ ungleich Null ist, denn für $t > 0$ ist er identisch zu $t^d p(z/t)$. Daraus folgt nun, dass f_0 und f_1 mittels π_1 dieselbe Abbildung auf den Fundamentalgruppen definieren (für eine ganz exakte Aussage siehe Aufgabe 19). Es ist nun aber offensichtlich

$$\begin{aligned} \pi_1(f_0): \pi_1(S^1) &= \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \\ n &\mapsto d \cdot n, \end{aligned}$$

wie man durch Anwendung von f_0 auf den einfachen Kreisweg sieht. Die Abbildung $f_1: S^1 \rightarrow S^1$ lässt sich aber stetig fortsetzen zu einer Abbildung $f_1: D^2 \rightarrow S^1$, einfach anhand derselben Formel:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\iota} & D^2 \\ & \searrow f_1 & \downarrow f_1 \\ & & S^1 \end{array}$$

Hierauf wenden wir den Funktor π_1 an:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\pi_1(\iota)} & \pi_1(D^2) \\ & \searrow \pi_1(f_1) & \downarrow \pi_1(f_1) \\ & & \pi_1(S^1). \end{array}$$

Wegen $\pi_1(D^2) = \{\epsilon\}$ muss $\pi_1(f_1): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die Nullabbildung sein. Widerspruch zu $d \geq 1$. \square

Kapitel 3

Homologietheorie

Homologietheorie ist eine Methode, die Funktoren π_0 und π_1 aus den letzten Kapiteln systematisch auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern. Wir besprechen zunächst die Konstruktion der Homologie für abstrakte Simplizialkomplexe, die am einfachsten zu verstehen ist. Dann entwickeln wir die Homologietheorie axiomatisch für beliebige topologische Räume. Aus der Existenz einer Homologietheorie kann man anschließend bereits viele interessante Aussagen ableiten. Eine explizite Konstruktion einer allgemeinen Homologietheorie geben wir dann im letzten Abschnitt.

3.1 Homologie für abstrakte Simplizialkomplexe

Wir setzen stets $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$.

Definition 3.1.1. (i) Ein (**abstrakter**) **Simplizialkomplex** ist eine Teilmenge

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $S \in \mathcal{K}, \emptyset \neq T \subseteq S \Rightarrow T \in \mathcal{K}$.
- (2) $\bigcup_{S \in \mathcal{K}} S = [n]$.

(ii) Ein Element $S \in \mathcal{K}$ nennt man (**abstrakten**) **Simplex**, eine Teilmenge $T \subseteq S$ nennt man **Seite von** S , eine Seite der Mächtigkeit 1 nennt man **Ecke von** S . Seiten von Simplices von \mathcal{K} sind selbst wieder Simplices von \mathcal{K} , laut Axiom (1).

(iii) Die **Dimension** eines Simplex $S \in \mathcal{K}$ ist definiert als

$$\dim(S) := |S| - 1,$$

die Dimension $\dim(\mathcal{K})$ von \mathcal{K} als die maximale Dimension seiner Simplizes.

(iv) Für zwei (abstrakte) Simplicialkomplexe

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([m]) \text{ und } \mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}([n])$$

ist ein **Morphismus von (abstrakten) Simplicialkomplexen** $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ eine Abbildung $\varphi: [m] \rightarrow [n]$ mit

$$S \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(S) \in \mathcal{L}.$$

Bemerkung/Beispiel 3.1.2. (i) Es sind

$$\mathcal{G} = \{\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}\} \text{ und } \mathcal{F} = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$$

Simplicialkomplexe. Dabei ist \mathcal{G} von Dimension 0 und \mathcal{F} von Dimension n . Die identische Abbildung $\text{id}: [n] \rightarrow [n]$ ist ein Morphismus von \mathcal{G} nach \mathcal{F} , nicht aber in die andere Richtung.

(ii) Ein eindimensionaler Simplicialkomplex ist einfach ein Graph. Dabei sind die eindimensionalen Simplizes gerade die Kanten des Graphs.

(iii) Die abstrakten Simplicialkomplexe mit Morphismen bilden eine Kategorie \mathcal{SC} . Insbesondere erhalten wir so auch einen kanonischen Isomorphiebegriff.

Definition 3.1.3. (i) Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt **d -dimensionaler (konkreter) Simplex**, wenn S die konvexe Hülle von $d + 1$ affin unabhängigen Punkten ist. Dabei heißen $d + 1$ Punkte affin unabhängig, wenn sie nicht gemeinsam in einem $d - 1$ -dimensionalen affinen Unterraum liegen.

(ii) Eine **geometrische Realisierung** eines abstrakten Simplicialkomplexes $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ ist eine injektive Abbildung

$$f: [n] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

so dass für alle $S \in \mathcal{K}$ die Menge $f(S)$ affin unabhängig ist und für alle $S, T \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\text{conv } f(S) \cap \text{conv } f(T) = \text{conv } f(S \cap T).$$

Oft bezeichnet man dann auch nur die Menge

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}, f) := \bigcup_{S \in \mathcal{K}} \text{conv } f(S)$$

als geometrische Realisierung, wobei man natürlich nur über die maximalen Simplices vereinigen muss. Es handelt sich dabei um eine Vereinigung von konkreten Simplizes im \mathbb{R}^m , die sich genau so schneiden, wie es die abstrakten Simplizes tun.

Bemerkung/Beispiel 3.1.4. (i) Die Menge

$$\Delta_n := \text{conv} \{0, e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein n -dimensionaler (konkreter) Simplex, genannt der **n -dimensionale Einheitssimplex**.

(ii) Für jeden abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ liefert die folgende Abbildung eine geometrische Realisierung:

$$\begin{aligned} f: [n] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ 0 &\mapsto 0 \\ i &\mapsto e_i. \end{aligned}$$

Für $\mathcal{G} = \{\{0\}, \dots, \{n\}\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}([n])$ erhalten wir dadurch

$$\mathcal{R}(\mathcal{G}, f) = \{0, e_1, \dots, e_n\} \text{ und } \mathcal{R}(\mathcal{F}, f) = \Delta_n.$$

(iii) Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ ein abstrakter Simplizialkomplex von Dimension d , so kann man \mathcal{K} bestenfalls in \mathbb{R}^d geometrisch realisieren, aber nicht in kleinerer Dimension (einfach aufgrund der Definition von affin unabhängig). Eine Realisierung im \mathbb{R}^d muss es aber nicht unbedingt geben. Wie wir in (ii) gesehen haben, gibt es aber immer eine Realisierung im \mathbb{R}^n .

(iv) Ist \mathcal{K} eindimensional (also ein Graph), so kann man ihn in \mathbb{R}^1 genau dann realisieren, wenn er eine Gerade ist. Kann man ihn im \mathbb{R}^2 realisieren, so muss der Graph planar sein, d.h. sich ohne Überschneidung der Kanten in die Ebene zeichnen lassen (allerdings ist das nur notwendig und nicht hinreichend, da wir bei Realisierungen nur gerade Kanten erlauben). Im unteren Bild sehen wir eine eindimensionale Realisierung von

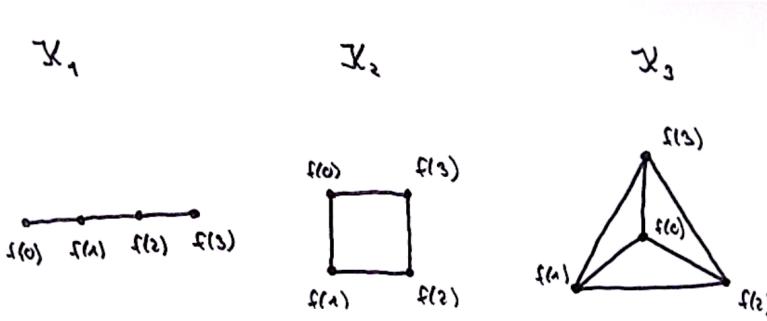
$$\mathcal{K}_1 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

und eine zweidimensionale von

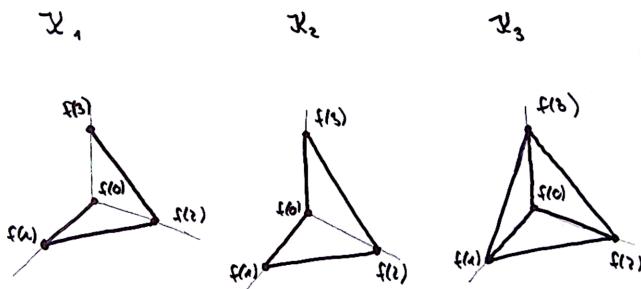
$$\mathcal{K}_2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{0, 3\}\}$$

sowie

$$\mathcal{K}_3 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$



Nun sehen wir noch die jeweilige Realisierung im \mathbb{R}^3 aus (ii), die für alle \mathcal{K}_i existiert:

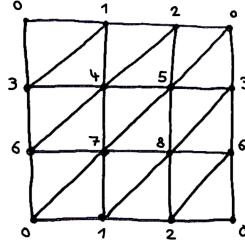


(v) Für beliebiges n betrachten wir

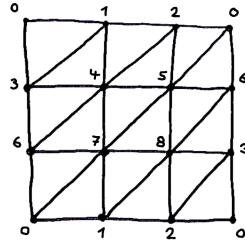
$$\mathcal{S} = \{S \subseteq [n] \mid S \neq \emptyset, |S| \leq n\}.$$

Dabei handelt es sich um einen $n - 1$ -dimensionalen Simplicialkomplex, dessen geometrische Realisierung aus (ii) genau der Rand des n -dimensionalen Einheitssimplex im \mathbb{R}^n ist. Dieser ist homöomorph zur S^{n-1} .

