universität
innsbruck
Institut für Mathematik

Einführung in die Algebraische Geometrie

Tim Netzer

∀¬6∃qλ∀

A⌐9EbYA

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Was ist algebraische Geometrie?

Ihren Ursprung hat die algebraische Geometrie in der Frage nach der Lösbarkeit von polynomialen Gleichungssystemen über Körpern.
Lineare Gleichungssysteme werden in der linearen Algebra erschöpfend behandelt. Man hat mit dem Gauß-Algorithmus eine Methode zur systematischen Berechnung aller Lösungen eines solchen Systems und die Lösungsmenge ist als affiner Raum auch geometrisch leicht zu verstehen. Die dahinterstehende Algebra, also die Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen, ist ebenso sehr gut verstanden.
Geht man nun zu *nichtlinearen* polynomialen Gleichungssystemen über, wird die Sache deutlich komplizierter. Es gibt im Allgemeinen keinen expliziten Lösungsalgorithmus und die Geometrie der Lösungsmengen ist viel komplizierter. Als erste Vereinfachung sucht man nun zunächst nur nach Lösungen in einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Damit umgeht man Irregularitätsprobleme, die sonst sogar schon im eindimensionalen zusätzlich auftauchen würden. Weiter versucht man nun anstatt einer vollständigen Lösung aller Systeme eine Klassifikation der Lösungsmengen bis auf eine geeignete Isomorphie zu finden. Dann kann man prinzipiell versuchen, ein unbekanntes System dadurch zu lösen, dass man es durch Isomorphie auf ein bekanntes zurückführt. Für gewöhnliche Gleichungssysteme gipfelt dieser Ansatz in der vollständigen Klassifikation aller Lösungsmengen anhand der ihnen zugeordneten *affinen Koordinatenringe*, also einer äquivalenten Übersetzung des Problems in die kommutative Algebra. Dies ist der Inhalt von Kapitel 1.

Nun treten beim Lösen von polynomialen Gleichungssystemen oft unerwartete Irregularitäten auf. So kann etwa bereits ein System aus zwei Gleichungen in vielen Variablen keine Lösung haben, obwohl man geometrisch erwarten würde, dass jede Gleichung die Dimension der Lösungsmenge höchstens um eins verringert. Solche Probleme kann man vermeiden, wenn man vom affinen zum *projektiven Raum* übergeht. Dabei fügt man Punkte im Unendlichen hinzu, und dadurch verhalten sich die Lösungsmengen viel regulärer. Das behandeln wir in Kapitel 3.

Andererseits wird nun die Klassifikation der Lösungsmengen bis auf Isomorphie schwieriger. Der Ansatz über die affinen Koordinatenringe hat keine direkte Verallgemeinerung. Deshalb schwächt man den Isomorphiebegriff ab, zu *birationaler Äquivalenz*. Dabei handelt es sich um eine Isomorphie *fast überall*. Hat man ein System also gelöst und ist ein weiteres System dazu birational äquivalent, so hat man dieses neue System fast vollständig gelöst. Bezüglich birationaler Äquivalenz finden wir wieder eine rein algebraische Klassifikation, über die *Funktionenkörper* der Gleichungssysteme. Damit beschäftigen wir uns unter anderem in Kapitel 4.

Man springt also stets zwischen der Betrachtung der Lösungsmengen der Systeme als geometrische Objekte und gewissen algebraischen Korrelaten hin und her. Daher kommt auch der Name *algebraische Geometrie*. Häufig erlaubt erst die Algebra exakte Beweise von Aussage, die auf geometrischer Seite zwar sehr einleuchtend, aber schwer zu beweisen sind. Wir werden unzählige solche Aussage kennenlernen.

In Kapitel 2 befassen wir uns mit algorithmischen Aspekten. So möchte man beispielsweise für ein gegebenes Gleichungssystem algorithmisch die Lösbarkeit entscheiden. Obwohl die auftretenden Körper unendlich sind und man sie also nicht vollständig nach Lösungen durchsuchen kann, gibt es andere Methoden zur Entscheidung solcher Fragen. Die Theorie der *Gröbnerbasen* liefert solche Möglichkeiten. Sind alle Inputdaten endlich repräsentierbar (betrachtet man also beispielsweise Polynome über $\mathbb{Q}$), so kann man auch computergestützt *exakte* Antworten auf solche Fragen erwarten.

In Kapitel 6 geben wir schließlich eine kurze Einführung in die Theorie der Schemata. Die moderne algebraische Geometrie benutzt heutzutage hauptsächlich diese Sprache. Wir führen die wichtigsten Grundbegriffe ein und beweisen einige Aussagen. Dabei soll vor allem die Analogie zur klassischen algebraischen Geometrie, die in diesem Skript hauptsächlich entwickelt wird, aufgezeigt werden.

Die Literatur zur algebraischen Geometrie ist fast unüberschaubar, deshalb hier eine unvollständige Auswahl. Relativ elementare Ansätze wie in diesem Skript bieten etwa die Bücher von Harris [6], Hulek [8], Shafarevich [10, 11] (und Fulton [5] für Kurven). Die modernere Schematheorie findet man in Hartshorne [7] sehr vollständig beschrieben, und Eisenbud & Harris [4] liefern eine etwas leichtere Einführung. Für Ergebnisse der kommutativen Algebra bieten sich Atiyah & Macdonald [1], Eisenbud [3] und Lang [9] an. Die algorithmischen Aspekte sind etwa in Becker & Weispfenning [2] dargestellt.

Dieses Skript basiert zu großen Teilen auf den Bücher von Shafarevich und einem unveröffentlichten Vorlesungsskript von Claus Scheiderer an der Universität Konstanz. Eventuelle Fehler gehen dabei natürlich auf mein Konto, und für Hinweise auf dieselben bin ich dankbar. Ich danke Martin Berger für Fehlerkorrekturen in einer ersten Version des Skripts.

Kapitel 1

Affine Varietäten

1.1 Erinnerungen aus der Algebra

Sämtliche Ringe in diesem Skript sind *kommutativ* und haben ein *multiplikativ neutrales Element*, die Eins. Häufig bezeichnen wir Ringe mit A, B oder R, S. Ideale in Ringen werden gewöhnlich mit I oder J bezeichnet.

Definition 1.1.1. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal.
(i) Die folgende Menge ist wieder ein Ideal von A (siehe Aufgabe 1) und heißt das **Radikal** von I:

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \; a^n \in I\} .$$

Gilt $I = \sqrt{I}$, so nennt man I ein **Radikalideal**.
(ii) Ein Element $a \in A$ heiß **nilpotent**, falls $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Ideal

$$\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

aller nilpotenten Elemente heißt **Nilradikal von** A.
(iii) A heißt **reduziert**, falls $\mathrm{Nil}(A) = (0)$ gilt, es also außer 0 keine nilpotenten Elemente gibt. △

Bemerkung 1.1.2. Offensichtlich gilt $I \subseteq \sqrt{I}$ für alle Ideale I. Im allgemeinen kann aber $\subsetneq$ gelten. Sei zum Beispiel $A = \mathbb{Z}$ und $I = (n)$ mit der Primzahlzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$. Dann gilt $\sqrt{I} = (p_1 \cdots p_r)$. △

Lemma 1.1.3. *Seien $I, J \subseteq A$ Ideale. Dann gilt*

(i) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(ii) $\sqrt{I} = A \Leftrightarrow I = A$.

(iii) *Ist* $I \subseteq J$ *so gilt* $\sqrt{J/I} = \sqrt{J}/I$ *im Ring* A/I.

Beweis. Aufgabe 1. □

Wir bezeichnen wie üblich mit $\mathrm{Spec}(A)$ die Menge aller Primideale von A.

Satz 1.1.4. *Für jedes Ideal* $I \subseteq A$ *gilt*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

Beweis. "$\subseteq$": Sei $s \in \sqrt{I}$, also $s^n \in I$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ folgt dann aus $s^n \in \mathfrak{p}$ offensichtlich $s \in \mathfrak{p}$ aus der Primidealeigenschaft.
"$\supseteq$": Sei $s \in A \setminus \sqrt{I}$, d.h. $s^n \notin I$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die multiplikative Menge $S = \{1, s, s^2, \cdots\}$ sowie die Lokalisierung $A_s := S^{-1}A$ und den natürlichen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon A &\to A_s \\ a &\mapsto a/1. \end{aligned}$$

Es gilt $1 \notin IA_s$, denn sonst wäre $1/1 = a/s^n$ mit einem $a \in I, n \in \mathbb{N}$, und damit $s^m \in I$ für ein m, ein Widerspruch.
Es gibt in A_s also ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ über IA_s, und $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ist dann ein Primideal in A mit $I \subseteq \mathfrak{p}$. Da $s/1$ in A_s invertierbar ist gilt außerdem $s \notin \mathfrak{p}$. □

Korollar 1.1.5. $\mathrm{Nil}(A)$ *ist der Durchschnitt aller Primideale von* A.

Ein Ring A heißt bekanntlich **noethersch**, falls jedes Ideal in A endlich erzeugt ist.

Satz 1.1.6. *Ist der Ring* A *noethersch, so auch der Polynomring* $A[t]$.

Beweis. Angenommen $I \subseteq A[t]$ ist ein nicht endlich erzeugtes Ideal. Wähle iterativ Elemente $p_1, p_2, \ldots \in I$ so, dass p_{n+1} von minimalem Grad aus $I \setminus (p_1, \ldots, p_n)$ ist. Ist $d_n = \deg(p_n)$, so gilt $d_1 \leq d_2 \leq \cdots$. Sei nun $a_n \in A$ der Leitkoeffizient des Polynoms p_n. Betrachte das Ideal

$$J = (a_n \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq A.$$

Da J nach Annahme an A endlich erzeugt ist, gibt es eine Gleichung

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} b_i a_i$$

mit $b_i \in A$. Setze nun

$$g := p_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} b_i p_i t^{d_{m+1}-d_i}.$$

Nach Konstruktion gilt $\deg(g) < \deg(p_{m+1})$, denn die Leitkoeffizienten heben sich gegenseitig gerade auf. Andererseits gilt wegen $p_{m+1} \in I \setminus (p_1, \ldots, p_m)$ auch $g \in I \setminus (p_1, \ldots, p_m)$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von p_{m+1}. □

Korollar 1.1.7 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei k ein Körper. Dann ist $k[\underline{x}]$ noethersch.*

Beweis. In Körpern gibt es nur die Ideale (0) und (1), beide sind endlich erzeugt. Wende nun Satz 1.1.6 iterativ auf die Adjunktion der einzelnen Variablen an. □

Der wichtigste grundlegende Satz der klassischen algebraischen Geometrie ist sicher der Nullstellensatz von Hilbert. Wir beweisen ihn später zunächst in seiner körpertheoretischen Form und werden ihn dann geometrisch interpretieren. Bevor wir ihn aber beweisen können, müssen wir uns mit der sogenannten *Ganzheit* von Ringerweiterungen befassen. Es handelt sich dabei um eine Variante des Begriffs einer algebraischen Körpererweiterung, die speziell auf Ringe zugeschnitten ist.

Definition 1.1.8. Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung.
(i) Ein Element $b \in S$ heißt **ganz über** R, falls $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ existieren mit

$$a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1} b^{n-1} + b^n = 0.$$

Eine solche Gleichung heißt **Ganzheitsgleichung** für b über R.
(ii) S heißt **ganz über** R, falls jedes Element $b \in S$ ganz über R ist. △

Bemerkung 1.1.9. (i) Wichtig am Begriff der Ganzheit ist, dass die Gleichung für b *normiert* sein muss. Sind R und S Körper, so kann man offensichtlich jede nichttriviale Gleichung normieren. Also ist ein ganzes Element dann einfach ein algebraisches Element.

(ii) Für $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ sind die einzigen über $\mathbb{Z}$ ganzen Elemente von $\mathbb{Q}$ die Elemente aus $\mathbb{Z}$ selbst. Das stimmt noch allgemeiner für die Inklusion $R \subseteq K$ eines nullteilerfreien faktoriellen Rings in seinen Quotientenkörper (Aufgabe 2).
(iii) Für $R \subseteq S$ und $b_1, \ldots, b_m \in S$ definieren wir $R[b_1, \ldots, b_m]$ als den Teilring von S, der von $b_1, \ldots, b_m$ und R erzeugt wird, also

$$R[b_1, \ldots, b_m] = \left\{ \sum_{e \in \mathbb{N}^m} a_e b_1^{e_1} \cdots b_m^{e_m} \mid a_e \in R \right\}.$$

Wenn man S als R-Modul auffasst, ist $R[b_1, \ldots, b_m]$ ein Untermodul, also insbesondere selbst ein R-Modul. $\triangle$

Satz 1.1.10. *Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $b_1, \ldots, b_m \in S$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $b_1, \ldots, b_m$ *sind ganz über* R.

(ii) $R[b_1, \ldots, b_m]$ *ist als* R*-Modul endlich erzeugt.*

(iii) $R[b_1, \ldots, b_m]$ *ist ganz über* R.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Durch Auflösen einer Ganzheitsgleichung für b_1 nach b_1^n erhält man

$$b_1^n = -\left(a_{n-1} b_1^{n-1} + \cdots + a_0\right)$$

für gewisse $a_i \in R$. Man kann die n-te Potenz von b_1 also immer durch niedrigere Potenzen von b_1 und Koeffizienten aus R ersetzen. Verfährt man analog mit den anderen b_i sieht man, dass $R[b_1, \ldots, b_m]$ von endlich vielen Produkten $b_1^{e_1} \cdots b_m^{e_m}$ erzeugt wird.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Endlich viele Elemente $1 = c_1, \ldots, c_n$ erzeugen den R-Modul $M := R[b_1, \ldots, b_m]$. Sei nun $c \in M$ beliebig gewählt. Da M auch ein Ring ist, gilt $c \cdot c_i \in M$ und es gibt also $a_{ij} \in R$ mit

$$c \cdot c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.$$

Für die Matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(R)$$

gilt dann

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Also liegt $(c_1, \ldots, c_n)^t$ im Kern von

$$N := cI_n - A.$$

Es gilt nun

$$\mathrm{adj}(N) \cdot N = \det(N) \cdot I_n$$

und also

$$\det(N) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Aus $c_1 = 1$ folgt $\det(N) = 0$. An der Leibnitzformel zur Berechnung der Determinante sieht man aber

$$\det(N) = c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_m$$

für gewisse $a_i \in R$. Das liefert eine Ganzheitsgleichung für c über R.
(iii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. □

1.2 Affine algebraische Varietäten

Im Folgenden sei stets k ein beliebiger Körper, und K ein *algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von* k. Man kann zum Beispiel $K = \overline{k}$ den algebraischen Abschluss von k wählen. K kann aber auch viel größer sein, z.B. $k = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{C}$. Essentiell für alles Folgende ist nur, dass K algebraisch abgeschlossen ist! Der Körper k wird auch als **Definitionskörper** bezeichnet, und K als **Koordinatenkörper**. Mit $\underline{x}$ bezeichnen wir das n-Tupel von Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$.

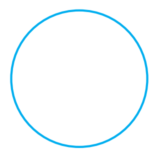
Definition 1.2.1. (i) Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ eine Menge von Polynomen. Wir setzen

$$\mathcal{V}(P) = \{a \in K^n \mid p(a) = 0 \, \forall p \in P\}$$

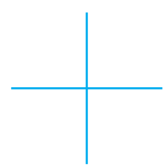
und nennen $\mathcal{V}(P)$ die **von** P **definierte affine Varietät**. Es ist die Lösungsmenge (über K) des von P definierten polynomialen Gleichungssystems.

(ii) Eine Teilmenge $V \subseteq K^n$ heißt **affine k-Varietät**, falls $V = \mathcal{V}(P)$ für eine Teilmenge $P \subseteq k[\underline{x}]$. Affine k-Varietäten sind also genau die Lösungsmengen von polynomialen Gleichungssystemen (definiert über k).
(iii) Eine **Hyperfläche** ist eine Varietät die von einem Polynom definiert wird, also von der Gestalt $\mathcal{V}(p)$ für ein $p \in k[\underline{x}]$ ist.
(iv) Sind $W \subseteq V$ affine k-Varietäten, so nennt man W eine **Untervarietät** von V.
(v) $\mathbb{A}^n := K^n$ nennt man den **n-dimensionalen affinen Raum**. $\triangle$

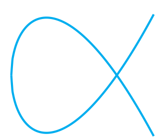
Beispiel 1.2.2. Achtung: Die folgenen Bilder zeigen nur die **reellen Punkte** der jeweiligen affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2$. Bekanntlich ist aber $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen, und man müsste die Varietäten etwa über $K = \mathbb{C}$ betrachten. Das ist aus Dimensionsgründen aber grafisch schlecht möglich. Das reelle Bild gibt aber häufig (nicht immer!) einen guten Eindruck der Varietäten.
(i) Sei $P = \{1 - x_1^2 - x_2^2\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Dann ist $\mathcal{V}(P)$ ein Kreis.



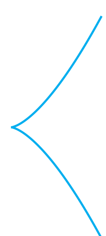
(ii) Sei $P = \{x_1 x_2\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Dann ist $\mathcal{V}(P)$ die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen.



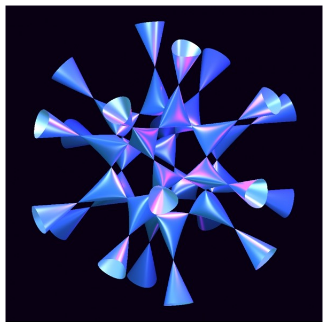
(iii) Sei $P = \{x_2^2 - x_1^2(x_1 + 1)\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Dann ist $\mathcal{V}(P)$ eine Schleifenkurve.



(iv) Sei $P = \{x_2^2 - x_1^3\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Dann ist $\mathcal{V}(P)$ eine Kurve mit Spitze.