(vi) Wir betrachten den Simplicialkomplex $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}([8])$, der schematisch in folgendem Bild wiedergegeben ist:



Dabei repräsentiert jede Stecke einen 1-dimensionalen Simplex, und jedes Dreieck einen zweidimensionalen. Anschaulich sollte klar sein, dass man als geometrische Realisierung gerade einen Raum erhält, der homöomorph zum Torus ist. Analog erhält man einen Simplizialkomplex $\mathcal{KF} \subseteq \mathcal{P}([8])$ für die Klein'sche Fläche durch folgendes Diagramm:



Lemma 3.1.5. *Je zwei geometrische Realisierungen f, g desselben abstrakten Simplizialkomplexes \mathcal{K} liefern homöomorphe topologische Räume:*

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}, f) \cong \mathcal{R}(\mathcal{K}, g).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.1.6. Sei \mathcal{K} ein abstrakter Simplizialkomplex.

(i) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$C_k(\mathcal{K}) := \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{K} \\ \dim(S) = k}} \mathbb{Z}$$

der freie \mathbb{Z} -Modul, der von den Simplizes von \mathcal{K} der Dimension k erzeugt wird. Wir schreiben Elemente anstatt als Tupel ganzer Zahlen oft auch als formale Summe mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{K} \\ \dim(S) = k}} c_S \cdot S.$$

(ii) Sei $S \in \mathcal{K}$ mit $\dim(S) = k$. Wir schreiben

$$S = \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \text{ mit } i_0 < i_1 < \dots < i_k$$

und definieren

$$\partial_k(S) := \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot (S \setminus \{i_j\}) \in C_{k-1}(\mathcal{K}).$$

So erhalten wir einen Homomorphismus

$$\partial_k: C_k(\mathcal{K}) \rightarrow C_{k-1}(\mathcal{K}),$$

genannt **Randabbildung**. Die daraus entstehende Kette von Abbildungen

$$\dots \rightarrow C_{k+1}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(\mathcal{K}) \rightarrow \dots$$

heißt der \mathcal{K} zugeordnete **Kettenkomplex**.

(iii) Wir definieren

$$Z_k(\mathcal{K}) := \ker(\partial_k) \text{ sowie } B_k(\mathcal{K}) := \text{im}(\partial_{k+1}).$$

Elemente von $Z_k(\mathcal{K})$ heißen **Zykel** und Elemente von $B_k(\mathcal{K})$ heißen **Ränder**. Der Begriff **Ränder** ist relativ leicht zu motivieren: Jeder Simplex wird unter ∂_k auf die alternierende Summe seiner höchstdimensionalen Seiten abgebildet; also gerade auf seinen Rand. Das Bild von ∂_k wird also von Rändern von Simplizes erzeugt. Den Begriff **Zykel** motivieren wir in Beispiel 3.1.7 (iii) unten.

Beispiel 3.1.7. (i) Wir betrachten $\mathcal{G} = \{\{0\}, \dots, \{n\}\}$ und sehen

$$C_0(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}^{n+1} \text{ und } C_k(\mathcal{G}) = \{0\} \text{ für } k \neq 0.$$

Damit sind auch die Randabbildungen ∂_k bereits eindeutig bestimmt, und der relevante Teil des Kettenkomplex ist

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

Wir sehen

$$B_0(\mathcal{G}) = \{0\} \text{ und } Z_0(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}^{n+1}.$$

(ii) Wir betrachten $\mathcal{F} = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ und erhalten

$$C_k(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{k+1}}$$

für $k = 0, \dots, n$ und folgenden Kettenkomplex

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{n-1}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

Hier sind die Randabbildungen schon etwas schwieriger explizit zu beschreiben.
Im Fall $n = 2$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \partial_2: \mathbb{Z} = C_2(\mathcal{F}) &\rightarrow C_1(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^3 \\ 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei wir die 1-Simplizes folgendermaßen sortiert haben:

$$e_1 = \{1, 2\}, e_2 = \{0, 2\}, e_3 = \{0, 1\}.$$

Sortieren wir die 0-Simplizes als $e_1 = \{0\}, e_2 = \{1\}, e_3 = \{2\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_1: \mathbb{Z}^3 = C_1(\mathcal{F}) &\rightarrow C_0(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -b - c \\ c - a \\ b + a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} B_2(\mathcal{F}) &= Z_2(\mathcal{F}) = \{0\} \\ B_1(\mathcal{F}) &= Z_1(\mathcal{F}) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B_0(\mathcal{F}) &= \text{span}_{\mathbb{Z}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } Z_0(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}^3. \end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten $\mathcal{K}_2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{0, 3\}\}$ aus Beispiel 3.1.4 (iv). Hier erhalten wir den Kettenkomplex

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \rightarrow \{0\}$$

mit

$$\begin{aligned}\partial_1: \mathbb{Z}^4 &\rightarrow \mathbb{Z}^4 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -a - d \\ a - b \\ b - c \\ c + d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also gilt

$$B_1(\mathcal{K}_2) = \{0\} \text{ und } Z_1(\mathcal{K}_2) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B_0(\mathcal{K}_2) = \text{span}_{\mathbb{Z}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } Z_0(\mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}^4.$$

An $Z_1(\mathcal{K}_2)$ sieht man, warum der Begriff Zykel gut gewählt ist. Es gibt ein Element im Kern von ∂_1 , und zwar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

welches in anderer Schreibweise einfach $\{0, 1\} + \{1, 2\} + \{2, 3\} - \{0, 3\}$ ist. Es ist genau deshalb im Kern von ∂_1 , weil es geometrisch einem Zyklus/Kreis zwischen den Zahlen 0, 1, 2, 3 entspricht (den man in der geometrischen Realisierung schön sehen kann).

(iv) Wir betrachten $\mathcal{S} = \{S \subseteq [n] \mid S \neq \emptyset, |S| \leq n\}$, dessen Realisierung homöomorph zu S^{n-1} ist. Der entstehende Kettenkomplex ist fast identisch zu dem aus (ii), nur dass $C_n(\mathcal{S}) = \{0\}$ gilt, da der volle Simplex $[n]$ nicht zu \mathcal{S} gehört.

(v) Die Kettenkomplexe, Bilder und Zykel der Simplizialkomplexe des Torus und der Klein'schen Flasche aus Beispiel 3.1.4 (vi) kann man theoretisch mit viel Rechenaufwand ebenso bestimmen.

Lemma 3.1.8. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, also

$$B_k(\mathcal{K}) \subseteq Z_k(\mathcal{K}).$$

Beweis. Es genügt $\partial_k(\partial_{k+1}(S)) = 0$ für alle Simplizes S der Dimension $k + 1$ zu zeigen. Es ist aber $\partial_k(\partial_{k+1}(S))$ eine Summe über alle Seiten von S der Dimension $k - 1$, wobei jede dieser Seiten genau zweimal auftritt (man kann zwei Ecken von S in unterschiedlicher Reihenfolge streichen). Dabei entstehen aber gerade unterschiedliche Vorzeichen, wie man sich leicht überlegt. \square

Definition 3.1.9. Für einen abstrakten Simplizialkomplex \mathcal{K} und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$H_k(\mathcal{K}) := Z_k(\mathcal{K}) / B_k(\mathcal{K})$$

und nennen es den **k -ten Homologiemodul** von \mathcal{K} .

Bemerkung 3.1.10. Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([n])$ ein Simplizialkomplex mit $\emptyset \notin \mathcal{K}$.

(i) Es gilt $H_k(\mathcal{K}) = \{0\}$ für $k < 0$ und für $k > \dim(\mathcal{K})$.

(ii) Es gilt stets

$$H_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}^s$$

wobei s die Anzahl der (Weg-)Zusammenhangskomponenten der geometrischen Realisierung von \mathcal{K} ist. Offensichtlich ist ja

$$Z_0(\mathcal{K}) = C_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Angenommen für zwei Ecken $i < j$ gilt $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Dann folgt aus

$$\partial_1(\{i, j\}) = \{j\} - \{i\} \in B_0(\mathcal{K})$$

schon

$$\overline{\{i\}} = \overline{\{j\}} \in H_0(\mathcal{K}).$$

Wenn zwei Ecken in derselben Zusammenhangskomponente liegen, kann man sie durch eine endliche Folge solcher Kanten verbinden. Daraus folgt die Aussage.

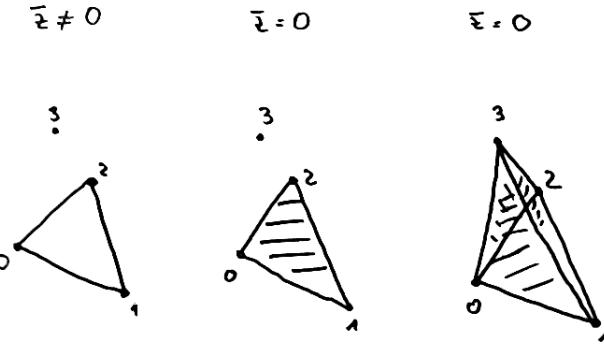
(iii) Einen k -Zykel müssen wir uns als Konfiguration von Simplizes vorstellen, die ein Gebiet der Dimension $k + 1$ völlig einschließen, beispielsweise

$$z = \{0, 1\} + \{1, 2\} - \{0, 2\}.$$

Ob ein Zykel \bar{z} in der Homologie trivial wird oder nicht hängt davon ab, ob es eine Konfiguration von höheren Simplizes gibt, deren Rand gerade der Zykel ist (und welche das entstehende Raumgebiet also wieder auffüllen). Es gilt beispielsweise

$$\partial_2(\{0, 1, 2\}) = z = \partial_2(\{0, 1, 3\} + \{1, 2, 3\} - \{0, 2, 3\})$$

und die dazugehörigen Simplizes füllen das durch z eingeschlossene Gebiet aus:



Insofern misst der k -te Homologiemodul die Anzahl der $k + 1$ -dimensionalen Löcher im Simplizialkomplex.

Beispiel 3.1.11. Wir berechnen sämtliche Homologiemoduln der Simplizialkomplexe aus Beispiel 3.1.7.

(i) Für $\mathcal{G} = \{\{0\}, \dots, \{n\}\}$ erhalten wir

$$H_0(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}^{n+1}$$

und alle anderen Homologiemoduln sind trivial.

(ii) Für den Komplex $\mathcal{F} = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ erhalten wir

$$H_0(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}$$

und alle anderen Homologiemoduln sind trivial (Übungsaufgabe).

(iii) Für $\mathcal{K}_2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{0, 3\}\}$ sieht man direkt

$$H_0(\mathcal{K}_2) \cong \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{K}_2) \cong \mathbb{Z}$$

und alle anderen Moduln sind trivial.

(iv) Für $\mathcal{S} = \{S \subseteq [n] \mid S \neq \emptyset, |S| \leq n\}$ erhalten wir fast denselben Kettenkomplex wie in (ii), nur $C_n(\mathcal{S}) = \{0\}$. Daraus sehen wir

$$H_0(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}, H_{n-1}(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$$

und alle anderen Moduln sind trivial (Übungsaufgabe).

(v) Nach langer und mühsamer Rechenarbeit erhält man mit etwas Glück:

$$H_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H_2(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}$$

sowie

$$H_0(\mathcal{K}\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathcal{K}\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

und alle anderen Moduln sind trivial.

Satz 3.1.12. *Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist*

$$H_k: \mathcal{SC} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$$

ein kovarianter Funktor. Insbesondere gilt

$$\mathcal{K} \cong \mathcal{L} \Rightarrow H_k(\mathcal{K}) \cong H_k(\mathcal{L})$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir müssen nur noch die induzierten Abbildungen definieren und die Funktionalität nachweisen. Seien also

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}([m]) \text{ und } \mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}([n])$$

Simplizialkomplexe und $\varphi: [m] \rightarrow [n]$ ein Morphismus von \mathcal{K} nach \mathcal{L} . Für $S \in \mathcal{K}$ mit $\dim(S) = k$ definieren wir

$$\varphi_k(S) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(\varphi|_S) \cdot \varphi(S) & \text{falls } \dim(\varphi(S)) = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Dadurch erhalten wir Morphismen

$$\varphi_k: C_k(\mathcal{K}) \rightarrow C_k(\mathcal{L})$$

welche das folgende Diagramm kommutativ machen (Übungsaufgabe):

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathcal{K}) \\ \downarrow \varphi_{k+1} & & \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_{k-1} \\ C_{k+1}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathcal{L}) \end{array} .$$

Daraus sieht man direkt

$$\varphi_k(Z_k(\mathcal{K})) \subseteq Z_k(\mathcal{L}) \text{ und } \varphi_k(B_k(\mathcal{K})) \subseteq B_k(\mathcal{L}).$$

Mit dem Homomorphiesatz induziert φ_k damit einen wohldefinierten Morphismus

$$H_k(\varphi): H_k(\mathcal{K}) \rightarrow H_k(\mathcal{L}).$$

Die Funktionalitätseigenschaften rechnet man dabei unmittelbar nach. \square

Bemerkung/Beispiel 3.1.13. Die Simplizialkomplexe \mathcal{T} und \mathcal{KF} haben unterschiedliche Homologiemoduln, sind also nicht isomorph. Man beachte dass wir damit *nicht* gezeigt haben, dass der Torus und die Klein'sche Flasche nicht homöomorph sind.

3.2 Axiomatische Homologietheorie

Wir wollen nun eine Homologietheorie nicht nur für abstrakte Simplizialkomplexe, sondern für beliebige topologische Räume bekommen. Man kann solch eine Theorie explizit konstruieren, das machen wir später. Gewöhnlich kann man die Homologiemoduln dann aber nicht direkt ausrechnen, im Gegensatz zur simplizialen Homologie. Man bedient sich deshalb gewisser Eigenschaften der Homologie, um die Berechnung auf einfachere Räume zurückzuführen. Wir führen deshalb die Homologietheorie gleich nur axiomatisch über ihre Eigenschaften ein, und beweisen aus ihrer Existenz bereits viele starke Aussagen. Natürlich muss man die Existenz dann später auch nachweisen.

Definition 3.2.1. Eine **Homologietheorie** h_* ist eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von kovarianten Funktoren

$$h_k: \mathcal{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$$

wobei R ein kommutativer Ring ist.

Zusätzlich gebe es für alle X mit einer offenen Überdeckung $X = X_1 \cup X_2$ Abbildungen

$$\partial_k: h_k(X_1 \cup X_2) \rightarrow h_{k-1}(X_1 \cap X_2)$$

welche für alle $f: (X_1 \cup X_2) \rightarrow (Y_1 \cup Y_2)$ mit $f(X_i) \subseteq Y_i$ folgendes Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} h_k(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_k} & h_{k-1}(X_1 \cap X_2) \\ \downarrow h_k(f) & & \downarrow h_{k-1}(f) \\ h_k(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_k} & h_{k-1}(Y_1 \cap Y_2). \end{array}$$

Dabei sollen folgende Eigenschaften gelten:

(H) Alle h_k sind homotopieinvariant.

(MV) Für jede offene Überdeckung $X = X_1 \cup X_2$ ist folgende (unendliche) Mayer-Vietoris-Folge von R -Moduln exakt:

$$\cdots \rightarrow h_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(h_k(i_1), h_k(i_2))} h_k(X_1) \oplus h_k(X_2) \xrightarrow{h_k(j_1) + h_k(j_2)} h_k(X) \xrightarrow{\partial_k} h_{k-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

wobei die Abbildungen aus dem kanonischen Diagramm sind (welches ein Pushout ist):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & & \\
 & i_1 \swarrow & & \searrow j_1 & \\
 X_1 \cap X_2 & & & & X \\
 & \searrow i_2 & & \nearrow j_2 & \\
 & & X_2 & &
 \end{array}$$

(N) Es gilt $h_k(\emptyset) = \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Falls zusätzlich das folgende Axiom erfüllt ist, so nennt man h_* eine **gewöhnliche Homologietheorie**:

(D) Es gilt $h_k(\{\ast\}) = \{0\}$ für alle $k \neq 0$.

Bemerkung 3.2.2. Sei h_* eine Homologietheorie.

(i) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $X \simeq Y \Rightarrow h_k(X) \cong h_k(Y)$. Das folgt wie üblich direkt aus der geforderten Homotopieinvarianz der Funktoren h_k .

(ii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $h_k(X \sqcup Y) \cong h_k(X) \oplus h_k(Y)$. Das erhält man aus der exakten Mayer-Vietoris-Folge für die offene Überdeckung $X \sqcup Y = X \cup Y$:

$$\{0\} = h_k(X \cap Y) \rightarrow h_k(X) \oplus h_k(Y) \rightarrow h_k(X \sqcup Y) \rightarrow h_{k-1}(X \cap Y) = \{0\}.$$

Da die beiden Moduln außen trivial sind, muss die Abbildung in der Mitte sowohl injektiv als auch surjektiv sein, also ein Isomorphismus.