(v) Sei $P = \{x_1^2 + x_2^2\} \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Hier zeigt das reelle Bild nur den Punkt $(0,0)$. Es ist aber zum Beispiel auch $(1,i) \in \mathcal{V}(P)$. Noch schlimmer ist der Fall $P = \{x_1^2 + x_2^2 + 1\}$, in dem man im reellen Bild gar nichts sieht. Wiederum ist die Varietät aber nicht leer, z.B. ist $(0,i) \in \mathcal{V}(P)$.
(vi) Einen Ausschnitt aus einer affine Hyperfläche in $\mathbb{A}^3$ zeigt das folgende Bild. Die definierende Gleichung hat Grad 6:



Author: Oliver Labs, www.imaginary.org, Projekt des Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, unterstützt durch die Klaus Tschira Stiftung

(vii) Die vorigen Bilder zeigen immer Hyperflächen. Es gibt aber sehr viel mehr Varietäten außer Hyperflächen. Zum Beispiel ist jeder Punkt $a \in k^n \subseteq \mathbb{A}^n$ ist eine affine k-Varietät. Es gilt nämlich

$$\{a\} = \mathcal{V}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

und $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \in k[\underline{x}]$. Für $a \in \mathbb{A}^n \setminus k^n$ stimmt das im Allgemeinen nicht. So ist zum Beispiel $\{i\} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{A}^1$ keine affine $\mathbb{R}$-Varietät. Jedes reelle Polynom das auf i verschwindet, verschwindet nämlich auch auf $-i$. Es ist aber

$$i \in \{i, -i\} = \mathcal{V}(x_1^2 + 1) \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{A}^1.$$

Noch deutlichere Beispiele gibt es etwa für den Fall $k = \mathbb{Q}, K = \mathbb{C}$. Auf dem Punkt $a = \pi \in \mathbb{A}^1$ verschwindet nur das Nullpolynom aus $\mathbb{Q}[\underline{x}]$. Insbesondere ist die einzige affine $\mathbb{Q}$-Varietät in $\mathbb{A}^1$ die a enthält der ganze affine Raum. $\triangle$

Lemma 1.2.3. *Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ und $I = (P)$ das von P erzeugte Ideal in $k[\underline{x}]$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}\left(\sqrt{I}\right).$$

Beweis. Es gilt $P \subseteq I \subseteq \sqrt{I}$, und damit $\mathcal{V}(\sqrt{I}) \subseteq \mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(P)$. Sei nun $p \in \sqrt{I}$, also

$$p^m = \sum_i f_i p_i$$

mit $p_i \in P, f_i \in k[\underline{x}]$. Daraus sieht man dass für $a \in \mathcal{V}(P)$ schon $p^m(a) = 0$ gilt, und aus der Nullteilerfreiheit von Körpern folgt $p(a) = 0$. Damit ist $p = 0$ auf $\mathcal{V}(P)$, und das zeigt $\mathcal{V}(P) \subseteq \mathcal{V}(\sqrt{I})$. □

Korollar 1.2.4. *Jede affine k-Varietät V ist von der Gestalt*

$$V = \mathcal{V}(p_1, \dots, p_r)$$

mit endlich vielen Polynomen $p_1, \dots, p_r \in k[\underline{x}]$.

Beweis. Sei $V = \mathcal{V}(P)$ mit $P \subseteq k[\underline{x}]$. Dann ist $(P) = (p_1, \dots, p_r)$ nach Korollar 1.1.7, und aus Lemma 1.2.3 folgt $V = \mathcal{V}(p_1, \dots, p_r)$. □

Lemma 1.2.5. *(i) $\emptyset$, $\mathbb{A}^n$ sind affine k-Varietäten.*
(ii) $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietäten $\Rightarrow$ $V_1 \cup V_2$ affine k-Varietät.
(iii) $V_\lambda \subseteq \mathbb{A}^n$ affine k-Varietät ($\lambda \in \Lambda$) $\Rightarrow$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ affine k-Varietät.
(iv) $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$ affine k-Varietäten $\Rightarrow$ $V \times W \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ affine k-Varietät.

Beweis. (i): $\emptyset = \mathcal{V}(1), \mathbb{A}^n = \mathcal{V}(0)$. ($ii$): Für zwei Ideale $I_1, I_2 \subseteq k[\underline{x}]$ gilt

$$\mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \mathcal{V}(I_1 \cap I_2) = \mathcal{V}(I_1 I_2).$$

Dabei ist "$\subseteq$" jeweils klar, da die Ideale immer kleiner werden. Sei nun $a \in \mathcal{V}(I_1 I_2)$ und $a \notin \mathcal{V}(I_1)$. Dann gibt es ein $p \in I_1$ mit $p(a) \neq 0$. Für jedes $q \in I_2$ ist nun $pq \in I_1 I_2$, und damit $0 = (pq)(a) = p(a)q(a)$. Aus der Nullteilerfreiheit von Körpern folgt also $q(a) = 0$ für alle $q \in I_2$, und damit $a \in \mathcal{V}(I_2)$.
(iii): Ist $V_\lambda = \mathcal{V}(P_\lambda)$ mit $P_\lambda \subseteq k[\underline{x}]$, so ist offensichtlich $\bigcap_\lambda V_\lambda = \mathcal{V}(\bigcup_\lambda P_\lambda)$.
(iv): Sei $V = \mathcal{V}(P)$ und $W = \mathcal{V}(Q)$ mit $P \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ und $Q \subseteq k[y_1, \dots, y_m]$. Dann ist $P \cup Q \subseteq k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ und

$$V \times W = \mathcal{V}(P \cup Q).$$ □

Wir halten die Konstruktionen aus dem letzten Beweis noch einmal fest:

Korollar 1.2.6. *Seien I_1, I_2, I_λ ($\lambda \in \Lambda$) Ideale in $k[\underline{x}]$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \mathcal{V}(I_1 \cap I_2) = \mathcal{V}(I_1 I_2)$$

und

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\sum I_\lambda\right).$$

Definition 1.2.7. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt

$$\mathcal{I}(V) := \{p \in k[\underline{x}] \mid p(a) = 0 \, \forall a \in V\}$$

das **Verschwindungsideal von** V. △

Lemma 1.2.8. *Seien $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ Teilmengen.*
(i) $\mathcal{I}(V)$ ist ein Radikalideal.
(ii) $V \subseteq W \Rightarrow \mathcal{I}(W) \subseteq \mathcal{I}(V)$.
(iii) $\mathcal{I}(V \cup W) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)$.
(iv) Ist V eine affine k-Varietät, so gilt $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$.
(v) Jede absteigende Folge $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$ von affinen k-Varietäten wird konstant.

Beweis. (i)-(iii) sind klar. Für (iv) sei $V = \mathcal{V}(I)$ für ein Ideal I. Dann gilt $I \subseteq \mathcal{I}(V)$ und damit $V = \mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))$. Die Inklusion "$\subseteq$" ist aber klar. In (v) erhalten wir die aufsteigende Folge der Ideale $\mathcal{I}(V_1) \subseteq \mathcal{I}(V_2) \subseteq \cdots$, und diese wird stationär nach dem Hilbertschen Basissatz. Aus (iv) folgt nach Anwenden von $\mathcal{V}(\cdot)$ dass auch die Folge der V_i stationär wird. □

Satz 1.2.9 (Hilberts Nullstellensatz, körpertheoretische Form)**.** *Sei F/k eine Körpererweiterung, und F sei als Ring über k endlich erzeugt. Dann ist F/k endlich (und damit algebraisch).*

Beweis. Es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ mit $F = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Wir beweisen die Aussage per Induktion über n.
$n = 1$: Es ist $F = k[\alpha]$ ein Körper, und also gibt es ein Polynom $p \in k[t]$ mit $\alpha^{-1} = p(\alpha)$. Daraus folgt $\alpha \cdot p(\alpha) - 1 = 0$, und also ist α algebraisch über k. Damit ist die Erweiterung endlich.
$n - 1 \to n$: Es ist $F = k(\alpha_1)[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, denn F ist ein Körper. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über $k(\alpha_1)$ sind. Es genügt nun zu zeigen, dass α_1 algebraisch über k ist. Dann ist die gesamte Erweiterung F/k algebraisch und damit endlich. Dass $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über $k(\alpha_1)$ sind bedeutet, dass es für sie Identitäten

$$u_i \alpha_i^d + \sum_{j=0}^{d-1} r_{ij} \alpha_i^j = 0$$

mit $u_i, r_{ij} \in k[\alpha_1]$ gibt (eventuelle Nenner wurden dabei hochmultipliziert). Sei $u := u_2 \cdots u_n \in k[\alpha_1]$. Dann sind $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ganz über dem Ring $k[\alpha_1, 1/u]$, und somit ist F nach Satz 1.1.10 eine ganze Ringerweiterung von $k[\alpha_1, 1/u]$. Angenommen α_1 ist transzendent über k, d.h. $k[\alpha_1]$ ist ein Polynomring. Dann können wir ein irreduzibles $p \in k[\alpha_1]$ wählen mit $p \nmid u$ (es gibt unendlich viele irreduzible Polynome im faktoriellen Ring $k[\alpha_1]$). Für p^{-1} wiederum gibt es nun eine Ganzheitsgleichung

$$p^{-m} + b_1 p^{-(m-1)} + \cdots + b_m = 0$$

mit $b_i \in k[\alpha_1, 1/u]$. Multiplikation mit p^m und einer genügend hohen Potenz von u liefert

$$u^r + a_1 p + \cdots + a_m p^m = 0$$

mit $a_i \in k[\alpha_1]$. Daraus folgt $p \mid u$, ein Widerspruch. $\square$

Korollar 1.2.10. *Sei A als Ring über k endlich erzeugt und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A. Dann ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von k.*

Beweis. $A/\mathfrak{m}$ ist als Ring über k immer noch endlich erzeugt, und andererseits ein Körper. $\square$

Korollar 1.2.11 (Hilberts Nullstellensatz, geometrische Form)**.** *Sei $I \subsetneq k[\underline{x}]$ ein echtes Ideal. Dann ist $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wähle ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von $k[\underline{x}]$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$. Nach Korollar 1.2.10 ist $k[\underline{x}]/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von k. Es gibt also eine k-Einbettung von $k[\underline{x}]/\mathfrak{m}$ nach K, und wir können also annehmen

$$k \subseteq k[\underline{x}]/\mathfrak{m} \subseteq K.$$

Setze $a_i := \overline{x_i}$, die Restklasse von x_i in $k[\underline{x}]/\mathfrak{m} \subseteq K$. Für jedes $p \in k[\underline{x}]$ gilt dann

$$p(a) = p(\overline{x}) = \overline{p},$$

und für $p \in I$ (sogar für $p \in \mathfrak{m}$) ist also $p(a) = 0$. Also gilt $a \in \mathcal{V}(I)$. $\square$

Bemerkung 1.2.12. Ohne Korollar 1.2.10 bekäme man im letzten Beweis nur die Aussage, dass $\mathcal{V}(I)$ über *irgendeinem* Erweiterungskörper von k (nämlich $k[\underline{x}]/\mathfrak{m}$) ein Element besitzt. Mit Korollar 1.2.10 sehen wir, dass es eine endliche Körpererweiterung ist, und damit über *jedem* algebraisch abgeschlossenen Oberkörper ein Element in $\mathcal{V}(I)$ existiert. In k selbst muss das aber nicht der Fall sein, wie man zum Beispiel für $k = \mathbb{Q}$ und $I = (x^2 - 2)$ oder $k = \mathbb{R}$ und $I = (x^2 + 1)$ sieht. $\triangle$

Bemerkung 1.2.13. Korollar 1.2.11 besagt, dass ein polynomiales Gleichungssystem $p_1 = 0, \ldots, p_r = 0$ mit $p_i \in k[\underline{x}]$ genau dann *keine* Lösung über K besitzt, wenn es eine Identität

$$f_1 p_1 + \cdots + f_r p_r = 1$$

mit $f_i \in k[\underline{x}]$ gibt. In Kapitel 2 werden wir sehen, wie man diese letzte Bedingung, und damit die Lösbarkeit eines Gleichungssystems, algorithmisch testen kann. △

Satz 1.2.14 (Hilberts Nullstellensatz, idealtheoretische Form)**.** *Für jedes Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ gilt*

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

Beweis. "$\supseteq$" ist klar. Für "$\subseteq$" sei $0 \neq p \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Betrachte das Ideal

$$J = (I, tp - 1) \subseteq k[t, \underline{x}].$$

Da $p \equiv 0$ auf $\mathcal{V}(I)$ gilt, folgt $\mathcal{V}(J) = \emptyset$. Nach Korollar 1.2.11 gibt es eine Identität

$$1 = a(tp - 1) + \sum_i b_i p_i$$

mit $a, b_i \in k[t, \underline{x}]$ und $p_i \in I$. Substituiert man p^{-1} für t und multipliziert mit einer genügend hohen Potenz von p ergibt sich

$$p^r = \sum_i \tilde{b}_i p_i,$$

mit $\tilde{b}_i \in k[\underline{x}]$, also $p \in \sqrt{I}$. □

Bemerkung 1.2.15. Man beachte, dass Satz 1.2.14 für jede Wahl des algebraisch abgeschlossenen Körpers K stimmt, und $\sqrt{I}$ davon aber nicht abhängt. Über welchem K man die Varietät betrachtet spielt also keine wirkliche Rolle. △

Beispiel 1.2.16. Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, etwa $V = \mathcal{V}(p)$, und

$$p = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$$

die Zerlegung in irreduzible Polynome, so gilt

$$\mathcal{I}(V) = (p_1 \cdots p_r).$$

△

Korollar 1.2.17. *Seien $I, J \subseteq k[\underline{x}]$ Ideale. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J) \Leftrightarrow \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}.$$

Beweis. Aus $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J)$ folgt offensichtlich $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$, und nach Satz 1.2.14 also $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Die andere Richtung folgt aus Lemma 1.2.3, denn $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$ und $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\sqrt{J})$. □

Korollar 1.2.18. *Die Zuordnung $V \mapsto \mathcal{I}(V)$ ist eine inklusionsumdrehende Bijektion zwischen der Menge aller affinen k-Varietäten in $\mathbb{A}^n$ und der Menge aller Radikalideale in $k[\underline{x}]$. Die Umkehrabbildung ist durch $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ gegeben.*

Beweis. Lemma 1.2.8 (iv) , Satz 1.2.14 und Korollar 1.2.17. □

Bemerkung 1.2.19. (i) Insbesondere entsprechen die maximalen Ideale in $k[\underline{x}]$ den minimalen affinen k-Varietäten $\neq \emptyset$.
(ii) Sei $a \in k^n \subseteq \mathbb{A}^n$. Dann ist $\{a\} = \mathcal{V}(\mathfrak{m}_a)$ mit

$$\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n).$$

Man sieht leicht dass $\mathcal{I}(\{a\}) = \mathfrak{m}_a$ gilt. Insbesondere ist $\mathfrak{m}_a$ maximal.
(iii) Nicht jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq k[\underline{x}]$ muss von der Gestalt $\mathfrak{m}_a$ sein, und nicht jede minimale Varietät $\neq \emptyset$ muss von der Gestalt $\{a\}$ sein. Für $k = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ ist beispielsweise $\mathfrak{m} = (x_1^2 + 1)$ maximal in $\mathbb{R}[x_1]$ und entspricht der minimalen $\mathbb{R}$-Varietät $\{i, -i\} \subseteq \mathbb{A}^1$. △

Korollar 1.2.20. *Die Zuordnung $a \mapsto \mathfrak{m}_a$ ist eine Bijektion zwischen k^n und den maximalen Idealen von $k[\underline{x}]$ mit Restklassenkörper k. Falls $k = \overline{k}$ gilt sind das alle maximalen Ideale von $k[\underline{x}]$.*

Beweis. Die Injektivität ist klar, und es gilt $k[\underline{x}]/\mathfrak{m}_a = k$. Zur Surjektivität sei $\mathfrak{m} \subseteq k[\underline{x}]$ ein maximales Ideal mit $k[\underline{x}]/\mathfrak{m} = k$. Sei $a_i := \overline{x}_i \in k$. Dann gilt $\overline{x_i - a_i} = 0$, und damit $\mathfrak{m}_a \subseteq \mathfrak{m}$. Daraus folgt die Gleichheit. Da nach Korollar 1.2.10 $k[\underline{x}]/\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal eine endliche Körpererweiterung von k ist, gilt im Fall $k = \overline{k}$ immer $k[\underline{x}]/\mathfrak{m} = k$. □

1.3 Die Zariskitopologie

Definition 1.3.1. Die k-**Zariskitopologie** auf $\mathbb{A}^n$ hat genau die affinen k-Varietäten als abgeschlossene Mengen. Die k-Zariskitopologie auf $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ist die davon induzierte Teilraumtopologie. △

Alle folgenden topologischen Begriffe beziehen sich immer auf die k-Zariski-topologie, sofern wir über affine k-Varietäten sprechen.