(iii) Für $f: X = X_1 \cup X_2 \rightarrow Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $f(X_i) \subseteq Y_i$ ist offensichtlich das gesamte folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 h_k(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & h_k(X_1) \oplus h_k(X_2) & \longrightarrow & h_k(X_1 \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_k} & h_{k-1}(X_1 \cap X_2) \\
 \downarrow h_k(f) & & \downarrow h_k(f) \oplus h_k(f) & & \downarrow h_k(f) & & \downarrow h_{k-1}(f) \\
 h_k(Y_1 \cap Y_2) & \longrightarrow & h_k(Y_1) \oplus h_k(Y_2) & \longrightarrow & h_k(Y_1 \cup Y_2) & \xrightarrow{\partial_k} & h_{k-1}(Y_1 \cap Y_2).
 \end{array}$$

Für die ersten beiden Blöcke folgt es einfach aus der Funktor-Eigenschaft, für den letzten Block haben wir es extra gefordert.

Wenn wir Homologiegruppen ausrechnen wollen, nutzen wir meistens die exakte Mayer-Vietoris-Folge. Dabei ist es am besten, wenn an vielen Stellen der triviale Modul steht. Um das zu erreichen, gehen wir deshalb oft zunächst zur *reduzierten Homologie* über, und rechnen erst danach die eigentliche Homologie aus.

Definition 3.2.3. Für $X \neq \emptyset$ und $p: X \rightarrow \{\ast\}$ nennen wir

$$\tilde{h}_k(X) := \ker \left(h_k(X) \xrightarrow{h_k(p)} h_k(\{\ast\}) \right)$$

die zu h gehörende **reduzierte Homologie**.

Bemerkung 3.2.4. (i) Die Projektion $p: X \rightarrow \{\ast\}$ besitzt ein Rechtsinverses, also ist die Abbildung $h_k(p)$ surjektiv.

(ii) Es gilt $\tilde{h}_k(\{\ast\}) = \{0\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Auch \tilde{h}_k ist ein Funktor. Wendet man h_k auf das linke kommutative Diagramm an, sieht man dass $h_k(f)$ den Kern von $h_k(p)$ auf den Kern von $h_k(p)$ abbildet:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \{\ast\} & \longrightarrow & \{\ast\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} h_k(X) & \xrightarrow{h_k(f)} & h_k(Y) \\ \downarrow h_k(p) & & \downarrow h_k(p) \\ h_k(\{\ast\}) & \longrightarrow & h_k(\{\ast\}). \end{array}$$

Durch Einschränkung erhält man also den Morphismus

$$\tilde{h}_k(f): \tilde{h}_k(X) \rightarrow \tilde{h}_k(Y).$$

Auch die Homotopieinvarianz ist dadurch klar.

(iv) Ist $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, so ist die Mayer-Vietoris-Folge auch für \tilde{h} exakt. Dazu betrachtet man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \longrightarrow & \tilde{h}_k(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \tilde{h}_k(X_1) \oplus \tilde{h}_k(X_2) & \longrightarrow & \tilde{h}_k(X) & \longrightarrow \tilde{h}_{k-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & h_k(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & h_k(X_1) \oplus h_k(X_2) & \longrightarrow & h_k(X) & \longrightarrow h_{k-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & h_k(\{\ast\}) & \longrightarrow & h_k(\{\ast\}) \oplus h_k(\{\ast\}) & \longrightarrow & h_k(\{\ast\}) & \longrightarrow h_{k-1}(\{\ast\}) \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Hier sind die unteren beiden Zeilen exakt, ebenso wie alle Spalten. Damit ist auch die obere Zeile exakt (Übungsaufgabe in Diagrammjagd).

(v) Für nichtleeres X gilt

$$h_k(X) \cong \tilde{h}_k(X) \oplus h_k(\{*\}).$$

Dazu betrachtet man die exakte Folge

$$0 \rightarrow \tilde{h}_k(X) \hookrightarrow h_k(X) \xrightarrow{h_k(p)} h_k(\{*\}) \rightarrow 0,$$

in der $h_k(p)$ ein Rechtsinverses besitzt. Daraus folgt die Aussage (Übungsaufgabe). Insbesondere gilt für eine gewöhnliche Homologietheorie h_* mit $M := h_0(\{*\})$ stets

$$h_k(X) = \begin{cases} \tilde{h}_k(X) \oplus M & k = 0 \\ \tilde{h}_k(X) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem gilt (ebenfalls Übungsaufgabe)

$$\tilde{h}_k(X \sqcup \{*\}) \cong h_k(X).$$

Proposition 3.2.5. Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $M := h_0(\{*\})$. Dann gilt für alle $n \geq 1$

$$h_k(D^n) = \begin{cases} M & k = 0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h_k(S^n) = \begin{cases} M & k = 0, n \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für Torus und Klein'sche Flasche gilt:

$$h_0(\mathcal{T}) = M, h_1(\mathcal{T}) = M \oplus M, h_2(\mathcal{T}) = M, h_k(\mathcal{T}) = \{0\} \text{ sonst}$$

$$h_0(\mathcal{K}\mathcal{F}) = M, h_1(\mathcal{K}\mathcal{F}) = M \oplus M/2M, h_2(\mathcal{K}\mathcal{F}) = \{m \in M \mid 2m = 0\},$$

$$h_k(\mathcal{K}\mathcal{F}) = \{0\} \text{ sonst.}$$

Beweis. Da $D^n \simeq \{*\}$ folgt die erste Aussage direkt aus der Homotopieinvarianz. Die Sphäre S^n überdecken wir offen durch eine obere und eine untere Halbsphäre, die sich am Äquator etwas überlappen. Beide Halbsphären sind homotopieäquivalent zu einem Punkt, der Schnitt zu S^{n-1} . Wir erhalten also die folgende exakte Mayer-Vietoris-Folge für \tilde{h}_* :

$$\underbrace{\tilde{h}_k(\{*\}) \oplus \tilde{h}_k(\{*\})}_{=\{0\}} \rightarrow \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(\{*\}) \oplus \tilde{h}_{k-1}(\{*\})}_{=\{0\}}$$

Daraus folgt $\tilde{h}_k(S^n) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1})$ und iterativ

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \tilde{h}_{k-n}(S^0) = h_{k-n}(\{\ast\}) = \begin{cases} M & k = n \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Übergang von \tilde{h}_* zu h_* entsteht der zusätzliche Faktor M für $k = 0$. Die Berechnung der Homologiegruppen von Torus und Kleinsch' er Flasche ist Übungsaufgabe. \square

Proposition 3.2.6. *Sei $Y = X \cup_{\varphi} D^n$ aus X durch Anheften einer n -Zelle entstanden. Dann gilt*

$$\tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k(Y) \text{ für } k \neq n, n-1.$$

Beweis. Sei $0 \in D^n$ der Mittelpunkt der Zelle. Wie überdecken Y offen durch die beiden Mengen

$$Y_1 = Y \setminus \{0\} \simeq X \text{ und } Y_2 = Y \setminus X = \overset{\circ}{D}{}^n \simeq \{\ast\}.$$

Dabei gilt

$$Y_1 \cap Y_2 = \overset{\circ}{D}{}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}.$$

Wir betrachten nun für beliebiges k die Mayer-Vietoris-Folge

$$\tilde{h}_k(S^{n-1}) \rightarrow \underbrace{\tilde{h}_k(Y_1)}_{\cong \tilde{h}_k(X)} \oplus \underbrace{\tilde{h}_k(Y_2)}_{= \{0\}} \rightarrow \tilde{h}_k(Y) \rightarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1}).$$

Für $k \neq n, n-1$ steht links und rechts der triviale Modul und das liefert die gewünschte Isomorphie. \square

Im folgenden sehen wir, wie h_0 den Funktor π_0 verallgemeinert:

Satz 3.2.7. *Sei R ein Hauptidealring, $h_*: \mathcal{T}op \rightarrow R-\mathcal{M}od$ eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(\{\ast\}) = R$. Dann gilt für jeden Raum X , der homotopieäquivalent zu einem endlichen CW-Komplex ist: $h_0(X)$ ist ein freier R -Modul mit*

$$\dim_R h_0(X) = |\pi_0(X)|.$$

Beweis. Man beachte dass für CW-Komplexe Zusammenhangs- und Wegzusammenhangskomponenten übereinstimmen, und X also die topologische Summe seiner endlich vielen Zusammenhangskomponenten ist.

Wir beweisen die Aussage per Induktion über den Aufbau des CW-Komplexes X . Besteht X nur aus Nullzellen, so folgt die Aussage aus Bemerkung 3.2.2 (ii). Heftet man eine n -Zelle für $n \geq 2$ an X an, so ändert sich nach Proposition 3.2.6 $\tilde{h}_0(X)$ und damit auch $h_0(X)$ nicht. Andererseits kann sich auch die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten nicht ändern, da S^{n-1} wegzusammenhängend ist.

Wir nehmen also an, dass wir an X eine 1-Zelle anheften. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten.

1. *Möglichkeit:* Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten bleibt gleich. Wir haben beide Enden von D^1 also an dieselbe Wegzusammenhangskomponente geheftet. Wir zerlegen den neuen Raum Y nun wieder, indem wir für Y_1 einen nicht-angehefteten Punkt von D^1 entfernen und $Y_2 = Y \setminus X$ wählen. Dann ist $Y_1 \simeq X$, $Y_2 \simeq \{\ast\}$ und $Y_1 \cap Y_2 \simeq S^0$. Wir erhalten

$$R = \tilde{h}_0(S^0) \rightarrow \tilde{h}_0(Y_1) \oplus \underbrace{\tilde{h}_0(Y_2)}_{=\{0\}} \rightarrow \tilde{h}_0(Y) \rightarrow \{0\}$$

Die Abbildung links kommt aber von der Inklusion $Y_1 \cap Y_2 \hookrightarrow Y_1$, und die ist homotop zu einer konstanten Abbildung, da die Anheftpunkte in derselben Wegzusammenhangskomponente liegen. Konstante Abbildungen faktorisieren durch einen Punkt, und induzieren in der reduzierten Homologie also die Nullabbildung. Damit erhalten wir

$$\tilde{h}_0(X) \cong \tilde{h}_0(Y_1) \cong \tilde{h}_0(Y)$$

und damit auch $h_0(X) \cong h_0(Y)$.

2. *Möglichkeit:* Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten verringert sich um 1. Wir haben also zwei Komponenten X_1, X_2 verbunden (o.B.d.A. bestehe X nur aus diesen beiden Komponenten). Wir wählen nun als Y_1 gerade X_1 samt der angeklebten D^1 , jedoch ohne deren anderen Endpunkt. Analog definieren wir Y_2 . Dann ist $Y_1 \simeq X_1$, $Y_2 \simeq X_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \simeq \{\ast\}$. Mit der exakten Mayer-Vietoris-Folge erhalten wir

$$\tilde{h}_0(Y) \cong \tilde{h}_0(X_1) \oplus \tilde{h}_0(X_2).$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} h_0(Y) \oplus R &\cong \tilde{h}_0(Y) \oplus R \oplus R \\ &\cong \tilde{h}_0(X_1) \oplus R \oplus \tilde{h}_0(X_2) \oplus R \\ &\cong h_0(X_1) \oplus h_0(X_2) \\ &\cong R \oplus R, \end{aligned}$$

wobei wir die Induktionsvoraussetzung für X_1 und X_2 verwendet haben. Mit dem Elementarteilersatz ist nun $h_0(Y)$ ebenfalls ein freier R -Modul mit $\dim h_0(Y) + 1 = 2$, also $\dim h_0(Y) = 1$. \square

Nun sehen wir noch einen Zusammenhang zwischen π_1 und h_1 , der für die explizite Konstruktion einer Homologietheorie noch genauer gemacht werden könnte:

Satz 3.2.8. *Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$. Ein stetiger Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ kann als Abbildung $\gamma: S^1 \rightarrow X$ mit $\gamma(1) = x_0$ aufgefasst werden. Wegen $h_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ erhält man aus*

$$h_1(\gamma): h_1(S^1) \rightarrow h_1(X)$$

einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow h_1(X) \\ \gamma &\mapsto h_1(\gamma)(1). \end{aligned}$$

Beweis. Homotope Wege $\gamma, \delta: S^1 \rightarrow X$ liefern identische Abbildungen $h_1(\gamma) = h_1(\delta)$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert. Eine Hintereinanderhängung von Wegen γ, δ können wir durch folgendes Diagramm realisieren:

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{z} & S^1 \vee S^1 & \xrightarrow{\gamma \vee \delta} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \gamma \delta & & \end{array}$$

Dabei wickelt z den Kreis einmal um beide Kopien von S^1 , und $\gamma \vee \delta$ verwendet auf der ersten Kopie von S^1 gerade γ , auf der zweiten δ . Durch Anwendung von h_1 erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} = h_1(S^1) & \xrightarrow{h_1(z)} & h_1(S^1 \vee S^1) & \xrightarrow{h_1(\gamma \vee \delta)} & h_1(X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & h_1(\gamma \delta) & & \end{array}$$

Es ist aber

$$h_1(S^1 \vee S^1) \cong h_1(S^1) \oplus h_1(S^1)$$

und unter dieser Isomorphie entspricht $h_1(z)$ gerade (id, id) sowie $h_1(\gamma \vee \delta)$ gerade $h_1(\gamma) + h_1(\delta)$. Daraus folgt die gewünschte Homomorphieeigenschaft. \square

Bemerkung/Beispiel 3.2.9. (i) Für $X = S^1$ erhält man so die Identität als Isomorphismus zwischen $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und $h_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Der einfach umlaufende Kreisweg γ erzeugt ja $\pi_1(S^1)$ und wird wegen $h_1(\gamma) = \text{id}$ anhand des angegebenen Homomorphismus auf 1 abgebildet.

(ii) Der Homomorphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow h_1(X)$ kann im Allgemeinen nicht injektiv sein. Homologiegruppen sind ja immer abelsch, Fundamentalgruppen im Allgemeinen nicht.

Satz 3.2.10. (1) Aus der Existenz einer Homologietheorie mit $h_k(\{*\}) \neq \{0\}$ für ein k folgt:

(i) $S^{n-1} \subseteq D^n$ ist kein Retrakt.

(ii) Brouwer'scher Fixpunktsatz: Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

(2) Aus der Existenz einer gewöhnlichen Homologietheorie mit $h_0(\{*\}) \neq \{0\}$ folgt

(i) $S^m \simeq S^n \Rightarrow m = n$.

(ii) $U \subseteq R^m$ offen, $V \subseteq R^n$ offen, $V \cong W \Rightarrow m = n$.

Beweis. (1) (i): Angenommen wir hätten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\iota} & D^n \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r \\ & & S^{n-1}. \end{array}$$

Wir wenden \tilde{h}_k darauf an und erhalten

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_k(S^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{h}_k(\iota)} & \tilde{h}_k(D^n) = \{0\} \\ & \searrow \tilde{h}_k(\text{id}) = \text{id} & \downarrow \tilde{h}_k(r) \\ & & \tilde{h}_k(S^{n-1}). \end{array}$$

Es ist aber

$$\tilde{h}_k(S^{n-1}) \cong \tilde{h}_{k-n+1}(S^0) \cong h_{k-n+1}(\{*\}) \neq \{0\}$$

für geeignetes k . Das ist ein Widerspruch, da id nicht durch den trivialen Modul faktorisiert.

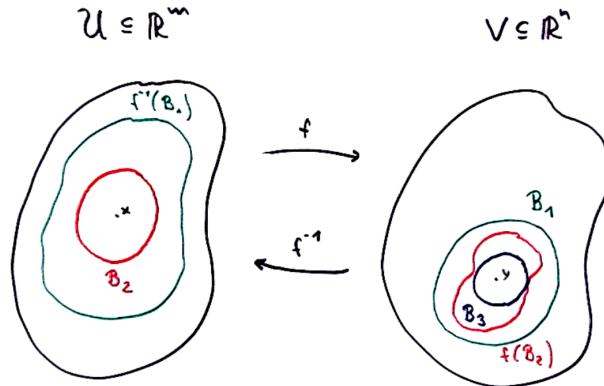
(ii): Den Brouwer'schen Fixpunktsatz beweist man genau wie in Korollar 2.3.4; aus einer Abbildung ohne Fixpunkt könnte man direkt eine Retraktion $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ konstruieren.

(2) (i): Aus $S^m \simeq S^n$ folgt

$$\{0\} \neq h_0(\{\ast\}) \cong \tilde{h}_m(S^m) \cong \tilde{h}_m(S^n) \cong h_{m-n}(\{\ast\})$$

und daraus $m = n$, da h_* gewöhnlich ist.