Bemerkung/Beispiel 1.3.2. (i) Die k-Zariskitopologie ist wirklich eine Topologie. Das ist die Aussage von Lemma 1.2.5.
(ii) Die Zariskitopologie ist die natürlichste Topologie auf $\mathbb{A}^n$, denn es werden zur Definition nur polynomiale Gleichungen, d.h. die bereits gegebene Körperstruktur verwendet.
(iii) Im Fall $k = \overline{k} = K$ sind die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1$ genau die endlichen Teilmengen und $\mathbb{A}^1$.
(iv) Die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ ist *nicht* die Produkttopologie (Aufgabe 4).
(v) Für $k \subseteq k' \subseteq K$ ist die k'-Zariskitopologie i.A. feiner als die k-Zariski-topologie. Zum Beispiel ist $\{i\} \subseteq \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}^1$ abgeschlossen in der $\mathbb{C}$-Zariski-topologie, aber nicht in der $\mathbb{R}$-Zariskitopologie.
(vi) Für jedes $p \in k[\underline{x}]$ ist

$$\mathcal{D}(p) := \{a \in \mathbb{A}^n \mid p(a) \neq 0\}$$

eine offene Menge. Jede offene Menge ist von der Gestalt

$$\mathcal{D}(p_1) \cup \cdots \cup \mathcal{D}(p_r)$$

mit $p_1, \ldots, p_r \in k[\underline{x}]$ (vergleiche Korollar 1.2.4).
(vii) Die Abbildung

$$a \mapsto (1/p(a), a)$$

definiert eine kanonische Bijektion zwischen der offenen Menge $\mathcal{D}(p) \subseteq \mathbb{A}^n$ und der Varietät $\mathcal{V}(tp - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. △

Lemma 1.3.3. *(i) Für $X \subseteq \mathbb{A}^n$ gilt $\overline{X} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.*
(ii) Es gilt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ für je zwei nichtleere offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{A}^n$. Insbesondere ist jede nichtleere offene Menge dicht in $\mathbb{A}^n$.
(iii) Die Zariskitopologie ist nicht hausdorffsch.

Beweis. (i) $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ ist abgeschlossen und enthält X. Das beweist "$\subseteq$". Für "$\supseteq$" verwende dass $\mathcal{I}(X) \supseteq \mathcal{I}(\overline{X})$ und damit $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\overline{X})) = \overline{X}$ gilt (Lemma 1.2.8 (iv)).
(ii) Aus $\mathcal{D}(p) \cap \mathcal{D}(q) = \emptyset$ folgt $pq \equiv 0$ auf $\mathbb{A}^n$ und damit $pq = 0$, denn K ist unendlich. Daraus folgt $p = 0$ oder $q = 0$, und damit $\mathcal{D}(p) = \emptyset$ oder $\mathcal{D}(q) = \emptyset$.
(iii) folgt direkt aus (ii). □

Definition 1.3.4. Sei X ein topologischer Raum.
(i) X heiß **irreduzibel**, falls $X \neq \emptyset$ und für $A, B \subseteq X$ abgeschlossen gilt

$$X = A \cup B \;\Rightarrow\; A = X \text{ oder } B = X.$$

Andernfalls heißt X **reduzibel**.
(ii) $Y \subseteq X$ heißt **irreduzible Komponente von** X, falls Y eine maximale (in der Teilraumtopologie) irreduzible Teilmenge ist. △

Bemerkung 1.3.5. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ kann man die Irreduzibilität (bezüglich der Teilraumtopologie) so formulieren:

$$A, B \text{ abgeschlossen in } X,\; Y \subseteq A \cup B \;\Rightarrow\; Y \subseteq A \text{ oder } Y \subseteq B.$$

Beachte jedoch dass Irreduzibilität eine Eigenschaft des topologischen Raumes an sich ist, und nicht relativ zu einem eventuell umgebenden Raum definiert ist (im Unterscheid zum Beispiel zur Abgeschlossenheit). △

Lemma 1.3.6. *Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum.*
(i) Es sind äquivalent:

(a) X ist irreduzibel.

(b) Jede nichtleere offene Teilmenge von X ist dicht.

(c) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nichtleeren Schnitt.

(ii) Für $Y \subseteq X$ gilt: Y irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\overline{Y}$ irreduzibel.
(iii) Jede irreduzible Komponente von X ist abgeschlossen.

Beweis. Aufgabe 5. □

Bemerkung/Beispiel 1.3.7. (i) Für Hausdorffräume ist der Begriff der Irreduzibilität nicht sehr sinnvoll. Ein Hausdorffraum X ist irreduzibel genau dann wenn $|X| = 1$ gilt. Insbesondere sind die irreduziblen Komponenten eines Hausdorffraums einfach seine einelementigen Teilmengen.
(ii) $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel in der k-Zariskitopologie. Das folgt aus Lemma 1.3.3 und Lemma 1.3.6. △

Lemma 1.3.8. *Jede irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X ist in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Insbesondere ist X die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.*

Beweis. Sei $Y \subseteq X$ irreduzibel. Betrachte

$$\mathcal{M} = \{Z \subseteq X \mid Z \text{ irreduzibel}, Y \subseteq Z\}.$$

$\mathcal{M}$ ist nichtleer, denn $Y \in \mathcal{M}$. Sei $(Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Kette in $\mathcal{M}$. Dann ist $\bigcup_\lambda Z_\lambda$ wieder irreduzibel: aus $\bigcup_\lambda Z_\lambda \subseteq A \cup B$ mit A, B abgeschlossen folgt direkt für alle $\lambda : Z_\lambda \subseteq A$ oder $Z_\lambda \subseteq B$. Aufgrund der Kettenbedingung muss aber immer derselbe Fall eintreten.
Also ist $\bigcup_\lambda Z_\lambda \in \mathcal{M}$, und mit dem Zorn'schen Lemma besitzt $\mathcal{M}$ also ein maximales Element. Das ist offensichtlich eine irreduzible Komponente von X, die Y enthält.
Da $\{x\} \subseteq X$ irreduzibel ist für jedes $x \in X$ gilt die zweite Aussage. □

Bemerkung 1.3.9. Jeder irreduzible topologische Raum ist zusammenhängend. Insbesondere ist jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums X Vereinigung von irreduziblen Komponenten von X. △

Definition 1.3.10. Ein topologischer Raum X heiß **noethersch**, falls jede Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird. △

Lemma 1.3.11. *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*
(i) X ist noethersch.
(ii) Jedes nichtleere System abgeschlossener Teilmengen von X hat ein minimales Element.
(iii) Jede offene Teilmenge von X ist quasikompakt, i.e. hat die endliche Überdeckungseigenschaft.

Beweis. Aufgabe 6. □

Beispiel 1.3.12. (i) Jeder Teilraum eines noetherschen Raumes ist wieder noethersch.
(ii) $\mathbb{A}^n$ ist noethersch in der k-Zariskitopologie (Lemma 1.2.8 (v)).
(iii) Jede affine k-Varietät ist noethersch in der k-Zariskitopologie. △

Satz 1.3.13. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum.*
(i) X hat nur endlich viele irreduzible Komponenten $X_1, \ldots, X_r$.
(ii) Sind $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X, so gilt

$$X_i \nsubseteq \bigcup_{j\neq i} X_j$$

für alle $i = 1, \ldots, r$.

(iii) Ist $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_s$ eine Überdeckung mit abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Y_i, die

$$Y_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} Y_j$$

für alle $i = 1, \ldots, s$ erfüllen, so sind $Y_1, \ldots, Y_s$ die irreduziblen Komponenten von X.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen Y von X, welche *nicht* die Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen sind. Wir zeigen $\mathcal{M} = \emptyset$. Angenommen $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Dann existiert in $\mathcal{M}$ ein minimales Element Y, denn X ist noethersch. Es ist Y aber insbesondere reduzibel, d.h. $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $Y_i \subseteq X$ abgeschlossen und $Y_1, Y_2 \subsetneq Y$. Daraus folgt $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{M}$, und somit sind Y_1, Y_2 Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen, und damit auch Y, ein Widerspruch.
Also ist insbesondere X Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen, und damit auch irreduzibler Komponenten $X_1, \ldots, X_r$, nach Lemma 1.3.8. Sei nun Z eine weitere irreduzible Komponente von X. Dann gilt

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} Z \cap X_i,$$

und aus der Abgeschlossenheit der X_i und der Irreduzibilität von Z folgt $Z \subseteq X_i$ für ein i, und damit gilt Gleichheit. Das beweist (i).
(ii) Aus $X_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j$ folgt $X_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_i \cap X_j$, und damit wie eben $X_i \subseteq X_j$ für ein $j \neq i$, ein Widerspruch.
(iii) Seien wieder $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann folgt aus $X_i \subseteq \bigcup_j Y_j \cap X_i$ wiederum $X_i \subseteq Y_j$ für ein j, und damit Gleichheit. Also sind die irreduziblen Komponenten von X unter den Y_j. Aus $Y_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} Y_j$ folgt dass es keine weiteren/vielfachen Mengen unter den Y_j gibt. $\square$

Korollar 1.3.14. *Sei V eine affine k-Varietät. Dann gibt es irreduzible affine k-Varietäten $V_1, \ldots, V_r$ mit*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$$

und

$$V_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$$

für $i = 1, \ldots, r$. Durch diese Bedingung sind die V_i eindeutig bestimmt, es sind die irreduziblen Komponenten von V.

Satz 1.3.15. *Sei V eine affine k-Varietät. Dann gilt*

$$V \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow \mathcal{I}(V) \subseteq k[\underline{x}] \text{ Primideal.}$$

Beweis. Sei $I := \mathcal{I}(V)$. Dann gilt $V = \mathcal{V}(I)$.
Sei nun zuerst V irreduzibel. Aus $V \neq \emptyset$ folgt $I \neq (1)$. Seien weiter $p, q \in k[\underline{x}]$ mit $pq \in I$. Dann gilt $V \subseteq \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q)$, und aus der Irreduzibilität von V folgt o.B.d.A. $V \subseteq \mathcal{V}(p)$. Das bedeutet aber $p \in I$. Also ist I ein Primideal.
Sei umgekehrt I ein Primideal und

$$V \subseteq \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \mathcal{V}(I_1 I_2)$$

für zwei Ideale $I_1, I_2 \subseteq k[\underline{x}]$. Daraus folgt direkt $I_1 I_2 \subseteq I$, und aus der Primidealeigenschaft von I o.B.d.A. dann $I_1 \subseteq I$. Das wiederum impliziert $V \subseteq \mathcal{V}(I_1)$, und also ist V irreduzibel. □

Korollar 1.3.16. *Die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ definiert eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen $\operatorname{Spec}(k[\underline{x}])$ und der Menge aller irreduziblen affinen k-Varietäten in $\mathbb{A}^n$.*

Korollar 1.3.17. *Über jedem Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ gibt es nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. Es gilt*

$$\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r.$$

Man nennt $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die **minimalen Primteiler von** *I.*

Beweis. Die minimalen Primideale über I sind die minimalen Primideale über $\sqrt{I}$, und diese entsprechen nach Korollar 1.2.18 und Korollar 1.3.16 genau den maximalen irreduziblen Teilmengen von $V = \mathcal{V}(I)$. Davon gibt es nur endlich viele, nach Korollar 1.3.14. Nach Satz 1.1.4 ergibt deren Durchschnitt das Radikal von I. □

Beispiel 1.3.18. (i) Sei $V = \mathcal{V}(p)$ eine Hyperfläche und $p_1, \ldots, p_r$ die verschiedenen irreduziblen Faktoren von p. Dann sind die Varietäten $\mathcal{V}(p_i)$ die irreduziblen Komponenten von V, und die Ideale (p_i) die minimalen Primteiler von (p).
(ii) Die Varietät $\mathcal{V}(x_1 x_2)$ (vergleiche Beispiel 1.2.2 (ii)) hat die beiden irreduzible Komponenten $\mathcal{V}(x_1)$ und $\mathcal{V}(x_2)$. V ist hier zusammenhängend.
(iii) Die Varietät $\mathcal{V}(x_1(x_1 - 1), x_2(x_1 - 1))$ hat die irreduziblen Komponenten $\mathcal{V}(x_1 - 1)$ und $\mathcal{V}(x_1, x_2)$. Das sieht man am einfachsten mit Korollar 1.3.14. Hier sind die beiden irreduziblen Komponenten auch gleichzeitig die Zusammenhangskomponenten.

(iv) Die Varietät $V=\mathcal{V}(x_1^2+x_2^2)\subseteq\mathbb{A}^2=\mathbb{C}^2$ ist irreduzibel in der $\mathbb{R}$-Zariskitopologie, denn $x_1^2+x_2^2$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[x_1,x_2]$. In der $\mathbb{C}$-Zariski-topologie ist V hingegen reduzibel:

$$V=\mathcal{V}(x_1+ix_2)\cup\mathcal{V}(x_1-ix_2).$$

In beiden Topologien ist V zusammenhängend. $\triangle$

Definition 1.3.19. Sei A ein Ring und I,J Ideale in A. Dann ist

$$(I:J):=\{a\in A\mid aJ\subseteq I\}$$

ein Ideal von A, genannt der **Idealquotient von** I **nach** J. Seine geometrische Interpretation liefert der folgende Satz.

Satz 1.3.20. *Seien $I,J\subseteq k[\underline{x}]$ Ideale, mit $I=\sqrt{I}$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(I:J)=\overline{\mathcal{V}(I)\setminus\mathcal{V}(J)}$$

(wobei der Abschluss natürlich in der k-Zariskitopologie gemeint ist).

Beweis. Wir zeigen dass $(I:J)=\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)\setminus\mathcal{V}(J))$ gilt. Mit Lemma 1.3.3 (i) folgt dann die Aussage.
Für "$\subseteq$" sei $p\in(I:J)$ und $a\in\mathcal{V}(I)\setminus\mathcal{V}(J)$. Dann gibt es $q\in J$ mit $q(a)\neq 0$. Aus $pq\in I$ folgt dann aber $0=pq(a)$ und daraus $p(a)=0$.
Für "$\supseteq$" sei $p\in\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)\setminus\mathcal{V}(J))$ und $q\in J$. Dann gilt $pq\equiv 0$ auf ganz $\mathcal{V}(I)$, und also $pq\in\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))=\sqrt{I}=I$. Das zeigt $p\in(I:J)$. $\square$

Beispiel 1.3.21. (i) Sei $V=\mathcal{V}(p)\subseteq\mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, und $p=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ die Zerlegung in irreduzible Faktoren. Dann ist $I=(p_1\cdots p_r)$ ein Radikalideal welches V definiert, und $\mathcal{V}(p_1),\ldots,\mathcal{V}(p_r)$ sind die irreduziblen Komponenten von V. Es gilt

$$\overline{V\setminus\mathcal{V}(p_i)}=\mathcal{V}(p_1\cdots p_{i-1}\cdot p_{i+1}\cdots p_r),$$

denn $(I:p_i)=(p_1\cdots p_{i-1}\cdot p_{i+1}\cdots p_r)$.
(ii) Ein explizites Beispiel ist $V=\mathcal{V}(x_1x_2)$, mit

$$V\setminus\mathcal{V}(x_1)=\left\{(a,b)\in\mathbb{A}^2\mid a\neq 0,b=0\right\},$$

also die x_1-Achse ohne den Ursprung, und das ist keine affine k-Varietät. Es ist

$$\overline{V\setminus\mathcal{V}(x_1)}=\mathcal{V}(x_1x_2:x_1)=\mathcal{V}(x_2)=\{(a,b)\mid b=0\}$$

die komplette x_1-Achse.

1.4 Reguläre Funktionen und Morphismen

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine k-Varietät. Jedes Polynom $p \in k[\underline{x}]$ definiert eine polynomiale Abbildung $p\colon \mathbb{A}^n \to K = \mathbb{A}^1$, und durch Einschränkung auch eine Abbildung

$$p\colon V \to \mathbb{A}^1.$$

Zwei Polynome $p, q \in k[\underline{x}]$ definieren dabei dieselbe Abbildung auf V genau dann wenn $p - q \equiv 0$ auf V und damit $p - q \in \mathcal{I}(V)$ gilt. *Also identifizieren sich die polynomialen Abbildungen $V \to \mathbb{A}^1$ genau mit den Elementen von $k[\underline{x}]/\mathcal{I}(V)$.*

Zur Erinnerung: eine k-**Algebra** ist eine Ringerweiterung von k.