(ii): Sei $f: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus und $x \in \overset{\circ}{U}, y = f(x) \in \overset{\circ}{V}$. Wähle eine offene Kugel B_1 in V um y , dazu eine offene Kugel B_2 in U um x mit $B_2 \subseteq f^{-1}(B_1)$ und dazu schließlich eine offene Kugel B_3 in V um y mit $B_3 \subseteq f(B_2)$:



Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm, in dem ι eine Homotopieäquivalenz ist:

$$B_3 \setminus \{y\} \xrightarrow{f^{-1}} B_2 \setminus \{x\} \xrightarrow{f} B_1 \setminus \{y\}.$$

ι

Hierauf wenden wir \tilde{h}_{n-1} an:

$$\tilde{h}_{n-1}(B_3 \setminus \{y\}) \longrightarrow \tilde{h}_{n-1}(B_2 \setminus \{x\}) \longrightarrow \tilde{h}_{n-1}(B_1 \setminus \{y\}).$$

\cong

Es ist aber $B_3 \setminus \{y\} \cong B_1 \setminus \{y\} \simeq S^{n-1}$, also

$$\tilde{h}_{n-1}(B_3 \setminus \{y\}) \cong \tilde{h}_{n-1}(B_1 \setminus \{y\}) \cong \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \cong h_0(\{\ast\}) \neq \{0\}$$

und daraus folgt wegen $B_2 \setminus \{x\} \cong S^{m-1}$ nun

$$\{0\} \neq \tilde{h}_{n-1}(B_2 \setminus \{x\}) \cong \tilde{h}_{n-1}(S^{m-1}) \cong h_{n-m}(\{*\})$$

und daraus schließlich $n = m$. \square

Definition 3.2.11. Sei h_* eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$. Jede stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$h_n(f): h_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cong h_n(S^n).$$

Wir definieren den **Grad von f** als

$$\deg(f) := h_n(f)(1).$$

Bemerkung/Beispiel 3.2.12. (i) Es gilt $\deg(\text{id}) = 1$.
(ii) Aus der Funktoreigenschaft von h_n folgt sofort

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

(iii) Homotope Abbildungen haben denselben Grad.

Lemma 3.2.13. *Die Spiegelung*

$$\begin{aligned} s: S^n &\rightarrow S^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) \end{aligned}$$

hat Grad -1 .

Beweis. Wir betrachten die folgende Hintereinanderausführung

$$S^n \xrightarrow{g} S^n \vee S^n \xrightarrow{\text{id} \vee s} S^n,$$

wobei g einfach den Äquator auf einen Punkt zusammenzieht. Diese Hintereinanderausführung ist homotop zu einer konstanten Abbildung. Alternativ kann man nämlich zuerst die untere Hemisphäre in die obere klappen (das ist dann bereits homotop zu einer konstanten Abbildung) und anschließend die untere zusammenziehen. In der n -ten (reduzierten) Homologie erhalten wir

$$0: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id} \oplus \text{id}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id} + \tilde{h}_n(s)} \mathbb{Z}$$

und daraus folgt $h_n(s) = \tilde{h}_n(s) = -\text{id}_{\mathbb{Z}}$. \square

Beispiel 3.2.14. Die Abbildung

$$\begin{aligned} -\text{id}: S^n &\rightarrow S^n \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

hat Grad $(-1)^{n+1}$. Sie ist nämlich die Hintereinanderausführung von $n+1$ Spiegelungen.

Korollar 3.2.15. Auf S^n sind id und $-\text{id}$ genau dann homotop, wenn n ungerade ist.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.2.16. Ein **Tangential-Vektorfeld** auf S^n ist eine stetige Abbildung $\nu: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\langle x, \nu(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in S^n$.

Der folgende Satz besagt, dass ungerade-dimensionale Igel nicht stetig gekämmt werden können.

Satz 3.2.17. Auf S^n gibt es genau dann ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld, wenn n ungerade ist.

Beweis. Angenommen $\nu: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein Tangentialvektorfeld mit $\nu(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$. Dann erhalten wir eine Homotopie von id und $-\text{id}$ auf S^n , indem wir jeden Punkt x entlang des Kreises, der von $\nu(x)$ auf S^n vorgegeben ist, bis auf $-x$ bewegen. Laut Korollar 3.2.15 folgt daraus, dass n ungerade ist.

Für ungerades n lässt sich aber ein solches Tangentialvektorfeld leicht angeben:

$$\nu(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_2, -x_1, \dots, x_{n+1}, -x_n).$$
□

3.3 Konstruktion der Singulären Homologie

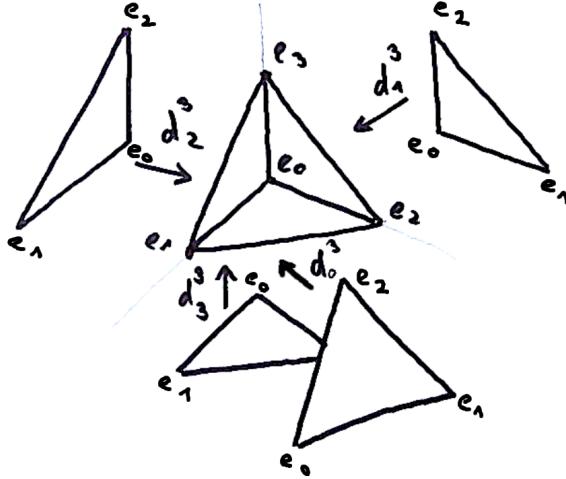
Wir skizzieren in diesem Abschnitt die Konstruktion einer gewöhnlichen Homologietheorie H_* mit $H_0(\{*\}) = R$, für einen beliebigen kommutativen Ring R . Sei dazu wieder

$$\Delta_n = \text{conv}\{e_0 = 0, e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

der n -dimensionale Einheitssimplex. Dann gibt es für $i = 0, \dots, n$ kanonische stetige Einbettungen

$$d_i^n: \Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n,$$

indem man $\Delta_{n-1} = \text{conv}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ einfach per (indexordnungserhaltender) affiner Transformation auf $\text{conv}\{e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}$ abbildet.



Für jeden topologischen Raum und jede stetige Abbildung $\gamma: \Delta_n \rightarrow X$ erhält man so stetige Abbildungen

$$\gamma^i := \gamma \circ d_i^n: \Delta_{n-1} \rightarrow X.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei nun

$$C_k(X) = \bigoplus_{Top(\Delta_k, X)} R$$

der von allen stetigen Funktionen $\gamma: \Delta_k \rightarrow X$ frei erzeugte R -Modul, wobei wir $C_k(X) = \{0\}$ für $k < 0$ setzen. Wir schreiben Elemente aus $C_k(X)$ auch wieder als (endliche) formale R -Linearkombinationen von Funktionen:

$$\sum_{\gamma: \Delta_k \rightarrow X} c_\gamma \cdot \gamma$$

mit $c_\gamma \in R$. Für $\gamma: \Delta_k \rightarrow X$ setzen wir

$$\partial_k(\gamma) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \gamma^i \in C_{k-1}(X)$$

und erhalten so Morphismen $\partial_k: C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ und einen Kettenkomplex

$$\cdots \rightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \rightarrow \cdots$$

Auch hier überprüft man leicht

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt für

$$B_k(X) := \text{im}(\partial_{k+1}) \text{ und } Z_k(X) := \ker(\partial_k)$$

immer $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ und wir definieren den **k -ten singulären Homologiemodul** als

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X).$$

Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ liefert eine Abbildung

$$\begin{aligned} f_k: \mathcal{T}op(\Delta_k, X) &\rightarrow \mathcal{T}op(\Delta_k, Y) \\ \gamma &\mapsto f \circ \gamma \end{aligned}$$

und deshalb einen Morphismus

$$f_k: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$$

der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(X) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(X) \\ \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} \\ C_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(Y) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(Y) \end{array}$$

Also erhalten wir einen wohldefinierten Homomorphismus

$$H_k(f): H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$$

und die Funktionalitätseigenschaften sind erfüllt.

Das Axiom (N) ist offensichtlich erfüllt, da es keine stetigen Abbildungen $\Delta_k \rightarrow \emptyset$ gibt, und also bereits $C_k(\emptyset) = \{0\}$ für alle k gilt.

Das Axiom (D) ist ebenfalls erfüllt. Für $k \geq 0$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\gamma: \Delta_k \rightarrow \{*\}$ und der Kettenkomplex sieht folgendermaßen aus:

$$\cdots \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\text{id}} R \xrightarrow{0} R \rightarrow \{0\} \rightarrow \cdots$$

Also gilt

$$H_0(\{*\}) = R \text{ und } H_k(\{*\}) = \{0\} \text{ für } k \neq 0.$$

Die Homotopieinvarianz, die Konstruktion der Randabbildung sowie Axiom (MV) sind deutlich schwieriger nachzuweisen, wir lassen es hier weg.

Wir veranschaulichen hier nochmal den Zusammenhang zu π_0 und π_1 . Eine stetige Abbildung $\gamma: \Delta_0 \rightarrow X$ entspricht einfach einem Punkt von X , also ist $C_0(X)$ einfach frei von den Punkten von X erzeugt. Eine stetige Abbildung $\gamma: \Delta_1 \rightarrow X$ ist einfach ein stetiger Weg und es gilt $\partial_1(\gamma) = \gamma(1) - \gamma(0)$. Damit sieht man direkt die Aussage von Satz 3.2.7 erneut. Außerdem erhält man im Fall $R = \mathbb{Z}$ folgenden wohldefinierten Gruppenhomomorphismus (Übungsaufgabe):

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow H_1(X) \\ [\gamma] &\mapsto \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Falls X wegzusammenhängend ist, ist er surjektiv.