Definition 1.4.1. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine k-Varietät. Dann heißt

$$k[V] := k[\underline{x}]/\mathcal{I}(V)$$

der **affine Koordinatenring** oder die **affine Koordinatenalgebra von** V. Beachte nochmals dass $\mathcal{I}(V)$ und damit $k[V]$ nicht von der Wahl des algebraisch abgeschlossenen Körpers K abhängt!
Elemente von $k[V]$ heißen **reguläre Funktionen auf** V**.** Reguläre Funktionen können als polynomiale Funktionen auf V interpretiert werden. △

Beispiel 1.4.2. (i) $k[\mathbb{A}^n] = k[\underline{x}]$ und $k[\emptyset] = \{0\}$.
(ii) Ist $V = \mathcal{V}(p)$ eine Hyperfläche mit p quadratfrei, gilt $k[V] = k[\underline{x}]/(p)$. △

Lemma 1.4.3. *(i) Für jede affine Varietät V ist $k[V]$ eine endlich erzeugte, reduzierte k-Algebra.*
(ii) Sind $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ affine Varietäten mit $V \cap W = \emptyset$, so gilt

$$k[V \cup W] \cong k[V] \times k[W].$$

Insbesondere gilt für endliche Varietäten $V = \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq k^n$

$$k[V] \cong \underbrace{k \times \cdots \times k}_{r}.$$

Beweis. (i) ist klar, denn $k[\underline{x}]$ ist endlich erzeugt und $\mathcal{I}(V)$ ist ein Radikalideal.
Für (ii) verwende

$$(1) = \mathcal{I}(V \cap W) = \sqrt{\mathcal{I}(V) + \mathcal{I}(W)} = \mathcal{I}(V) + \mathcal{I}(W),$$

wobei wir Lemma 1.1.3 (ii) benutzen. Aus dem chinesischen Restsatz folgt dann

$$k[V \cup W] = k[\underline{x}]/(\mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)) \cong k[\underline{x}]/\mathcal{I}(V) \times k[\underline{x}]/\mathcal{I}(W) = k[V] \times k[W].$$

Die zweite Aussage folgt aus $k[\{a\}] = k[\underline{x}]/\mathfrak{m}_a \cong k$ für $a \in k^n$. □

Bemerkung 1.4.4. Die Ideale von $k[V]$ stehen in Bijektion zu den Idealen von $k[\underline{x}]$, welche über $\mathcal{I}(V)$ liegen. Dasselbe gilt für Radikal- und Primideale. Diese Ideale entsprechen wiederum Untervarietäten von V. Damit erhalten wir die folgende relative Version von Korollar 1.2.18:
Die Zuordnung

$$I \mapsto \mathcal{V}_V(I) := \{a \in V \mid p(a) = 0 \,\forall p \in I\}$$

liefert eine Bijektion zwischen Radikalidealen von $k[V]$ und Untervarietäten von V. Dabei entsprechen Primideale gerade irreduziblen Varietäten. Die Umkehrabbildung ist

$$W \mapsto \mathcal{I}_V(W) := \{p \in k[V] \mid p(a) = 0 \,\forall a \in W\}.$$

Für $p \in k[V]$ setzen wir

$$\mathcal{D}_V(p) := \{a \in V \mid p(a) \neq 0\}.$$

Jede offene Menge der k-Zariskitopologie auf V ist eine endlich Vereinigung von solchen $\mathcal{D}(p_i)$. △

Bemerkung 1.4.5. Beim Übergang von V zu $k[V]$ geht keine Information verloren; aus $k[V]$ zusammen mit den Erzeugern $\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n$ kann man V auf verschiedene Weise zurückkonstruieren.
(i) Sei $\pi\colon k[\underline{x}] \twoheadrightarrow k[V]$ die kanonische Surjektion $x_i \mapsto \overline{x}_i$. Dann gilt offensichtlich $\ker(\pi) = \mathcal{I}(V)$, und also

$$V = \mathcal{V}(\ker(\pi)).$$

(ii) Es gibt eine Bijektion

$$\begin{aligned} K^n &\longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(k[\underline{x}], K) \\ a &\mapsto \mathrm{e}_a \\ (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) &\leftarrow\!\shortmid \alpha. \end{aligned}$$

Dabei entsprechen die Punkte $a \in V$ genau den $\alpha \in \mathrm{Hom}(k[\underline{x}], K)$ mit $\alpha \equiv 0$ auf $\mathcal{I}(V)$, und damit den Elementen von $\mathrm{Hom}(k[V], K)$. Wir erhalten also die Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(k[V], K) &\to V \\ \alpha &\mapsto (\alpha_1(\overline{x}_1), \ldots, \alpha(\overline{x}_n)). \end{aligned}$$

△

Korollar 1.4.6. *Jede endlich erzeugte, reduzierte k-Algebra A ist isomorph zur Koordinatenalgebra einer affinen k-Varietät.*

Beweis. Folgt direkt aus der Konstruktion von Bemerkung 1.4.5 (i): wähle Erzeuger $a_1, \dots, a_n$ von A und betrachte die Surjektion

$$\begin{aligned} \pi \colon k[\underline{x}] &\twoheadrightarrow A \\ x_i &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

Für $V = \mathcal{V}(\ker(\pi))$ gilt dann

$$k[V] = k[\underline{x}]/\mathcal{I}(V) = k[\underline{x}]/\ker(\pi) \cong A.$$

Dabei verwenden wir dass $\ker(\pi)$ ein Radikalideal ist, was aus der Reduziertheit von A folgt. □

Definition 1.4.7. Seine $V \subseteq \mathbb{A}^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}^m$ affine k-Varietäten.
(i) Ein **(k-)Morphismus von** V **nach** W ist eine Abbildung

$$p \colon V \to W$$

für die $p_1, \dots, p_m \in k[V]$ existieren mit

$$p(a) = (p_1(a), \dots, p_m(a)) \quad \forall a \in V.$$

Wir schreiben dann kurz $p = (p_1, \dots, p_m)$.
(ii) Ein (k-)Morphismus $p \colon V \to W$ ist ein **(k-)Isomorphismus**, falls ein k-Morphismus $q \colon W \to V$ existiert mit

$$q \circ p = \mathrm{id}_V \text{ und } p \circ q = \mathrm{id}_W.$$

(iii) Zwei affine k-Varietäten V, W heißen **(k-)isomorph**, falls ein Isomorphismus $p \colon V \to W$ existiert. Wir schreiben dann $V \cong_k W$ (oder $V \cong W$ falls sich k aus dem Kontext ergibt).
(iv) Mit $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller k-Homomorphismen von V nach W. △

Satz 1.4.8. *Sei $p \colon V \to W$ ein k-Homomorphismus. Für jedes $q \in k[W]$ ist dann*

$$p^*(q) := q \circ p \in k[V]$$

eine reguläre Funktion auf V. Die so definierte Abbildung

$$\begin{aligned} p^*\colon k[W] &\to k[V] \\ q &\mapsto p^*(q) \end{aligned}$$

ist ein k-Algebrahomomorphismus. Die so definierte Abbildung

$$\begin{aligned} {}^*\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to \operatorname{Hom}(k[W],k[V]) \\ p &\mapsto p^* \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis. Da die Hintereinanderausführung von zwei polynomialen Abbildungen offensichtlich wieder polynomial ist, ist die Hintereinanderausführung von zwei k-Morphismen ein k-Morphismus. Deshalb ist $p^*(q) = q \circ p \in \operatorname{Hom}(V,\mathbb{A}^1) = k[V]$. Die Abbildung p^* ist offensichtlich ein k-Algebrahomo-morphismus. Noch zu zeigen ist die Bijektivität von *. Dazu geben wir die Umkehrabbildung an.
Es ist $k[W] = k[y_1,\ldots,y_m]/\mathcal{I}(W) = k[\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m]$. Sei nun $\varphi\colon k[W] \to k[V]$ ein k-Algebrahomomorphismus. Setze

$$p_\varphi := (\varphi(\overline{y}_1),\ldots,\varphi(\overline{y}_m)) \in \operatorname{Hom}(V,\mathbb{A}^m).$$

Wir zeigen dass sogar $p_\varphi\colon V \to W$ gilt. Für $q \in k[\underline{y}]$ und $a \in V$ gilt nämlich

$$q(p_\varphi(a)) = q(\varphi(\overline{y}_1)(a),\ldots,\varphi(\overline{y}_m)(a)) = \varphi(q(\overline{y}))(a) = \varphi(\overline{q})(a).$$

Ist nun $q \in \mathcal{I}(W)$ so gilt $\overline{q} = 0$ in $k[W]$, und also $q(p_\varphi(a)) = 0$. Das beweist $p_\varphi(a) \in W$, und also $p_\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$.
Die somit definierte Zuordnung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(k[W],k[V]) &\to \operatorname{Hom}(V,W) \\ \varphi &\mapsto p_\varphi \end{aligned}$$

ist aber die Umkehrabbildung zu *, wie man in Aufgabe 10 nachrechne. □

Bemerkung 1.4.9. Wir halten noch einmal fest: für $k[W] = k[\underline{y}]/\mathcal{I}(W)$ ist die Umkehrabbildung zu

$$\begin{aligned} {}^*\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to \operatorname{Hom}(k[W],k[V]) \\ p &\mapsto p^* \end{aligned}$$

die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(k[W],k[V]) &\to \operatorname{Hom}(V,W) \\ \varphi &\mapsto (\varphi(\overline{y}_1),\ldots,\varphi(\overline{y}_m)). \end{aligned}$$

△

Bemerkung 1.4.10. Die Bijektionen aus Bemerkung 1.4.9 liefern eine *Äquivalenz von Kategorien*, zwischen der Kategorie der affinen k-Varietäten mit k-Morphismen und der Kategorie der endlich erzeugten reduzierten k-Algebren mit k-Algebrahomomorphismen. Ohne diese Begriffe genau zu definieren, halten wir das folgende fest:
Zunächst ist jede endlich erzeugte reduzierte k-Algebra die Koordinatenalgebra einer affinen k-Varietät (Korollar 1.4.6). Weiter ist * eine Bijektion, d.h. die Morphismen der Varietäten und die Morphismen der dazugehörenden Algebren entsprechen sich eins zu eins. Weiter hat * die folgende *funktorielle Eigenschaft*: für $p \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $q \in \operatorname{Hom}(W, X)$ gilt

$$(q \circ p)^* = p^* \circ q^*$$

sowie

$$\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{k[V]}.$$

Daraus ergibt sich, dass sich jede Frage über Varietäten in eine äquivalente Frage über endlich erzeugte reduzierte Algebren übersetzen lässt, und umgekehrt. Insbesondere erhält man daraus den nächsten Satz. △

Satz 1.4.11. *Ein k-Morphismus $p\colon V \to W$ von Varietäten ist ein Isomorphismus genau denn wenn $p^*\colon k[W] \to k[V]$ ein Isomorphismus von k-Algebren ist. Insbesondere gilt*

$$V \cong W \Leftrightarrow k[V] \cong k[W].$$

Beweis. Aufgabe 11. □

Beispiel 1.4.12. (i) Erste einfache Beispiele von k-Morphismen sind

- Inklusionen von Untervarietäten $\mathcal{V}_V(I) \hookrightarrow V$ für $I \subseteq k[V]$.
- Projektionen $\pi\colon V_1 \times V_2 \to V_1;\ (a, b) \mapsto a$, für affine Varietäten V_1, V_2.

(ii) Sei $P = \mathcal{V}(x_1^2 - x_2) \subseteq \mathbb{A}^2$ eine Parabel, und $\pi\colon P \to \mathbb{A}^1;\ (a_1, a_2) \mapsto a_1$. Dann ist π ein k-Isomorphismus. Man kann entweder die Umkehrabbildung $r \mapsto (r, r^2)$ direkt angeben. Oder man betrachtet

$$k[P] = k[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2) = k[\overline{x}_1, \overline{x}_2] = k[\overline{x}_1]$$

und $k[\mathbb{A}^1] = k[t]$ und die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \pi^*\colon k[\mathbb{A}^1] &\to k[P] \\ t &\mapsto \overline{x}_1. \end{aligned}$$

Dann ist π^* offensichtlich ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\overline{x}_1 \mapsto t, \overline{x}_2 \mapsto t^2$.
(iii) Sei $C = \mathcal{V}(x_1^3 - x_2^2)$ eine spitze Kurve (vergleiche Beispiel 1.2.2 (iv)). Dann gibt es einen Morphismus

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{A}^1 &\to C \\ r &\mapsto (r^2, r^3) \end{aligned}$$

der sogar bijektiv ist, wie man sich leicht überlegt (Aufgabe 12). Die Kurve C erlaubt also eine bijektive *polynomiale Parametrisierung* durch $\mathbb{A}^1$. Trotzdem ist p *kein* k-Isomorphismus. Für die Umkehrabbildung müsste man nämlich Wurzeln ziehen, was nicht polynomial möglich ist. Ein exakter Beweis benützt aber die Koordinatenringe. Es ist $k[C] = k[x_1, x_2]/(x_1^3 - x_2^2) = k[\overline{x}_1, \overline{x}_2], k[\mathbb{A}^1] = k[t]$ und

$$\begin{aligned} p^*\colon k[C] &\to k[\mathbb{A}^1] \\ \overline{x}_1 &\mapsto t^2 \\ \overline{x}_2 &\mapsto t^3. \end{aligned}$$

Es ist p^* offensichtlich nicht surjektiv, und also ist weder p^* noch p ein Isomorphismus (nach Satz 1.4.11). *Bijektivität eines k-Morphismus von Varietäten impliziert also nicht Isomorphie!* △

Satz 1.4.13. *Sei $p\colon V \to W$ ein k-Morphismus von affinen Varietäten und $\alpha := p^*\colon k[W] \to k[V]$ der induzierte Algebrahomomorphismus der Koordinatenringe.*
(i) Für jedes Ideal $J \subseteq k[W]$ gilt

$$p^{-1}(\mathcal{V}_W(J)) = \mathcal{V}_V(\alpha(J)).$$

Insbesondere ist das Urbild einer affinen Varietät unter einem Morphismus wieder eine affine Varietät.
(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq k[V]$ gilt

$$\overline{p(\mathcal{V}_V(I))} = \mathcal{V}_W(\alpha^{-1}(I)).$$

Insbesondere ist $\mathcal{I}_W(p(V)) = \ker(\alpha)$.

Beweis. Für $a \in V$ und $q \in k[W]$ gilt $q(p(a)) = \alpha(q)(a)$. Daraus folgt (i), denn es gilt

$$\begin{aligned} p(a) \in \mathcal{V}_W(J) &\Leftrightarrow q(p(a)) = 0 \,\forall q \in J \\ &\Leftrightarrow \alpha(q)(a) = 0 \,\forall q \in J \\ &\Leftrightarrow a \in \mathcal{V}_V(\alpha(J)). \end{aligned}$$

(ii) Für $q \in k[W]$ gilt

$$\begin{aligned} q \equiv 0 \text{ auf } \overline{p(\mathcal{V}_V(I))} &\Leftrightarrow q \equiv 0 \text{ auf } p(\mathcal{V}_V(I)) \\ &\Leftrightarrow q \circ p \equiv 0 \text{ auf } \mathcal{V}_V(I) \\ &\Leftrightarrow \alpha(q) \in \mathcal{I}_V(\mathcal{V}_V(I)) = \sqrt{I} \\ &\Leftrightarrow q \in \alpha^{-1}\left(\sqrt{I}\right) = \sqrt{\alpha^{-1}(I)} \\ &\Leftrightarrow q \equiv 0 \text{ auf } \mathcal{V}_W(\alpha^{-1}(I)). \end{aligned}$$

Wenn zwei Varietäten aber dasselbe Veschwindungsideal haben, sind sie nach Lemma 1.2.8 (iv) gleich. Insbesondere folgt mit $I = (0)$

$$\mathcal{I}_W(p(V)) = \mathcal{I}_W(\overline{p(V)}) = \mathcal{I}_W(\mathcal{V}_W(\ker(\alpha))) = \sqrt{\ker(\alpha)} = \ker(\alpha),$$

denn $\ker(\alpha)$ ist ein Radikalideal, da $k[V]$ reduziert ist. □

Korollar 1.4.14. *Sei $p\colon V \to W$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Setze $\alpha := p^*\colon k[W] \to k[V]$. Für $b \in W$ sei*

$$\mathfrak{q} := \{p \in k[W] \mid p(b) = 0\} = \mathcal{I}_W(\{b\}) \in \operatorname{Spec}(k[W])$$

der Kern der Auswertung. Dann sind äquivalent:

(i) $b \in p(V)$

(ii) *es gibt* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(k[V])$ *mit* $\alpha^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$.

Beweis. (i)⇒(ii): Sei $a \in V$ mit $p(a) = b$. Sei $\mathrm{ev}_a\colon k[V] \to K$ die Auswertung in a, und $\mathfrak{p} := \ker(\mathrm{ev}_a) = \mathcal{I}_V(\{a\})$. Wegen $\mathrm{ev}_b = \mathrm{ev}_a \circ \alpha$ ist $\alpha^{-1}(\mathfrak{p}) = \ker(\mathrm{ev}_b) = \mathfrak{q}$.
(ii)⇒(i): Zunächst ersetzen wir $p\colon V \to W$ durch die Einschränkung

$$p\colon \mathcal{V}_V(\mathfrak{p}) \to \mathcal{V}_W(\mathfrak{q}) = \overline{\{b\}}$$

(beachte dazu Satz 1.4.13 (ii)). Dadurch können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha\colon k[W] \hookrightarrow k[V]$ injektiv, $\mathfrak{q} = (0)$, sowie V, W irreduzibel sind.
Sei $S = k[W] \setminus \{0\}$ und betrachte $S^{-1}k[W] = \operatorname{Quot}(k[W]) =: k(W)$. Wegen

$$\mathrm{ev}_b\colon k[W] \hookrightarrow K$$

können wir fortsetzen zu $\mathrm{ev}_b\colon k(W) \hookrightarrow K$. Da $S^{-1}k[V]$ eine endlich erzeugte $S^{-1}k[W]$-Algebra ist, gibt es nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz einen $k(W)$-Homomorphismus $S^{-1}k[V] \to K$ (dividiere ein maximales Ideal aus und bette in K ein). Insbesondere existiert eine Fortsetzung $k[V] \to K$ von $\mathrm{ev}_b\colon k[W] \to K$. Jeder k-Homomorphismus $k[V] \to K$ ist aber die Auswertung an einem Punkt von V. Also gibt es $a \in V$ mit $\mathrm{ev}_b = \mathrm{ev}_a \circ \alpha$. Damit gilt $p(a) = b$. □

Bemerkung/Beispiel 1.4.15. (i) Jeder k-Morphismus $p\colon V \to W$ von affinen k-Varietäten ist stetig bezüglich der k-Zariskitopologie. Das folgt aus Satz 1.4.13 (i). Insbesondere ist ein Isomorphismus immer ein Homöomorphismus der topologischen Räume.
(ii) Ein k-Morphismus von affinen Varietäten kann ein Homöomorphismus bezüglich der Zariskitopologie sein, *ohne* ein Isomorphismus zu sein. Das zeigt das Beispiel 1.4.12 (iii), wie man sich in Aufgabe 12 überlege.
(iii) Das Bild $p(V)$ einer Varietät unter einem Morphismus ist im Allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. Zum Beispiel gilt für

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{A}^2 \\ (a_1, a_2) &\mapsto (a_1, a_1 a_2) \end{aligned}$$

$$p(\mathbb{A}^2) = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, b) \mid b \neq 0\}\,.$$

(iv) Ist V irreduzibel, so auch $\overline{p(V)}$. Das folgt entweder direkt topologisch aus der Stetigkeit von p, oder algebraisch, denn $\mathcal{I}_W(\overline{p(V)}) = \ker(\alpha)$, und mit $k[V]$ nullteilerfrei ist $\ker(\alpha)$ ein Primideal. △

Zum Abschluss dieses Kapitels beschäftigen wir uns noch mit endlichen Varietäten.

Definition 1.4.16. Ein Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ heißt 0-**dimensional**, falls

$$\dim_k k[\underline{x}]/I < \infty$$

gilt. △

Satz 1.4.17. *Für ein Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ sind äquivalent:*

(i) I *ist* 0*-dimensional*

(ii) $|\mathcal{V}(I)| < \infty$

(iii) $I \cap k[x_i] \neq \{0\}$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$.

In diesem Fall gilt $\mathcal{V}(I) \subseteq \overline{k}^n$ *und* $|\mathcal{V}(I)| \leq \dim_k k[\mathcal{V}(I)] \leq \dim_k k[\underline{x}]/I$.

Beweis. Sei zunächst $V := \mathcal{V}(I) \subseteq K^n$ eine endliche Menge. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt

$$\sqrt{I} = \bigcap_{a \in V \cap \overline{k}^n} \mathcal{I}(\{a\}),$$

und wegen
$$k[\underline{x}]/\mathcal{I}(\{a\}) \hookrightarrow \overline{k}$$
für $a \in \overline{k}^n$ ist $k[\underline{x}]/\mathcal{I}(\{a\})$ ein Körper und $\mathcal{I}(\{a\})$ somit ein maximales Ideal. Also ist
$$\sqrt{I} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$$
ein endlicher Durchschnitt maximaler Ideale. Der chinesische Restsatz liefert
$$k[V] = k[\underline{x}]/\sqrt{I} \cong L_1 \times \cdots \times L_r$$
wobei $L_i = k[\underline{x}]/\mathfrak{m}_i$ wie oben eine endliche algebraische Körpererweiterung von k ist. Mit Bemerkung 1.4.5 (ii) gilt nun
$$V = \operatorname{Hom}_k(k[V], K) = \operatorname{Hom}_k(L_1 \times \cdots \times L_r, K) = \operatorname{Hom}_k\left(L_1 \times \cdots \times L_r, \overline{k}\right).$$
Die letzte Gleichung nutzt aus, dass Elemente aller L_i polynomiale Gleichungen über k erfüllen, und somit von k-Algebrahomomorphismen immer nach $\overline{k}$ abgebildet werden. Das zeigt bereits $V \subseteq \overline{k}^n$. Wegen
$$\operatorname{Hom}_k\left(L_1 \times \cdots \times L_r, \overline{k}\right) = \bigcup_{i=1}^r \operatorname{Hom}_k\left(L_i, \overline{k}\right)$$
(Aufgabe 14) gilt nun
$$\begin{aligned} |V| &= \sum_{i=1}^r \left|\operatorname{Hom}_k\left(L_i, \overline{k}\right)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^r [L_i : k] \\ &= \dim_k k[V] \\ &\leq \dim_k k[\underline{x}]/I. \end{aligned}$$
Somit ist der Zusatz bewiesen. Nun zur Äquivalenz von (i)–(iii). Sei
$$\pi_i \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$$
die Projektion auf die i-te Komponente. Es gilt nun
$$\begin{aligned} V \text{ endlich } &\Leftrightarrow \pi_i(V) \text{ endlich für alle } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \overline{\pi_i(V)} \text{ endlich für alle } i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz $\pi_i(V) \subseteq \overline{k}$ verwendet. Nach Satz 1.4.13 wird aber $\overline{\pi_i(V)}$ durch das Ideal $I \cap k[x_i]$ definiert, und also ist (ii) äquivalent zu (iii). Für (iii) $\Rightarrow$ (i) verwenden wir, dass für jedes i ein $x_i^{d_i}$ modulo I durch niedrigere Potenzen von x_i ersetzt werden kann. Damit ist auch $k[\underline{x}]/I$ endlich dimensional. Für (i)$\Rightarrow$ (iii) verwendet man umgekehrt, dass $k[x_i]/\,(I \cap k[x_i])$ nach $k[\underline{x}]/I$ einbettet, und somit mit $k[\underline{x}]/I$ ebenfalls endlich dimensional ist. Daraus folgt $I \cap k[x_i] \neq \{0\}$. □

Beispiel 1.4.18. Man beachte nochmal, dass $\mathcal{V}(I)$ immer über K betrachtet wird, nicht nur über k. Zum Beispiel ist $\mathcal{V}(x_1^2+x_2^2)$ nicht endlich, da $k[x_1, x_2]/(x_2^2+x_2^2)$ kein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist. In $\mathbb{R}^2$ sieht man aber trotzdem nur einen Punkt der Varietät. △

Kapitel 2

Algorithmische Aspekte

In den vorangegangenen Kapiteln sind algebraische und geometrische Fragen aufgetaucht, die man auch algorithmisch gerne entscheiden möchte. Beispiele dafür sind:

- Gegeben $p, p_1, \ldots, p_r \in k[\underline{x}]$, gilt $p \in (p_1, \ldots, p_r)$?
- Gegeben Ideale $I = (p_1, \ldots, p_r), J = (q_1, \ldots, q_s) \subseteq k[\underline{x}]$, finde Erzeuger für $I \cap J, (I : J), \sqrt{I}$.
- Gegeben ein Homomorphismus $\varphi\colon k[\underline{x}] \to k[\underline{y}]$ und ein Ideal $J = (q_1, \ldots, q_r) \subseteq k[\underline{y}]$, finde Erzeuger für $\varphi^{-1}(J)$.

Die nun vorgestelle Theorie der *Gröbnerbasen* erlaubt eine algorithmische Entscheidung solcher Fragen, und zwar mithilfe *symbolischer*, d.h. exakter Berechnungen. Sind die Inputdaten exakt, d.h. handelt es sich beispielsweise um Polynome über $\mathbb{Q}$, so liefern sie auch exakte Antworten auf die beschriebenen Fragen. Diese Algorithmen sind in vielen Computeralgebrasystemen implementiert.

2.1 Monomiale Ideale

Notation 2.1.1. Sei wieder k ein Körper. Setze $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $c \in k$ nennen wir

$$\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ein **Monom**, und

$$c\underline{x}^\alpha$$

einen **Term**. Weiter setzen wir

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Die Monome bilden offensichtlich eine k-Vektorraumbasis von $k[\underline{x}]$. Für

$$p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} p_\alpha \underline{x}^\alpha \in k[\underline{x}]$$

setze

$$\operatorname{supp}(p) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid p_\alpha \neq 0\}.$$

Für jedes Polynom p ist $\operatorname{supp}(p)$ eine endliche Menge. Der **Grad** $\deg(p)$ von p ist definiert als

$$\deg(p) = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in \operatorname{supp}(p)\}.$$

Die **natürliche partielle Ordnung** auf $\mathbb{N}^n$ ist definiert durch

$$\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \;\forall i = 1, \ldots, n.$$

$\triangle$

Definition 2.1.2. Ein Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ heißt **monomial**, wenn es von Monomen erzeugt wird. $\triangle$

Lemma 2.1.3. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}^n$ und $I = (\underline{x}^\alpha \mid \alpha \in M)$. Dann sind die Elemente von I gerade die k-Linearkombinationen von $\underline{x}^\beta$ mit $\alpha \leq \beta$ für ein $\alpha \in M$.*

Beweis. Klar. $\square$

Bemerkung 2.1.4. (i) Die Monome $\underline{x}^\beta$ mit $\alpha \leq \beta$ für ein $\alpha \in M$ bilden eine k-Vektorraumbasis von I.
(ii) Ein allgemeines Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ muss überhaupt keine Monome enthalten. Das ist zum Beispiel für $I = (x_1 + 1) \subseteq k[x_1]$ der Fall. $\triangle$

Satz 2.1.5 (Dicksons Lemma)**.** *Für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^n$ ist die Menge $M_{\min}$ der bezüglich $\leq$ minimalen Elemente von M endlich.*

Beweis. Es wird

$$I := (\underline{x}^\alpha \mid \alpha \in M)$$

nach dem Hilbertschen Basissatz von einer endlichen Teilmenge erzeugt. Es gibt also $S \subseteq M$ *endlich* mit

$$\forall \beta \in M\, \exists \alpha \in S \quad \alpha \leq \beta.$$

Da es in $\mathbb{N}^n$ keine unendlichen bezüglich $\leq$ absteigenden Folgen gibt, ist das genau die Aussage des folgenden Satzes. $\square$

2.2 Monomordnungen und Gröbnerbasen

Definition 2.2.1. Eine **Monomordnung** ist eine total Ordnung $\preceq$ auf $\mathbb{N}^n$, die für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ erfüllt:

(i) $0 \preceq \alpha$

(ii) $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$. △

Bemerkung/Beispiel 2.2.2. (i) Jede Monomordnung kann ebenso als totale Ordnung der Monome von $k[\underline{x}]$ aufgefasst werden, gemäß

$$\underline{x}^\alpha \preceq \underline{x}^\beta :\Leftrightarrow \alpha \preceq \beta.$$

Die Bedingung (ii) in Definition 2.2.1 bedeutet dabei Verträglichkeit mit Multiplikation:

$$\underline{x}^\alpha \preceq \underline{x}^\beta \Rightarrow \underline{x}^\alpha \underline{x}^\gamma \preceq \underline{x}^\beta \underline{x}^\gamma.$$

(ii) Für $n = 1$ gibt es nur eine Monomordnung: $1 \prec x_1 \prec x_1^2 \prec \cdots$
Für $n \geq 2$ gibt es mehrere, beispielsweise die **lexikographische Ordnung**

$$\alpha \preceq_{\text{lex}} \beta \ :\Leftrightarrow\ \alpha = \beta \text{ oder } \alpha_i < \beta_i \text{ für } i = \min\{j \mid \alpha_j \neq \beta_j\}$$

oder die **grad-lexikographische Ordnung**

$$\alpha \preceq_{\text{dlex}} \beta \ :\Leftrightarrow\ |\alpha| < |\beta| \text{ oder } \left(|\alpha| = |\beta| \text{ und } \alpha \preceq_{\text{lex}} \beta\right).$$ △

Lemma 2.2.3. *Jede Monomordnung ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{N}^n$, d.h. jede nichtleere Teilmenge hat ein kleinstes Element.*

Beweis. Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}^n$ und $\preceq$ eine Monomordnung. Nach Satz 2.1.5 ist die Menge $M_{\min}$ der bezüglich $\leq$ minimalen Elemente endlich. Aus $\alpha \leq \beta$ folgt aber $\alpha \preceq \beta$, und deshalb ist das bezüglich $\preceq$ kleinste Element von $M_{\min}$ auch das kleinste Element von M. □

Notation 2.2.4. Sei $\preceq$ eine Monomordnung und $p = \sum_\alpha p_\alpha \underline{x}^\alpha \in k[\underline{x}]$ mit $p \neq 0$. Sei $\gamma = \max_\preceq \operatorname{supp}(p)$. Dann setzen wir

$$\mathrm{LM}_\preceq(p) = \underline{x}^\gamma \quad \mathrm{LC}_\preceq(p) = p_\gamma \quad \mathrm{LT}_\preceq(p) = p_\gamma \underline{x}^\gamma$$

und nennen es **Leitmonom, Leitkoeffizient** und **Leitterm** von p. Wir nennen p **normiert**, falls $\mathrm{LC}_\preceq(p) = 1$ gilt. Wir setzen

$$\mathrm{LM}_\preceq(0) = \mathrm{LC}_\preceq(0) = \mathrm{LT}_\preceq(0) = 0.$$

Falls die Monomordnung aus dem Kontext klar ist, lassen wir den Index $\preceq$ manchmal auch weg, schreiben also $\mathrm{LM}(p)$ statt $\mathrm{LM}_\preceq(p)$ etc... △

Lemma 2.2.5. *Für* $p, q \in k[\underline{x}]$ *gilt*

$$\mathrm{LM}(pq) = \mathrm{LM}(p) \cdot \mathrm{LM}(q)$$

und

$$\mathrm{LM}(p+q) \preceq \max\{\mathrm{LM}(p), \mathrm{LM}(q)\},$$

mit Gleichheit in der zweiten Gleichung falls $\mathrm{LM}(p) \neq \mathrm{LM}(q)$.

Beweis. Klar. □

Definition 2.2.6. Für ein Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ und eine Monomordnung $\preceq$ nennen wir

$$\mathrm{LI}_{\preceq}(I) := (\mathrm{LM}_{\preceq}(p) \mid p \in I)$$

das **Leitideal von I bezüglich $\preceq$**. Jedes Monom das nicht in $\mathrm{LI}_{\preceq}(I)$ liegt heißt **Standardmonom von I bezüglich $\preceq$.** △

Bemerkung 2.2.7. (i) $\mathrm{LI}(I)$ ist ein monomiales Ideal. Die darin enthaltenen Monome sind genau die $\mathrm{LM}(p)$ mit $p \in I$, denn $\underline{x}^\beta \mathrm{LM}(p) = \mathrm{LM}(\underline{x}^\beta p)$.
(ii) Aus $I = (p_1, \ldots, p_r)$ folgt

$$(\mathrm{LM}(p_1), \ldots, \mathrm{LM}(p_r)) \subseteq \mathrm{LI}(I),$$

aber im Allgemeinen *keine Gleichheit*. In einer Darstellung

$$p = \sum_i q_i p_i \in I$$

können sich die Leitmonome der Terme rechts nämlich durchaus gegenseitig aufheben. Deshalb hat man aus der Kenntnis von p allein noch keine Kontrolle über die Komplexität der q_i. Zum Beispiel gilt für $I = (p_1, p_2)$ mit $p_1 = xy + 1, p_2 = y^2 - 1$

$$x + y = yp_1 - xp_2 \in I,$$

und also ist (je nach Wahl der Monomordnung) entweder x oder y in $\mathrm{LI}(I)$. Andererseits ist $\mathrm{LM}(p_1) = xy$ und $\mathrm{LM}(p_2) = y^2$ (unabhängig von der Wahl der Monomordnung), und

$$x, y \notin \left(xy, y^2\right).$$

Genau dieses Problem werden wir mit der Definition von Gröbnerbasen beheben.
△

Satz 2.2.8 (Macaulay). *Sei $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Ideal und $\preceq$ eine Monomordnung. Dann bilden die Standardmonome von I bezüglich $\preceq$ eine k-Vektorraumbasis von $k[\underline{x}]/I$.*

Beweis. Lineare Unabhängigkeit: Sei $p = \sum_i p_i \underline{x}^{\alpha_i} \in I$ mit $\underline{x}^{\alpha_i} \notin \mathrm{LI}(I)$ für alle i. Wäre ein $p_i \neq 0$, so wäre $\mathrm{LM}(p)$ eines der $\underline{x}^{\alpha_i}$, und das läge damit doch in $\mathrm{LI}(I)$, ein Widerspruch.
Erzeugendensystem: Sei V der von allen Standardmonomen von I aufgespannte k-Vektorraum. Wir zeigen dass $V + I = k[\underline{x}]$ gilt. Angenommen das wäre falsch. Wähle dann ein $p \in k[\underline{x}] \backslash (V + I)$ mit kleinstmöglichem Leitmonom bezüglich $\preceq$ (beachte Lemma 2.2.3). Dann ist $\mathrm{LM}(p)$ kein Standardmonom, denn sonst wäre $\mathrm{LT}(p) \in V$ und damit $p - \mathrm{LT}(p) \notin V + I$, ein Widerspruch zur Minimalität von p. Also gilt $\mathrm{LM}(p) \in \mathrm{LI}(I)$, d.h. es gibt $q \in I$ mit $\mathrm{LM}(q) = \mathrm{LM}(p)$. Setze dann

$$h = p - \frac{\mathrm{LC}(p)}{\mathrm{LC}(q)} q.$$

Dann ist $h \notin V + I$, aber $\mathrm{LM}(h) \prec \mathrm{LM}(p)$, erneut ein Widerspruch. □

Definition 2.2.9. Sei $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Ideal, $\preceq$ eine Monomordnung und V der Unterraum von $k[\underline{x}]$, der von allen Standardmonomen von I bezüglich $\preceq$ aufgespannt wird. Nach Satz 2.2.8 gibt es für jedes $p \in k[\underline{x}]$ ein *eindeutig bestimmtes* $q \in V$ mit

$$p \equiv q \mod I.$$

Wir nennen dieses q **den Standardrest von p modulo I (bezüglich $\preceq$)**, und verwenden die Notation

$$q = \mathrm{str}_{I,\preceq}(p).$$

Beachte dass

$$\mathrm{str}_{I,\preceq} \colon k[\underline{x}] \to V$$

eine surjektive lineare Abbildung mit Kern I ist. △

Korollar 2.2.10. *Es gibt einen Isomorphismus von Vektorräumen*

$$\begin{aligned} k[\underline{x}]/I &\to k[\underline{x}]/\mathrm{LI}_{\preceq}(I) \\ \overline{p} &\mapsto \overline{\mathrm{str}_{\mathrm{I},\preceq}(p)}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Abbildung

$$\mathrm{str}_{I,\preceq} \colon k[\underline{x}] \to V$$

ist surjektiv mit Kern I, und per Definition von V ist die kanonische Projektion $V \to k[\underline{x}]/\mathrm{LI}(I)$ ein Isomorphismus. □

Definition 2.2.11. Sei $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Ideal und $\preceq$ eine Monomordnung. Eine *endliche* Teilmenge $G \subseteq I$ mit $0 \notin G$ heißt **Gröbnerbasis von I (bezüglich $\preceq$)**, falls

$$\mathrm{LI}_{\preceq}(I) = (\mathrm{LM}_{\preceq}(g) \mid g \in G)$$

gilt. Eine endliche Teilmenge $G \subseteq k[\underline{x}]$ heißt **Gröbnerbasis (bezüglich $\preceq$)**, falls G eine Gröbnerbasis des Ideals (G) ist. △

Lemma 2.2.12. *Seien $J \subseteq I$ Ideale mit $\mathrm{LI}_{\preceq}(J) = \mathrm{LI}_{\preceq}(I)$. Dann gilt $J = I$.*

Beweis. Aus $\mathrm{LI}_{\preceq}(I) = \mathrm{LI}_{\preceq}(J)$ folgt, dass beide Ideale die selben Standardmonome haben. Also ist der von allen Standardmonomen aufgespannte Raum V für beide Ideale derselbe, und aus $k[\underline{x}] = V \oplus I = V \oplus J$ (nach Satz 2.2.8) folgt damit $I = J$. □

Satz 2.2.13. *Jedes Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ besitzt eine Gröbnerbasis (bezüglich jeder Monomordnung), und jede solche Gröbnerbasis erzeugt I.*

Beweis. Nach dem Hilbert'schen Basissatz wird das monomiale Ideal $\mathrm{LI}_{\preceq}(I)$ von endlich vielen Monomen $\mathrm{LM}_{\preceq}(p_1), \ldots, \mathrm{LM}_{\preceq}(p_r)$ mit $p_i \in I$ erzeugt. Damit ist $G = \{p_1, \ldots, p_r\}$ eine Gröbnerbasis vom I bezüglich $\preceq$.
Sei nun $J = (p_1, \ldots, p_r)$. Dann ist $J \subseteq I$ ein Ideal mit $\mathrm{LI}_{\preceq}(J) = \mathrm{LI}_{\preceq}(I)$, und mit Lemma 2.2.12 folgt $I = J$. Also wird I von G erzeugt. □

Beispiel 2.2.14. (i) Sei $I = (p_1, p_2) \subseteq k[x, y]$ mit $p_1 = xy + 1, p_2 = y^2 - 1$ wie in Bemerkung 2.2.7 (ii). Dort haben wir gesehen, dass $\{p_1, p_2\}$ bezüglich keiner Monomordnung eine Gröbnerbasis von I ist.
(ii) Sei $I = (p_1, p_1) \subseteq k[x, y, z]$ mit $p_1 = x + z$, $p_2 = y + z$.