Zum Abschluss wollen wir noch den Satz von Borsuk-Ulam beweisen, und müssen dafür nochmals auf den Grad einer Abbildung zurückkommen. Im folgenden Beweis greifen wir auf die explizite Konstruktion der simplizialen Homologie zurück.

Eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt **antipodentreu**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$ gilt.

Satz 3.3.1. *Jede antipodentreue Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ hat ungeraden Grad. Insbesondere ist eine antipodentreue Abbildung niemals homotop zu einer konstanten Abbildung.*

Beweisskizze. Wir erinnern an die Definition des projektiven Raumes

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := S^n / (x \sim -x)$$

und die kanonische Projektion $p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$. Bezuglich p lässt sich jede stetige Abbildung $\gamma: \Delta_k \rightarrow \mathbb{P}^n$ auf genau zwei Arten zu einer stetigen Abbildung $\tilde{\gamma}: \Delta_k \rightarrow S^n$ liften. Das sieht man mit einem Argument wie im Beweis von Proposition 2.3.1. Wir bezeichnen diese beiden Liftungen mit γ_1, γ_2 .

Wir verwenden nun die singuläre Homologie mit $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir erhalten eine kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow C_k(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\tau_k} C_k(S^n) \xrightarrow{p_k} C_k(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0,$$

mit $\tau_k(\gamma) := \gamma_1 + \gamma_2$. Die Injektivität von τ ist klar, die Surjektivität von p_k folgt aus der Liftbarkeit von γ , und die Exaktheit in der Mitte aus der Tatsache, dass wir $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ verwenden. In folgendem Diagramm kommutiert dabei alles (die Zeilen sind die Kettenkomplexe der singulären Homologie und die Spalten sind exakt):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \cdots \\
 & \tau_{k+1} \downarrow & \tau_k \downarrow & \tau_{k-1} \downarrow & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(S^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(S^n) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(S^n) \longrightarrow \cdots \\
 & p_{k+1} \downarrow & p_k \downarrow & p_{k-1} \downarrow & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & &
 \end{array}$$

Dadurch erhält man eine lange exakte Folge in der Homologie:

$$\cdots \rightarrow H_k(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\tau_k} H_k(S^n) \xrightarrow{p_k} H_k(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(\mathbb{P}^n) \rightarrow \cdots$$

Die Abbildung d_k entsteht dabei aus dem Schlangenlemma (Aufgabe 37), die Exaktheit beweist man mit Diagrammjagd.

Sei nun $f: S^n \rightarrow S^n$ antipodentreu. Dann induziert f eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned}
 \bar{f}: \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\
 [x] &\mapsto [f(x)].
 \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir in der Homologie das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_k(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\tau_k} & H_k(S^n) & \xrightarrow{p_k} & H_k(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow H_k(\bar{f}) & & \downarrow H_k(f) & & \downarrow H_k(\bar{f}) \quad \downarrow H_{k-1}(\bar{f}) \\
 \cdots & \longrightarrow & H_k(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\tau_k} & H_k(S^n) & \xrightarrow{p_k} & H_k(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Das mittlere Rechteck kommutiert, da es bereits auf Ebene der stetigen Abbildungen kommutiert. Das linke Rechteck kommutiert, da $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ gerade

die beiden Lifts von $\bar{f} \circ \gamma$ sind. Die Kommutativität des rechten Rechtecks folgt aus einer dreidimensionalen Diagrammjagd, indem man dem Diagramm oben noch eine zweite Schicht mit den jeweils von f und \bar{f} induzierten Abbildungen hinzufügt.

Die meisten Homologiemoduln von S^n sind nun allerdings trivial, also erhalten wir die exakten Folgen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_k(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_k(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

für $k = n-1, \dots, 2$, sowie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_0(S^n) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H_0(S^n) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Nach Satz 3.2.7 gilt $H_0(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ebenso gilt $H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Damit kann man sich iterativ nach oben hangeln und erhält $H_k(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $k = 0, \dots, n$. Alle auftretenden Abbildungen sind entweder 0 oder id. Genauso erhält man iterativ, dass alle $H_k(f)$ und $H_k(\bar{f})$ Isomorphismen sind, wobei es für $k = 0$ klar ist. Insbesondere ist schließlich

$$H_n(f): H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$$

ein Isomorphismus, also die Identität auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dabei entsteht $H_k(f)$ aber einfach aus der Reduktion aller Koeffizienten modulo 2 der entsprechenden Konstruktion mit $R = \mathbb{Z}$. Damit muss f einen ungeraden Grad haben. \square

Korollar 3.3.2 (Satz von Borsuk-Ulam). *Für jede stetige Abbildung*

$$f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

existiert ein Punkt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis. Angenommen die Aussage stimmt für ein f nicht. Definiere

$$\begin{aligned} h: S^n &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

Dabei ist h offensichtlich stetig und antipodentreu. Wenn wir S^{n-1} als Äquator in S^n einbetten, erhalten wir durch Hintereinanderausführung mit h eine antipodentreue Abbildung von S^{n-1} in sich selbst, die aber durch S^n faktorisiert und deshalb in der $n-1$ -ten Homologie trivial wird. Sie hat also Grad 0, und das widerspricht Satz 3.3.1. \square

Korollar 3.3.3 (Tofubrötchensatz). *Seien A_1, \dots, A_n beschränkte Lebesgues-messbare Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann gibt es eine affine Hyperebene, die alle A_i simultan halbiert.*

Beweis. Für $v \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir

$$P_v := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, (a, 1) \rangle \geq 0\}.$$

Jeder affine Halbraum in \mathbb{R}^n entsteht so für genau ein $v \in S^n$. Nun erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \text{vol}: S^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (\text{vol}(P_v \cap A_1), \dots, \text{vol}(P_v \cap A_n)). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Borsuk-Ulam existiert ein $v \in S^n$ mit $\text{vol}(v) = \text{vol}(-v)$. Die von v definierte Hyperebene halbiert also alle A_i gleichzeitig. \square

Korollar 3.3.4 (Satz von Lusternik-Schnirelmann). *Für jede Überdeckung von S^n mit $n+1$ abgeschlossenen Teilmengen muss eine der Teilmengen ein Antipodenpaar enthalten.*

Beweis. Sei eine abgeschlossenen Überdeckung von S^n durch Teilmengen A_0, \dots, A_n gegeben. Angenommen es gilt $A_i \cap -A_i = \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$. Wir wählen stetige Funktionen $f_i: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_{i|_{A_i}} \equiv 1 \text{ und } f_{i|_{-A_i}} \equiv 0.$$

Dann ist

$$f = (f_1, \dots, f_n): S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig und somit existiert ein Punkt $x \in S^n$ mit $f_i(x) = f_i(-x)$ für $i = 1, \dots, n$. Daraus folgt aber $x, -x \notin A_i$ für $i = 1, \dots, n$ und das impliziert $x, -x \in A_0$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.
- [2] Tammo tom Dieck, *Topologie*, de Gruyter Lehrbuch , 2. Auflage, 2000.
- [3] Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology*, EMS, 2008.
- [4] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Herbert Seifert & William Threlfall, *A Textbook Of Topology*, Academic Press, 1980.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- (i) Für metrische Räume stimmt die Definition von Stetigkeit mit der bekannten ε - δ -Definition überein.
- (ii) $[0, 1]$ ist nicht homöomorph zu \mathbb{R} .
- (iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ r &\mapsto e^{ir} \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist:

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ existiert, so dass $f|_U: U \rightarrow Y$ stetig ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass es eine hausdorffsche Topologie auf dem Raum $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ der Funktionen gibt, so dass eine Folge $(f_n)_n$ genau dann gegen f konvergiert, wenn sie punktweise auf $[0, 1]$ konvergiert.

(ii) Es gibt keine Metrik auf $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, welche die Topologie aus (i) induziert.

Aufgabe 4. Wir versehen die Menge $X = \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ der reellen $m \times n$ -Matrizen mit der euklidischen Topologie und definieren für $A, B \in X$

$$A \sim B : \Leftrightarrow \exists S \in \text{GL}_m(\mathbb{R}), T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}): SAT = B.$$

Beschreiben Sie X/\sim mit der Quotiententopologie so explizit wie möglich.

Aufgabe 5. Sei X ein topologischer Raum, $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen, sowie $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ die Diagonale in $X \times X$. Zeigen Sie dass X genau dann hausdorffsch ist, wenn Δ_X abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Aufgabe 6. Das folgende Diagramm sei ein Pushout:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & & \\
 & j_1 \swarrow & & \searrow i_1 & \\
 X_0 & & & & X \\
 & j_2 \searrow & & \nearrow i_2 & \\
 & & X_2 & &
 \end{array}$$

Zeigen Sie: Ist j_1 ein Homöomorphismus, so auch i_2 .