- Bezüglich der lexikographischen Monomordnung mit $z \prec y \prec x$ gilt

  $$\mathrm{LM}_{\preceq}(p_1) = x, \quad \mathrm{LM}_{\preceq}(p_2) = y,$$

  und also

  $$\mathrm{LI}_{\preceq}(I) \supseteq (x, y).$$

  Andererseits ist $I \cap k[z] = (0)$, denn $\mathcal{V}(I) = \{(t, t, -t) \mid t \in K\}$. Damit kann das Leitmonom eines Elementes aus I keine Potenz von z sein, weil sonst aufgrund der Monomordnung nur die Variable z auftauchen würde. Also wird jedes Leitmonom entweder durch x oder durch y geteilt, und das zeigt $\mathrm{LI}_{\preceq}(I) = (x, y)$. Also ist $\{p_1, p_2\}$ eine Gröbnerbasis von I bezüglich $\preceq$.

- Sei nun $\preceq$ eine Monomordnung mit $x \prec z, y \prec z$. Dann ist

  $$\mathrm{LM}_{\preceq}(p_1) = \mathrm{LM}_{\preceq}(p_2) = z.$$

  Wegen

  $$x - y = p_1 - p_2 \in I$$

  ist also entweder x oder y in $\mathrm{LI}_{\preceq}(I)$. Somit ist $\{p_1, p_2\}$ keine Gröbnerbasis von I bezüglich $\preceq$. △

2.3 Der Buchberger-Algorithmus

Sei in diesem Abschnitt stets $\preceq$ eine fest gewählte Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$. Alle Begriffe wie $\mathrm{LM}(p), \mathrm{LI}(I)$, Gröbnerbasis... beziehen sich auf diese.

Satz 2.3.1 (Division mit Rest). *Seien* $0 \neq g_1, \ldots, g_s \in k[\underline{x}]$. *Für jedes* $p \in k[\underline{x}]$ *gibt es* $q_1, \ldots, q_s, r \in k[\underline{x}]$ *mit*

$$p = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + r$$

sowie

(1) *Kein Monom in* r *ist durch ein* $\mathrm{LM}(g_i)$ *teilbar*

(2) $\mathrm{LM}(q_i g_i) \preceq \mathrm{LM}(p)$ *für alle* $i = 1, \ldots, s$.

Beweis. Sei $p = \sum_\alpha p_\alpha \underline{x}^\alpha$. Falls kein Monon von p durch eines der $\mathrm{LM}(g_i)$ teilbar ist, setzen wir $q_1 = \cdots = q_s = 0$ sowie $r = p$.
Andernfalls sei $\underline{x}^\alpha$ das bezüglich der Monomordnung $\preceq$ größte Monom von p, welches durch ein $\mathrm{LM}(g_i)$ teilbar ist, also etwa $\underline{x}^\alpha = \underline{x}^\beta \cdot \mathrm{LM}(g_i)$. Dann setzen wir

$$q := \frac{p_\alpha}{\mathrm{LC}(g_i)} \cdot \underline{x}^\beta \quad \text{sowie} \quad \tilde{p} = p - q g_i.$$

Damit verschwindet der Koeffizient von $\underline{x}^\alpha$ in $\tilde{p}$, und jedes Monom von $\tilde{p}$, welches durch ein $\mathrm{LM}(g_i)$ teilbar ist, ist also strikt kleiner als $\underline{x}^\alpha$ (wäre es größer, müsste es schon in p vorgekommen sein).
Wir iterieren den Prozess, und sind nach endlich vielen Schritten fertig, da $\preceq$ eine Wohlordnung ist. Im Resultat erhalten wir ein Polynom r, in dem kein Monom mehr durch ein $\mathrm{LM}(g_i)$ teilbar ist. Lösen wir die Rechnung rückwärts wieder

auf, erhalten wir exakt die behauptete Identität. Beachte dass in unserem ersten Schritt

$$\mathrm{LM}(qg_i) = \underline{x}^\beta \mathrm{LM}(g_i) = \underline{x}^\alpha \preceq \mathrm{LM}(p)$$

und damit auch

$$\mathrm{LM}(\tilde{p}) \preceq \mathrm{LM}(p)$$

gilt. □

Bemerkung 2.3.2. (i) Der Beweis von Satz 2.3.1 ist konstruktiv. Für gegebene $p, g_1, \ldots, g_s$ finden wir die q_i sowie r explizit anhand des angegebenen Algorithmus.
(ii) Die q_i und das Polynom r sind durch die Bedingungen (1) und (2) in Satz 2.3.1 *nicht* eindeutig bestimmt (beispielsweise erlaubt der Algorithmus Wahlmöglichkeiten, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können).

- Sei $n = 1$ und $g_1 = x, g_2 = x + 1$. Für $p = x$ ergibt sich

  $$p = g_1 + 0 = g_2 - 1.$$

  Beide Identitäten erfüllen (1) und (2) und können auch durch den beschriebenen Algorithmus entstehen.

- Sei $n = 2$ und $g_1 = xy + 1, g_2 = y^2 - 1$ wie in Beispiel 2.2.14 (i). Für $p = xy^2 - x$ erhalten wir

  $$p = yg_1 - (x + y) = xg_2 + 0.$$

  Beide Identitäten erfüllen (1) und (2) (unabhängig von der Wahl der Monomordnung), und können auch durch den Algorithmus entstehen. △

Definition 2.3.3. Ein Polynom r welches die Bedingungen aus Satz 2.3.1 erfüllt heißt **ein Standardrest von** p **modulo** $g_1, \ldots, g_s$ **bezüglich** $\preceq$. Dies ist nicht zu verwechseln mit *dem Standardrest* aus Definition 2.2.9, der eindeutig bestimmt ist. △

Korollar 2.3.4. *Ist* $\{g_1, \ldots, g_s\}$ *eine Gröbnerbasis von* I*, so gilt für jeden Standardrest* r *von* p *modulo* $g_1, \ldots, g_s$

$$r = \mathrm{str}_I(p).$$

Insbesondere liefert die Division mit Rest (unabhängig von den möglichen Wahlen im Algorithmus) immer dasselbe Ergebnis r.

Beweis. Sei r ein Standardrest. Dann ist jedes Monom in r ein Standardmonom von I, aufgrund von Eigenschaft (1) in Satz 2.3.1, und weil die $\mathrm{LM}(g_i)$ das Leitideal von I erzeugen. Andererseits ist $p \equiv r$ modulo I. Diese beiden Eigenschaften charakterisieren aber $\mathrm{str}_I(p)$. □

Definition 2.3.5. Seien $p, q \in k[\underline{x}] \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$S(p,q) := \frac{\mathrm{LT}(q) \cdot p - \mathrm{LT}(p) \cdot q}{\mathrm{ggT}(\mathrm{LM}(p), \mathrm{LM}(q))}$$

das S**-Polynom von** p **und** q. △

Bemerkung 2.3.6. (i) Das S-Polynom ist wirklich ein Polynom. Der größte gemeinsame Teiler von $\mathrm{LM}(p)$ und $\mathrm{LM}(q)$ ist ein Teiler des Zählers.
(ii) Nach Konstruktion kürzen sich die Leitterme der Zählers. Es gilt also

$$\mathrm{LM}(S(p,q)) \prec \mathrm{kgV}(\mathrm{LM}(p), \mathrm{LM}(q)).$$

Das folgende Lemma besagt, dass Kürzung von Leitmonomen in Linearkombinationen im wesentlichen immer auf dieses Phänomen der S-Polynome zurückgeführt werden kann. △

Lemma 2.3.7. *Seien $g_1, \dots, g_s \in k[\underline{x}] \setminus \{0\}$ alle mit demselben Leitmonom $\mathrm{LM}(g_i) = \underline{x}^\alpha$. Seien $a_1, \dots, a_s \in k$ mit*

$$\mathrm{LM}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i g_i\right) \prec \underline{x}^\alpha.$$

Dann ist $\sum_i a_i g_i$ eine Linearkombination der $S(g_i, g_{i+1})$ für $i = 1, \dots, s-1$.

Beweis. Setze $b_i := \mathrm{LC}(g_i)$ und $p_i := \frac{1}{b_i} g_i$ für $i = 1, \dots, s$. Wegen

$$\mathrm{LM}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i g_i\right) \prec \underline{x}^\alpha$$

gilt

$$\sum_{i=1}^{s} a_i b_i = 0.$$

Damit gilt, wobei wir $p_{s+1} = 0$ setzen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} a_i g_i &= \sum_{i=1}^{s} a_i b_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{i} a_j b_j\right)(p_i - p_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1}\left(\sum_{j=1}^{i} a_j b_j\right)(p_i - p_{i+1})\,.\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung verwenden wir $\sum_{i=1}^{s} a_i b_i = 0$. Wegen

$$S(g_i, g_j) = \frac{b_j \underline{x}^\alpha g_i - b_i \underline{x}^\alpha g_j}{\underline{x}^\alpha} = b_j g_i - b_i g_j = b_i b_j (p_i - p_j)$$

folgt daraus die Behauptung. □

Satz 2.3.8 (Buchbergerkriterium für Gröbnerbasen). *Es seien $g_1, \ldots, g_s \in k[\underline{x}] \setminus \{0\}$, und für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ sei h_{ij} ein Standardrest von $S(g_i, g_j)$ bezüglich $g_1, \ldots, g_s$. Dann ist $\{g_1, \ldots, g_s\}$ genau dann eine Gröbnerbasis, wenn $h_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt.*

Beweis. Setze $I = (g_1, \ldots, g_s)$. Ist zunächst $\{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis, so folgt aus Korollar 2.3.4, dass $h_{ij} = \mathrm{str}_I(S(g_i, g_j))$ *der* Standardrest bezüglich I ist. Wegen $S(g_i, g_j) \in I$ ist damit $h_{ij} = 0$ für alle i.
Sei nun umgekehrt $h_{ij} = 0$ für alle $i < j$. Für $0 \neq p \in I$ müssen wir

$$\mathrm{LM}(g_i) | \mathrm{LM}(p)$$

für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ zeigen. Nach Voraussetzung gibt es eine Identität

$$p = \sum_{i=1}^{s} q_i g_i \tag{$*$}$$

mit $q_i \in k[\underline{x}]$. Sei

$$\underline{x}^\gamma := \max\{\mathrm{LM}(q_i g_i) \mid i = 1, \ldots, s\}.$$

Wir zeigen, dass falls $\mathrm{LM}(p) \prec \underline{x}^\gamma$ gilt, wir eine neue Darstellung wie in ($*$) finden können, mit echt kleinerem γ. Iterativ erreichen wir dann $\mathrm{LM}(p) = \underline{x}^\gamma$, und das beweist das $\mathrm{LM}(p)$ von einem $\mathrm{LM}(g_i)$ geteilt wird.

Es gelte also $\mathrm{LM}(p) \prec \underline{x}^\gamma$. Durch Umnummerierung erreichen wir

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_t = \gamma \succ \gamma_{t+1}, \ldots, \gamma_s$$

wobei $\underline{x}^{\gamma_i} = \mathrm{LM}(q_i g_i)$sei. Wir schreiben (∗) nun um

$$p = \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \mathrm{LT}(q_i) g_i}_{\tilde{p}} + \sum_{i=1}^{t} (q_i - \mathrm{LT}(q_i)) g_i + \sum_{i=t+1}^{s} q_i g_i.$$

Jeder Summand in $\tilde{p}$ hat $\underline{x}^\gamma$ als Leitmonom. Jeder Summand im Rest hat ein echt kleineres Leitmonom. Außerdem gilt $\mathrm{LM}(\tilde{p}) \prec \underline{x}^\gamma$, da es für p gilt. Es reicht also, eine Darstellung

$$\tilde{p} = \sum_{j=1}^{s} \tilde{q}_j g_j \tag{$**$}$$

zu finden mit $\mathrm{LM}(\tilde{q}_j g_j) \prec \underline{x}^\gamma$ für alle j.
Auf die Polynome $\mathrm{LM}(q_i) g_i$ ($i = 1, \ldots, t$) können wir aber Lemma 2.3.7 anwenden. Damit ist $\tilde{p}$ eine Linearkombination der

$$s_{ij} := S\left(\mathrm{LM}(q_i) g_i, \mathrm{LM}(q_j) g_j\right) \qquad \text{für } i < j = 1, \ldots t.$$

Mit $\underline{x}^{\alpha_i} := \mathrm{LM}(g_i)$ erhalten wir $\mathrm{LM}(q_i) = \underline{x}^{\gamma - \alpha_i}$ und damit

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{1}{\underline{x}^\gamma} \left(\underline{x}^{\gamma - \alpha_j} \mathrm{LT}(g_j) \underbrace{\mathrm{LM}(q_i)}_{\underline{x}^{\gamma - \alpha_i}} g_i - \underline{x}^{\gamma - \alpha_i} \mathrm{LT}(g_i) \underbrace{\mathrm{LM}(q_j)}_{\underline{x}^{\gamma - \alpha_j}} g_j \right) \\ &= \underline{x}^{\gamma - \alpha_i - \alpha_j} \underbrace{(\mathrm{LT}(g_j) g_i - \mathrm{LT}(g_i) g_j)}_{S(g_i, g_j) \cdot \mathrm{ggT}(\underline{x}^{\alpha_i}, \underline{x}^{\alpha_j})} \\ &= \underline{x}^{\beta_{ij}} \cdot S(g_i, g_j). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\underline{x}^{\beta_{ij}} = \underline{x}^{\gamma - \alpha_i - \alpha_j} \cdot \mathrm{ggT}(\underline{x}^{\alpha_i}, \underline{x}^{\alpha_j}) = \frac{\underline{x}^\gamma}{\mathrm{kgV}(\underline{x}^{\alpha_i}, \underline{x}^{\alpha_j})}.$$

Die Bedingung $h_{ij} = 0$ besagt aber gerade die Existenz von Identitäten

$$S(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{s} p_{ijk} g_k$$

mit $\mathrm{LM}(p_{ijk}g_k) \preceq \mathrm{LM}(S(g_i, g_j))$. Insgesamt ist $\tilde{p}$ also eine Linearkombination der Elemente

$$\sum_{k=1}^{s} p_{ijk}\underline{x}^{\beta_{ij}} g_k,$$

und wegen $\mathrm{LM}(S(g_i, g_j)) \prec \mathrm{kgV}(\underline{x}^{\alpha_i}, \underline{x}^{\alpha_j})$ (siehe Bemerkung 2.3.6 (ii)) gilt

$$\mathrm{LM}(p_{ijk}\underline{x}^{\beta_{ij}} g_k) = \underline{x}^{\beta_{ij}}\mathrm{LM}(p_{ijk}g_k) \preceq \underline{x}^{\beta_{ij}}\mathrm{LM}(S(g_i, g_j)) \prec \underline{x}^{\gamma}.$$

Das liefert die gewünschte Darstellung $(**)$. $\square$

Satz 2.3.9 (Buchberger-Algorithmus)**.** *Seien $g_1, \dots, g_s \in k[\underline{x}] \setminus \{0\}$. Der folgende Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten ab, und liefert eine Gröbnerbasis von $I = (g_1, \dots, g_s)$:*

- *Berechne einen Standardrest h_{ij} von $S(g_i, g_j)$ bezüglich $g_1, \dots, g_s$, für alle $1 \leq i < j \leq s$.*
- *Sind alle $h_{ij} = 0$, so brich ab und gib $\{g_1, \dots, g_s\}$ aus.*
- *Ist ein $h_{ij} \neq 0$, so nimm ein solches zu den g_i hinzu und starte erneut.*

Beweis. Es ist $S(g_i, g_j) \in I$ für alle i, j. Somit ist auch $h_{ij} \in I$ für alle i, j, und das Ideal I wird durch eventuelle Hinzunahme eines h_{ij} nicht verändert. Bei Abbruch des Algorithmus erhalten wir nach Satz 2.3.8 eine Gröbnerbasis von I. Es bleibt also zu zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht.
Ist $h_{ij} \neq 0$, so gilt

$$(\mathrm{LM}(g_1), \dots, \mathrm{LM}(g_s)) \subsetneq (\mathrm{LM}(g_1), \dots, \mathrm{LM}(g_s), \mathrm{LM}(h_{ij}))\,,$$

denn keines der Monome in h_{ij} ist durch ein $\mathrm{LM}(g_i)$ teilbar. Nach dem Hilbert'schen Basissatz kann das aber nur endlich oft passieren. □

Bemerkung 2.3.10. (i) Alle Schritte im Algorithmus von Buchberger sind konstruktiv durchführbar. Die $S(g_i, g_j)$ sind konstruktiv definiert und einen Standardrest h_{ij} erhalten wir durch Division mit Rest (Satz 2.3.1). Kann man die Inputdaten einem Computer übergeben (z.B. sind alle Polynome über $\mathbb{Q}$ definiert), so kann der Computer damit eine Gröbnerbasis exakt berechnen.
(ii) Der eben beschriebene Algorithmus von Buchberger wird im Allgemeinen eine sehr redundante Gröbnerbasis liefern. △

Lemma 2.3.11. *Sei G eine Gröbnerbasis von I und seien $p, q \in G$ mit $p \neq q$ und $\mathrm{LM}(p) | \mathrm{LM}(q)$. Dann ist $G \setminus \{q\}$ ebenfalls eine Gröbnerbasis von I.*

Beweis. Klar. □

Definition 2.3.12. Eine Gröbnerbasis G heißt **minimal**, falls

$$\mathrm{LM}(p) \nmid \mathrm{LM}(q)$$

für alle $p, q \in G, p \neq q$. △

Lemma 2.3.13. *Sei G eine minimale Gröbnerbasis und $I = (G)$. Dann sind die $\mathrm{LM}(g)$ ($g \in G$) gerade die verschiedenen minimalen Monome (bezüglich $\leq$) in $\mathrm{LI}(I)$.*

Beweis. Jedes bezüglich $\leq$ minimale Monom in $\mathrm{LI}(I)$ muss von der Gestalt $\mathrm{LM}(g)$ mit $g \in G$ sein. Andererseits liefert eine minimale Gröbnerbasis aber auch nur diese minimalen Monome. □

Bemerkung 2.3.14. Je zwei minimale Gröbnerbasen (die dasselbe Ideal I erzeugen) haben also gleiche Mächtigkeit. Es handelt sich dabei um die inklusionsminimalen Gröbnerbasen von I, und auch um die mit kleinster Mächtigkeit. △

Definition 2.3.15. Eine Gröbnerbasis G heißt **reduziert**, falls alle $g \in G$ normiert sind, und für $p \neq q \in G$ gilt:

$$\mathrm{LM}(p) \text{ teilt kein in } q \text{ vorkommendes Monom.}$$

Offensichtlich ist jede reduzierte Gröbnerbasis auch minimal. △

Satz 2.3.16. *Jedes Ideal $I \subseteq k[\underline{x}]$ besitzt eine eindeutig bestimmte reduzierte Gröbnerbasis (bezüglich gegebenem $\preceq$).*

Beweis. Existenz: Sei G eine minimale Gröbnerbasis von I. Ein Element $g \in G$ heißt reduziert bezüglich G, wenn kein Monom von g durch $\mathrm{LM}(q)$ für ein $q \in G \setminus \{g\}$ teilbar ist. Wähle nun $g \in G$ fest und berechne einen Standardrest g' von g bezüglich $G \setminus \{g\}$. Setze dann

$$G' := (G \setminus \{g\}) \cup \{g'\}.$$

Wegen $0 \neq g' \in I$ und $\mathrm{LM}(q) \nmid \mathrm{LM}(g')$ für alle $q \in G \setminus \{g\}$ gilt $\mathrm{LM}(g) = \mathrm{LM}(g')$. Damit ist G' erneut eine minimale Gröbnerbasis von I. Es ist sogar g' nun reduziert bezüglich G', da es ein Standardrest bezüglich $G \setminus \{g\}$ ist. Durch Iteration erhält man eine reduzierte Gröbnerbasis.
Eindeutigkeit: Seien G, G' zwei reduzierte Gröbnerbasen von I. Als minimale Gröbnerbasen stimmen die Mengen $\mathrm{LM}(G)$ und $\mathrm{LM}(G')$ also überein, nach Lemma 2.3.13. Für $g \in G$ wähle also das eindeutige $g' \in G'$ mit $\mathrm{LM}(g) = \mathrm{LM}(g')$. Dann gilt $g - g' \in I$, und falls $g - g' \neq 0$ gibt es also $q \in G, q' \in G'$ mit

$$\mathrm{LM}(q), \mathrm{LM}(q') \mid \mathrm{LM}(g - g').$$

Andererseits gilt $\mathrm{LM}(g-g') \prec \mathrm{LM}(g) = \mathrm{LM}(g')$, und daraus folgt $q \neq g, q' \neq g'$. Da $\mathrm{LM}(g - g')$ entweder in g oder in g' als Monom vorkommen muss, ist das ein Widerspruch zur Reduziertheit von entweder G oder G'. Also gilt $g - g' = 0$, und damit $G = G'$. □

Bemerkung/Beispiel 2.3.17. (i) Die Berechnung der reduzierten Gröbnerbasis (aus einer gegebenen Gröbnerbasis) von I im letzten Beweis ist konstruktiv.
(ii) Seien $g_1, \dots, g_s \in k[\underline{x}]$ Linearformen, also $g_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j$. Sei

$$A = (c_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{s\times n}(k)$$

die entsprechende Koeffizientenmatrix und

$$B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{s\times n}(k)$$

die reduzierte Zeilenstufenform von A (Pivotelemente 1, Pivotspalten sonst 0). Sei $q_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j$ für $i = 1, \dots, r (= \operatorname{rang}(A))$. Falls $\preceq$ eine Monomordnung mit $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$ ist, so ist $\{q_1, \dots, q_r\}$ die reduzierte Gröbnerbasis von $(g_1, \dots, g_s)$ (Aufgabe 16). Der Buchberger-Algorithmus (+ die Konstruktion der reduzierten Gröbnerbasis) verallgemeinert also den Algorithmus von Gauss.
(iii) Sei $n = 1$ und $p, q \in k[x] \setminus \{0\}$. Die einzige minimale Gröbnerbasis von

$$(p, q) = (\mathrm{ggT}(p, q))$$

ist (bis auf Skalierung) $\{\mathrm{ggT}(p, q)\}$. Der Buchberger-Algorithmus verallgemeinert also den euklidischen Algorithmus für $k[x]$. $\triangle$

2.4 Anwendungen

In diesem Abschnitt sehen wir, wie die Theorie der Gröbnerbasen zu konstruktiven Anworten auf die zu Anfang des Kapitels beschriebenen Fragen führt. Es sei nochmal darauf hingewiesen, dass die Konstruktion von (reduzierten) Gröbnerbasen und insbesondere die Division mit Rest konstruktiv durchführbar sind.

Anwendung 2.4.1 (Zugehörigkeitstest)**.** Seien $p, p_1, \dots, p_s \in k[\underline{x}]$ gegeben. Die Frage ob $p \in I = (p_1, \dots, p_s)$ gilt lässt sich wie folgt entscheiden. Wähle eine beliebige Monomordnung $\preceq$. Berechne dann eine Gröbnerbasis $\{g_1, \dots, g_t\}$ von I bezüglich $\preceq$ und einen Standardrest r von p modulo $g_1, \dots, g_t$ bezüglich $\preceq$. Es gilt dann $r = \mathrm{str}_{I,\preceq}(p)$ und also

$$p \in I \;\Leftrightarrow\; r = 0.$$

Die Methode liefert auch eine Darstellung $p = \sum_{i=1}^s q_i p_i$, falls $p \in I$. Zunächst erhält man im Fall $r = 0$ aus der Division mit Rest eine Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^t \tilde{q}_i g_i.$$

Für die Konstruktion der Gröbnerbasis $\{g_1, \ldots, g_t\}$ haben wir aber zu den p_i eventuell noch h_{ij} dazugenommen (siehe Satz 2.3.9). Da die $S(p_i, p_j)$ aber explizite Kombinationen der p_i sind, sind es die h_{ij} ebenfalls. Man kann also durch iteratives Auflösen eine Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^{s} q_i p_i$$

konstruktiv erhalten. △

Anwendung 2.4.2 (Lösbarkeit von polynomialen Gleichungssystemen)**.** In Korollar 1.2.13 haben wir gesehen, dass die Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$p_1(x) = 0, \ldots, p_r(x) = 0$$

mit $p_i \in k[\underline{x}]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von k äquivalent zu

$$1 \notin (p_1, \ldots, p_r) \subseteq k[\underline{x}]$$

ist. Nach 2.4.1 können wir die Lösbarkeit also testen. △

Anwendung 2.4.3 (Zugehörigkeit zum Radikal)**.** Auch die Frage ob

$$p \in \sqrt{(p_1, \ldots, p_s)}$$

gilt lässt sich testen (siehe Aufgabe 17). △

Anwendung 2.4.4 (Inklusions- und Gleichheitstest)**.** Es gilt

$$I = (p_1, \ldots, p_r) \subseteq (q_1, \ldots, q_t) = J$$

genau dann wenn $p_i \in J$ für alle i gilt. Das lässt nach 2.4.1 testen. Insbesondere kann man auch $I = J$ testen. △

Anwendung 2.4.5 (Elimination)**.** Sei $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Das Ideal

$$I_j := I \cap k[x_{j+1}, \ldots, x_n]$$

heißt das **j-te Eliminationsideal von I**. Seine geometrische Bedeutung ist in Satz 1.4.13 (ii) beschrieben: es definiert den Abschluss der Projektion von $\mathcal{V}(I)$ auf die Komponenten $x_{j+1}, \ldots, x_n$. Der folgende Satz zeigt, wie man Erzeuger von I_j berechnen kann. △

Satz 2.4.6. *Sei G eine Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Monomordnung mit $x_1 \succ \cdots \succ x_n$. Dann ist $G \cap k[x_{j+1}, \ldots, x_n]$ eine Gröbnerbasis von I_j bezüglich der lexikographischen Monomordnung (und insbesondere ein Erzeugendensystem).*

Beweis. Sei $p \in I_j$. Wegen $p \in I$ gibt es ein $g \in G$ mit $\mathrm{LM}(g)|\mathrm{LM}(p)$. Da $x_1, \ldots, x_j$ in p nicht vorkommen, kommen sie auch in $\mathrm{LM}(g)$ und damit in g nicht vor, nach Wahl der Monomordnung. Also ist $g \in G \cap k[x_{j+1}, \ldots, x_n]$. □

Beispiel 2.4.7. Betrachte

$$I = \big(x^2 + y + z - 1, y^2 + x + z - 1, z^2 + x + y - 1\big) \subseteq k[x, y, z].$$

Die reduzierte Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Monomordnung mit $x \succ y \succ z$ hat die folgenden 4 Elemente:

$$\begin{aligned}
g_1 &= x + y + z^2 - 1 \\
g_2 &= y^2 - y - z^2 + z \\
g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2 \\
g_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 = z^2(z-1)^2(z^2 + 2z - 1).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$I \cap k[y, z] = (g_2, g_3, g_4)$$

und

$$I \cap k[z] = (g_4).$$

Insbesondere besteht die Projektion von $\mathcal{V}(I)$ auf die dritte Komponente aus den Punkten $0, 1$ und $-1 \pm \sqrt{2}$. △

Anwendung 2.4.8 (Endliche Varietäten)**.** Sei $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Ideal. Wir können testen ob $\mathcal{V}(I)$ endlich ist, d.h. ob I ein 0-dimensionales Ideal ist (vergleiche Satz 1.4.17). Dazu berechnen wir wie in Satz 2.4.6 Erzeuger für die Ideale $I \cap k[x_i]$ und sehen so, ob $I \cap k[x_i] \neq \{0\}$ gilt. Ist das der Fall für alle i, setze $M_i := \mathcal{V}(I \cap k[x_i]) \subseteq \mathbb{A}^1$. Dann gilt

$$\mathcal{V}(I) \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n,$$

und man kann die endlich vielen Punkte aus $M_1 \times \cdots \times M_n$ daraufhin prüfen, ob sie die Gleichungen aus I erfüllen. △

Beispiel 2.4.9. Mit denselben Gleichungen wie in Beispiel 2.4.7 erhält man

$$I \cap k[x] = (g_4(x)),\ I \cap k[y] = (g_4(y)) \text{ und } I \cap k[z] = (g_4(z)).$$

Also ist $\mathcal{V}(I)$ endlich und enthalten in

$$\{0, 1, -1 \pm \sqrt{2}\}^3 \subseteq K^3.$$

Man überprüft dann

$$\mathcal{V}(I) = \left\{ (-1 \pm \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \triangle$$

Anwendung 2.4.10 (Durchschnitt von Idealen)**.** Seien $I = (p_1, \dots, p_s)$ und $J = (q_1, \dots, q_r)$ Ideale in $k[\underline{x}]$. Erzeuger für das Produkt IJ sind offensichtlich die paarweisen Produkt $p_i q_j$. Wir wollen nun aber Erzeuger für das Ideal $I \cap J$ berechnen. Der folgende Satz zeigt, wie wir das mit Hilfe der bereits gezeigten Elimination 2.4.5 tun können. $\triangle$

Satz 2.4.11. *Sei t eine neue Variable und Q das von*

$$tp_1, \dots, tp_s, (1-t)q_1, \dots, (1-t)q_r$$

in $k[\underline{x}, t]$ erzeugte Ideal. Dann gilt

$$I \cap J = Q \cap k[\underline{x}].$$

Beweis. Für "$\subseteq$" sei $p \in I \cap J$. Aus $p = tp + (1-t)p$ folgt $p \in Q$. Für "$\supseteq$" sei umgekehrt

$$k[\underline{x}] \ni p = t \sum_i h_i p_i + (1-t) \sum_j g_j q_j \in Q,$$

wobei $h_i, g_j \in k[\underline{x}, t]$. Durch Substitution $t = 0$ folgt $p \in J$, und $t = 1$ impliziert $p \in I$. $\square$

Anwendung 2.4.12 (Idealquotienten)**.** Seien I, J Ideale. Wir wollen Erzeuger für

$$(I : J) = \{p \in k[\underline{x}] \mid pJ \subseteq I\}$$

berechnen (siehe Satz 1.3.20 für die geometrische Interpretation). Dazu kann man zunächst annehmen, dass $J = (g)$ ein Hauptideal ist. Es gilt nämlich

$$(I : (g_1, \dots g_s)) = \bigcap_i (I : (g_i)),$$

und Durchschnitte haben wir bereits in 2.4.10 erledigt. Berechne nun erneut mit 2.4.10 Erzeuger

$$I \cap (g) = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_t).$$

Dabei gilt $\tilde{p}_i = gp_i$, und die p_i findet man wiederum mit Division. Es ist leicht zu sehen, dass man damit

$$(I : J) = (p_1, \dots, p_s)$$

erhält.
Ebenso können wir Erzeuger für

$$(I : J^\infty) = \bigcup_{d=0}^{\infty} (I : J^d)$$

berechnen (siehe Satz 3.3.7 und Satz 3.4.4 für die geometrische Interpretation). Es gilt

$$I \subseteq (I : J) \subseteq (I : J^2) \subseteq \cdots$$

und diese Folge wird stationär, da $k[\underline{x}]$ noethersch ist. Wir berechnen nun iterativ Erzeuger für $(I : J^d)$, wie eben beschrieben. Dabei testen wir, ob

$$(I : J^{d+1}) \subseteq (I : J^d)$$

gilt, wie in 2.4.4. Ist das der Fall, so wird die Kette an dieser Stelle stationär:

$$\begin{aligned} p \in (I : J^{d+2}) &\Rightarrow \forall q \in J \quad pq \in (I : J^{d+1}) \\ &\Rightarrow \forall q \in J \quad pq \in (I : J^d) \\ &\Rightarrow p \in (I : J^{d+1}). \end{aligned}$$

Damit gilt $(I : J^d) = (I : J^\infty)$.
Beachte dass wir damit mit Satz 3.3.7 einen Algorithmus zur Entscheidung der Lösbarkeit eines projektiven Gleichungssystems erhalten.