Aufgabe 7. Beweisen Sie Satz 1.3.3.

Aufgabe 8. Beweisen Sie den Satz von Heine-Borel.

Aufgabe 9. Beweisen Sie Satz 1.3.6.

Aufgabe 10. Zeigen Sie: Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so auch \overline{A} . Stimmt auch die Umkehrung?

Aufgabe 11. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie:

- (i) Jede Wegzusammenhangskomponente von X ist offen.
- (ii) X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow X$ ist wegzusammenhängend.
- (ii) Stimmt dieselbe Aussage auch für abgeschlossene Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 12. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (i) Die folgende Setzung definiert eine Äquivalenzrelation auf X :

$$x \sim y : \Leftrightarrow \exists A \subseteq X \text{ zusammenhängend mit } x, y \in A.$$

- (ii) Die Teilmengen von X , die aus zueinander äquivalenten Punkten bestehen heißen Zusammenhangskomponenten von X . Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und abgeschlossen, aber nicht unbedingt offen. Ist die auf der Menge der Äquivalenzklassen induzierte Quotiententopologie diskret?
- (iii) Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert eine wohldefinierte Abbildung zwischen den jeweiligen Mengen der Äquivalenzklassen.

Aufgabe 13. Es seien $f_1, g_1: X \rightarrow Y$ und $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $f_1 \simeq g_1, f_2 \simeq g_2$. Dann gilt

$$(f_2 \circ f_1) \simeq (g_2 \circ g_1).$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie $\pi_1(X, x) = \{\epsilon\}$ für alle $x \in X$, falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig ist.

Aufgabe 15. Zeigen Sie $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Aufgabe 16. Zeigen Sie $\pi_1(S^n) = \{\epsilon\}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 17. Versuchen Sie die Berechnung der Fundamentalgruppe von S^1 so anzupassen, dass man damit direkt die Fundamentalgruppe des Torus berechnen kann.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Überlagerung des Torus (definiert wie in Beispiel 1.2.5 (ii)), auf die man Wege liften kann. Technische Details müssen nicht bewiesen werden.

Aufgabe 18. Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\})$, wobei $a \neq b$ Punkte aus \mathbb{R}^2 sind.

Hinweis: $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ ist homotopieäquivalent zu einer Vereinigung von zwei Kreisen, die sich in einem Punkt berühren. Finden Sie eine geeignete Überlagerung dieser Kreise. Notfalls googeln Sie *Cayleygraph der freien Gruppe*. Technische Details müssen nicht bewiesen werden.

Aufgabe 19. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ stetig und h eine Homotopie von f zu g . Sei $x_0 \in X$ fest und $\delta(\cdot) = h(x_0, \cdot)$ der von h induzierte stetige Weg von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$. Ebenfalls mit δ bezeichnen wir den von δ induzierten Isomorphismus aus Proposition 2.2.6:

$$\begin{aligned}\delta: \pi_1(Y, f(x_0)) &\rightarrow \pi_1(Y, g(x_0)) \\ [\gamma] &\mapsto [\delta^{-1}\gamma\delta].\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow \pi_1(g) & \downarrow \delta \\ & & \pi_1(Y, g(x_0)).\end{array}$$

Aufgabe 20. Eine stetige Abbildung $h: S^1 \rightarrow S^1$ heißt *antipodenerhaltend*, falls $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in S^1$ gilt. Zeigen Sie, dass eine antipodenerhaltende Abbildung h niemals die Nullabbildung zwischen den Fundamentalgruppen induziert. Insbesondere ist h nicht homotop zu einer konstanten Abbildung.

Aufgabe 21. (i) Zeigen Sie, dass es keine antipodenerhaltende stetige Abbildung $h: S^2 \rightarrow S^1$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass zu jeder stetigen Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Punkt $x \in S^2$ existiert mit $f(x) = f(-x)$.

Aufgabe 22. Zeigen Sie, dass je zwei geometrische Realisierungen eines abstrakten Simplizialkomplexes homöomorphe Räume liefern.

Aufgabe 23. Berechnen Sie die Homologiemoduln von $\mathcal{F} = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ und $\mathcal{S} = \{S \subseteq [n] \mid S \neq \emptyset, |S| \leq n\}$.

Aufgabe 24. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_k(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathcal{K}) \\ \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_{k-1} \\ C_k(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathcal{L}) \end{array}$$

aus dem Beweis von Satz 3.1.12 kommutativ ist.

Aufgabe 25. Gegeben sei eine endliche Folge von Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \rightarrow 0$$

mit $f_{i+1} \circ f_i = 0$ für alle i . Wir definieren

$$H_i = \ker(f_{i+1})/\text{im}(f_i).$$

Zeigen Sie

$$\sum_i (-1)^i \dim H_i = \sum_i (-1)^i \dim V_i.$$

Aufgabe 26. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von R -Moduln und Morphismen, in dem alle Spalten und die unteren beiden Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dann die obere Zeile exakt bei C ist.

Aufgabe 27. In der folgenden exakten Folge besitze f ein Rechtsinverses:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow 0.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$B \cong A \oplus C$$

gilt.

Aufgabe 28. Zeigen Sie $\tilde{h}_k(X \sqcup \{\ast\}) \cong h_k(X)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 29. Sei $S^n \vee S^n$ die Vereinigung zweier Sphären, die sich in einem Punkt berühren. Zeigen Sie

$$\tilde{h}_k(S^n \vee S^n) \cong \tilde{h}_k(S^n) \oplus \tilde{h}_k(S^n)$$

und geben Sie Isomorphismen in beide Richtungen möglichst explizit an.

Aufgabe 30. Berechnen Sie die Homologiemoduln von Torus und Klein'scher Fläche für eine gewöhnliche Homologietheorie h_* .

Aufgabe 31. Berechnen Sie die Homologiemoduln des Raumes $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ für eine gewöhnliche Homologietheorie und vergleichen Sie mit dem Torus. Sind die beiden Räume homotopieäquivalent?

Aufgabe 32. Sei $\mathbb{H}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_n \geq 0\}$ und $U, V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen (in der Teilraumtopologie von \mathbb{R}^n). Sei $f: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus und $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Zeigen Sie, dass dann $f(p) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$ gelten muss. Sie dürfen die Existenz einer Homologietheorie mit $h_k(\{\ast\}) \neq 0$ für ein k voraussetzen.

Aufgabe 33. Zeigen Sie dass id und $-\text{id}$ auf S^n genau dann homotop sind, wenn n ungerade ist.

Aufgabe 34. Sei $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ stetig. Zeigen Sie:

- (i) Ist f eine Homotopieäquivalenz, so gilt $\deg(f) = \pm 1$.
- (ii) Aus $\deg(f) \neq 0$ folgt, dass f surjektiv ist.
- (iii) Wenn f keinen Fixpunkt hat, ist f homotop zu $-\text{id}$.
- (iv) Wenn f keinen Punkt auf seinen Antipodenpunkt abbildet, ist f homotop zu id .

Aufgabe 35. Sei *Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X* ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: G \rightarrow \text{Homöo}(X),$$

wobei die Menge aller Homöomorphismen von X als Gruppe mit der Hintereinanderausführung von Funktionen verstanden wird. Die Operation heißt *frei*, wenn $\varphi(g)$ keinen Fixpunkt besitzt, für alle $g \neq e$.

Zeigen Sie, dass für ungerades n nur die Gruppen $\{e\}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ frei auf S^{n-1} operieren können. Geben Sie eine solche freie Operation an.

Aufgabe 36. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist (im Fall $R = \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow H_1(X) \\ [\gamma] &\mapsto \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Falls X wegzusammenhängend ist, ist er surjektiv.

Aufgabe 37. Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von R -Moduln mit exakten Spalten:

$$\begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{f} & D \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{g} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{h} & F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0
 \end{array}$$

Zeigen Sie dass es eine kanonische Abbildung $d: \ker(h) \rightarrow D/f(A)$ gibt, so das folgende Folge exakt ist:

$$\ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) \rightarrow D/f(A) \rightarrow E/g(B) \rightarrow F/h(C).$$

Aufgabe 38. In folgendem kommutativen Diagramm von R -Moduln seien die Zeilen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \longrightarrow E \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow i \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' \longrightarrow E'.
 \end{array}$$

Zeigen Sie: Sind g, i Isomorphismen, f surjektiv und j injektiv, so ist h ein Isomorphismus.

Aufgabe 39. Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome von ungeradem Grad. Dann gibt es ein $0 \neq a \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$0 = p_1(a) = \dots = p_n(a).$$

Mit anderen Worten: Die projektive Varietät von p_1, \dots, p_n besitzt einen reellen Punkt.