Anwendung 2.4.13 (Urbilder von Idealen)**.** Sei $\varphi \colon k[\underline{x}] \to k[\underline{y}]$ ein Algebrahomomorphimus, gegeben durch $\varphi(x_i) = p_i \in k[\underline{y}]$ für $i = 1, \dots, n$. Sei $J = (g_1, \dots, g_s) \subseteq k[\underline{y}]$ ein Ideal. Wir wollen Erzeuger für $\varphi^{-1}(J)$ berechnen (für die geometrische Interpretation siehe Satz 1.4.13). Der folgende Satz sagt, wie wir das auf Durchschnitte zurückführen können. $\triangle$

Satz 2.4.14. *Sei* $\tilde{J} := (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n, g_1, \dots, g_s) \subseteq k[\underline{x}, \underline{y}]$. *Dann gilt*

$$\varphi^{-1}(J) = \tilde{J} \cap k[\underline{x}].$$

Beweis. Für jeden Ring R und $a \in R^m$ hat der Auswertungshomomorphismus

$$\begin{aligned} R[z_1, \ldots, z_m] &\to R \\ p &\mapsto p(a_1, \ldots, a_m) \end{aligned}$$

den Kern $(z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n)$. Das sieht man zum Beispiel im Fall $a = 0$ am einfachsten. Somit hat der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \psi \colon k[\underline{x}, \underline{y}] &\to k[\underline{y}] \\ x_i &\mapsto p_i \\ y_i &\mapsto y_i \end{aligned}$$

als Kern gerade $(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$. Ausserdem ist $\psi = \varphi$ auf $k[\underline{x}]$. Somit gilt

$$\varphi^{-1}(J) = \psi^{-1}(J) \cap k[\underline{x}].$$

Die Aussage folgt also aus folgender Identität in $k[\underline{x}, \underline{y}]$:

$$\psi^{-1}(J) = (g_1, \ldots, g_s) + \ker(\psi).$$

Dabei ist "$\supseteq$" klar. Für "$\subseteq$" verwende, dass für alle $p \in k[\underline{x}, y]$ gilt

$$\psi(p - \psi(p)) = \psi(p) - \psi(p) = 0.$$

Ist also $p \in \psi^{-1}(J)$ so ist

$$p = \underbrace{\psi(p)}_{\in J} + \underbrace{(p - \psi(p))}_{\in \ker(\psi)} \in (g_1, \ldots, g_s) + \ker(\psi). \qquad \square$$

Beispiel 2.4.15. Betrachte den Morphismus von Varietäten

$$\begin{aligned} p \colon \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{A}^3 \\ (a, b) &\mapsto (ab, ab^2, a^2). \end{aligned}$$

Auf Ebene der Koordinatenringe entspricht ihm der Homomorphismus

$$\begin{aligned} p^* \colon k[x, y, z] &\to k[u, v] \\ x &\mapsto uv \\ y &\mapsto uv^2 \\ z &\mapsto u^2. \end{aligned}$$

Mit der beschriebenen Methode kann man berechnen

$$\ker(p^*) = (x^4 - y^2 z).$$

Nach Satz 1.4.13 gilt

$$\overline{p(\mathbb{A}^2)} = \mathcal{V}(x^4 - y^2 z).$$

Hier sieht man: die ganze y-Achse ist in $\overline{p(\mathbb{A}^2)}$ enthalten; im Bild von p liegt darauf aber nur der Punkt $(0,0,0)$. △

Anwendung 2.4.16 (Homogenisierung eines Ideals)**.** Für $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ sei

$$I^h = \left(p^h \mid p \in I\right) \subseteq k[x_0,\ldots,x_n]$$

die Homogenisierung von I (siehe Satz 3.3.18 für die geometrische Interpretation). Ist $I = (p_1,\ldots,p_s)$, so gilt im Allgemeinen

$$\left(p_1^h,\ldots,p_s^h\right) \subsetneq I^h,$$

siehe Bemerkung 3.3.19. Wir wollen nun Erzeuger für I^h berechnen.
Dazu nennen wir eine Monomordnung $\preceq$ **gradverträglich**, falls

$$|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha \prec \beta$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt. Beispielsweise ist die grad-lexikographische Monomordnung gradverträglich. Der folgende Satz zeigt, wie man damit Erzeuger für I^h berechnen kann. △

Satz 2.4.17. *Sei $\preceq$ eine gradverträgliche Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$ und G eine Gröbnerbasis des Ideals $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ bezüglich $\preceq$. Dann gilt in $k[x_0,\ldots,x_n]$*

$$I^h = \left(g^h \mid g \in G\right).$$

Beweis. Auf $k[x_0,\ldots,x_n]$ definieren wir eine Monomordnung

$$x_0^r \cdot \underline{x}^\alpha \ \preceq' \ x_0^s \underline{x}^\beta \ :\Leftrightarrow \ \underline{x}^\alpha \prec \underline{x}^\beta \text{ oder } (\alpha = \beta \text{ und } r \le s).$$

Sei $G^h = \left\{g^h \mid g \in G\right\}$. Wir zeigen, dass G^h sogar eine Gröbnerbasis von I^h bezüglich $\preceq'$ ist. Daraus folgt insbesondere die Aussage.
Für $0 \neq p \in k[x_1,\ldots,x_n]$ ist

$$\deg\left(\mathrm{LM}_\preceq(p)\right) = \deg(p),$$

aufgrund der Gradverträglichkeit von $\preceq$. Daraus folgt unmittelbar

$$\mathrm{LM}_{\preceq'}(p^h) = \mathrm{LM}_{\preceq}(p)$$

für alle $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Nach Lemma 3.3.16 ($i$) hat jedes homogene $q \in I^h$ die Gestalt

$$q = x_0^r \cdot p^h$$

mit einem $p \in I$. Daraus folgt

$$\mathrm{LM}_{\preceq'}(q) = x_0^r \cdot \mathrm{LM}_{\preceq'}(p^h).$$

Es gibt nun ein $g \in G$ mit

$$\mathrm{LM}_{\preceq'}(g^h) = \mathrm{LM}_{\preceq}(g) \mid \mathrm{LM}_{\preceq}(p) = \mathrm{LM}_{\preceq'}(p^h),$$

da G Gröbnerbasis von I ist. Daraus folgt $\mathrm{LM}_{\preceq'}(g^h)|\mathrm{LM}_{\preceq'}(q)$, und das war zu zeigen. $\square$

Kapitel 3

Projektive Varietäten

3.1 Projektive Räume

Definition 3.1.1. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
(i) Der **projektive Raum** $\mathbb{P}(V)$ ist die Menge aller eindimensionalen K-Unterräume von V.
(ii) Die **Dimension** eines projektiven Raums ist definiert als

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1.$$

(iii) Ist $W \subseteq V$ ein K-Untervektorraum, so nennt man $\mathbb{P}(W)$ einen **linearen** oder **projektiven Teilraum** von $\mathbb{P}(V)$. Lineare Teilräume von $\mathbb{P}(V)$ der Dimensionen $0, 1, 2, \dim \mathbb{P}(V) - 1$ nennt man auch **Punkte, Gerade, Ebenen** und **Hyperräume**.
(iv) Man schreibt

$$\mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$$

und nennt $\mathbb{P}^n(K)$ den n**-dimensionalen projektiven Raum über** K. △

Die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ sind also die $[v] = K \cdot v$ für $0 \neq v \in V$. Dabei gilt

$$[v] = [w] \Leftrightarrow \exists c \in K^* \quad v = cw.$$

Definition 3.1.2. Elemente von $\mathbb{P}^n(K)$ notiert man oft in **homogenen Koordinaten**. Für $0 \neq (a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ schreibt man

$$(a_0 : \dots : a_n) := [(a_0. \dots, a_n)] = K \cdot (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n(K).$$

Die Doppelpunkte bedeuten also, dass man nicht den Vektor, sondern die davon aufgespannte Gerade als **Element** des projektiven Raums meint. Beachte dass der Punkt $(0 : \ldots : 0)$ *nicht definiert* ist. Es gilt

$$(a_0 : \ldots : a_n) = (b_0 : \ldots : b_n) \Leftrightarrow \exists c \in K^* \quad a_i = cb_i \text{ für } i = 0, \ldots, n.$$

Man kann auch folgende Charaktierisierung verwenden:

$$(a_0 : \ldots : a_n) = (b_0 : \ldots : b_n) \Leftrightarrow a_i b_j = a_j b_i \text{ für alle } i, j = 0, \ldots, n.$$

Denn zwei nichttriviale Vektoren $(a_0, \ldots, a_n), (b_0, \ldots, b_n)$ sind genau denn kolinear, wenn die Matrix

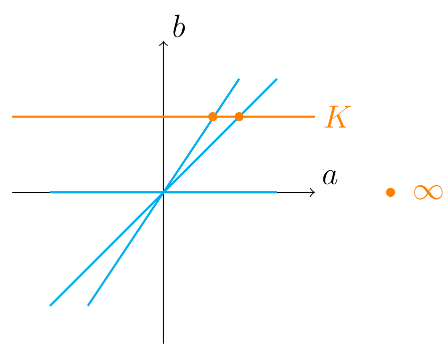
$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Rang 1 hat, d.h. alle ihre 2×2-Unterdeterminanten veschwinden. $\triangle$

Beispiel 3.1.3. (i) $\mathbb{P}^0(K)$ besteht aus genau einem Punkt.
(ii) $\mathbb{P}^1(K)$ identifiziert sich mit $K \cup \{\infty\}$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(K) &\to K \cup \{\infty\} \\ (a : b) &\mapsto a/b \text{ falls } b \neq 0 \\ (a : 0) &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Das entspricht geometrisch dem Schneiden der Ursprungsgeraden in K^2 mit der Geraden $b = 1$. Dabei wird jede Gerade genau einmal getroffen, bis auf die Gerade $b = 0$, die dem Punkt ∞ entspricht.



(iii) Als Menge haben wir eine Identifikation $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, wobei S^n die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und $a \sim -a$ für alle $a \in S^n$ gilt. Im Sinne der Differentialgeometrie ist das eine kompakte, glatte und für $n \geq 2$ nichtorientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(iv) $\emptyset, \mathbb{P}(V)$ sind lineare Teilräume von $\mathbb{P}(V)$. Es gilt $\dim\emptyset = -1$, denn $\emptyset = \mathbb{P}(\{0\})$. Jeder Durchschnitt von linearen Teilräumen ist wieder einer:

$$\bigcap_i \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_i W_i\right).$$

Eine Gerade in $\mathbb{P}(V)$ ist von der Gestalt $\mathbb{P}(W)$ für einen 2-dimensionalen Teilraum $W \subseteq V$. △

Satz 3.1.4. *Seien $U_1 = \mathbb{P}(W_1)$ und $U_2 = \mathbb{P}(W_2)$ lineare Teilräume von $\mathbb{P}(V)$. Dann gilt*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

Insbesondere folgt aus $\dim U_1 + \dim U_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ schon $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Je zwei Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$ schneiden sich also.

Beweis. Folgt direkt aus der Dimensionsformel für Vektorräume

$$\dim_K W_1 + \dim_K W_2 = \dim_K(W_1 \cap W_2) + \dim_K(W_1 + W_2),$$

wenn man auf beiden Seiten 2 abzieht. □

Definition 3.1.5. Sei $f\colon V \hookrightarrow W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(V) &\to \mathbb{P}(W) \\ [v] &\mapsto [f(v)] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung. Ist f bijektiv, so gilt $\mathbb{P}(f)^{-1} = \mathbb{P}(f^{-1})$, und man nennt $\mathbb{P}(f)$ dann eine **Projektivität von** $\mathbb{P}(V)$ **nach** $\mathbb{P}(W)$. △

Satz 3.1.6. *Die Projektivitäten von $\mathbb{P}(V)$ auf sich bilden eine Gruppe, die isomorph ist zu*

$$\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/\left(K^* \cdot \mathrm{id}_V\right).$$

Beweis. Sei P die Gruppe der Projektivitäten. Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V) &\twoheadrightarrow P \\ f &\mapsto \mathbb{P}(f). \end{aligned}$$

Sein Kern besteht aus denjenigen $f \in \mathrm{GL}(V)$, für die jeder Vektor ein Eigenvektor ist. Bekanntermaßen sind das aber genau die Vielfachen der Identität. □

Beispiel 3.1.7. Für $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt

$$\mathbb{P}(f)\colon (x:y) \mapsto (ax+by : cx+dy).$$

Unter der Identifikation $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ aus Beispiel 3.1.3 (ii) übersetzt sich das in die Abbildung

$$r \mapsto \frac{ar+b}{cr+d}, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c},$$

eine sogenante **Möbiustransformation** der Geraden. △

Konstruktion 3.1.8. In $\mathbb{P}^n(K)$ ist die Menge

$$H := \{(a_0 : \ldots : a_n) \mid a_0 = 0\}$$

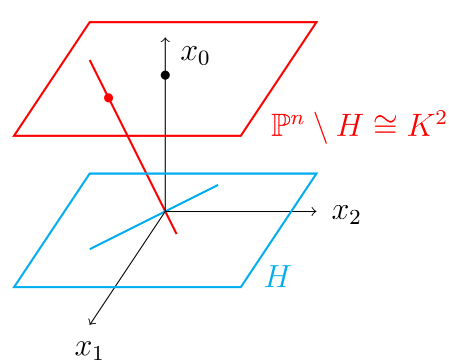
eine Hyperebene, und insbesondere ist $H \cong \mathbb{P}^{n-1}(K)$. Es gibt eine Bijektion vom Komplement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(K) \setminus H &\leftrightarrow K^n \\ (a_0 : \ldots : a_n) &\mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) \\ (1 : b_1 : \ldots : b_n) &\leftarrow\!\shortmid (b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Allgemeiner gibt es für jede Hyperebene $W \subseteq V$ eine Bijektion

$$\begin{aligned} W &\to \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \\ w &\mapsto [v+w], \end{aligned}$$

wobei $v \in V \setminus W$ beliebig aber fest gewählt ist. In dieser Sichtweise ist $\mathbb{P}(V)$ eine disjunkte Vereinigung aus W und $\mathbb{P}(W)$. Dabei sind die Punkte aus $\mathbb{P}(W)$ die **unendlich fernen Punkte** bezüglich W.



△

3.2 Graduierte Ringe

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der den projektiven Räumen zugrundeliegenden Algebra. Sei dazu stets $(G, +, 0)$ eine abelsche Gruppe.

Definition 3.2.1. (i) Ein G**-graduierter Ring** ist ein Ring R, zusammen mit einer additiven Untergruppe $R_g \subseteq R$ für jedes $g \in G$, so dass gilt

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

$$\text{und } R_g \cdot R_h \subseteq R_{g+h}$$

für alle $g, h \in G$.
(ii) Ein Element $a \in R$ heißt **homogen**, falls $a \in R_g$ für ein $g \in G$. Falls $a \neq 0$ nennt man dabei $\deg(a) = g$ den **Grad** von a. Wir setzen $\deg(0) = -\infty$.
(iii) Jedes Element $a \in R$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$a = \sum_{g \in G} a_g,$$

wobei a_g homogen vom Grad g und nur endlich viele $a_g \neq 0$ sind. Man nennt dann a_g die **homogene Komponente vom Grad** g **von** a.
(iv) Sind R, S zwei G-graduierte Ringe, so heißt ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ **graduiert**, falls

$$\varphi(R_g) \subseteq S_g$$

für alle $g \in G$ gilt. △

Beispiel 3.2.2. (i) Jeder Ring R lässt sich trivial G-graduieren, durch $R_0 := R$ und $R_g := \{0\}$ für $g \neq 0$.
(ii) Auf $R = k[\underline{x}]$ ist eine $\mathbb{Z}$-Graduierung eindeutig definiert durch

$$k \subseteq R_0 \text{ und } \deg(x_i) = 1.$$

Dabei besteht R_d dann genau aus den Polynomen

$$p = \sum_{|\alpha|=d} p_\alpha \underline{x}^\alpha,$$

bzw $R_d = \{0\}$ für $d < 0$. Diese Graduierung nennt man **Standardgraduierung** von $k[\underline{x}]$.

(iii) Allgemeiner kann man $k \subseteq R_0$ und $\deg(x_i) = d_i \in \mathbb{Z}$ fordern, und erhält eine eindeutige Graduierung von $R = k[\underline{x}]$, genannt eine **gewichtete Grad-Graduierung**.
(iv) Für $R = k[\underline{x}]$ gibt es beispielsweise auch noch die $\mathbb{Z}^n$-Graduierung mit $R_\alpha = k \cdot \underline{x}^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $R_\beta = \{0\}$ für $\beta \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$. △

Lemma 3.2.3. *Für jeden G-graduierten Ring R gilt $1 \in R_0$, und insbesondere ist R_0 ein Teilring von R.*

Beweis. Schreibe
$$1 = \sum_{g \in G} e_g$$
mit $e_g \in R_g$. Für homogenes $a \in R_h$ gilt dann
$$a = 1 \cdot a = \sum_g e_g a$$
und aus $e_g a \in R_{g+h}$ folgt $e_0 a = a$. Dabei verwenden wir die Eindeutigkeit der Zerlegung in homogene Summanden. Damit gilt aber $e_0 a = a$ für alle $a \in R$, und also ist $e_0 = 1$. □

Bemerkung 3.2.4. Das Rechnen in graduierten Ringen ist manchmal einfacher als in ungraduierten Ringen. Im Folgenden werden wir beispielsweise immer wieder die folgende Tatsache verwenden: Ist
$$a = \sum_i b_i c_i$$
und sind sowohl a als auch alle c_i homogen, kann man die b_i ebenfalls als homogen annehmen, mit
$$\deg(b_i) = \deg(a) - \deg(c_i).$$
Man kann alle b_i nämlich einfach durch ihre homogenen Summanden vom Grad $\deg(a) - \deg(c_i)$ ersetzen, und die Gleichung gilt dann immer noch. △

Lemma 3.2.5. *Sei R ein G-graduierter Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann sind die folgenden Bedingungen an I äquivalent:*

(i) $a \in I \Rightarrow a_g \in I$ *für alle* $g \in G$

(ii) $I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g)$

(iii) I wird von homogenen Elementen erzeugt.

Beweis. Aufgabe 19. □

Definition 3.2.6. Ein Ideal I welches die Bedingungen aus Lemma 3.2.5 erüllt, nennt man **homogenes Ideal**. △

Beispiel 3.2.7. (i) Sei $\varphi\colon R \to S$ ein graduierter Homomorphismus. Dann ist $\ker(\varphi)$ ein homogenes Ideal. Allgemeiner ist $\varphi^{-1}(J)$ für jedes homogene $J \subseteq S$ wieder homogen.
(ii) Ist R $\mathbb{Z}$-graduiert mit $R_d = \{0\}$ für $d < 0$, so ist

$$R_+ = \bigoplus_{d\geq 1} R_d$$

ein homogenes Ideal. Man nennt R_+ das **irrelevante Ideal**. Falls der Ring R_0 ein Körper ist, ist jedes homogene Ideal $I \neq 1$ in R_+ enthalten. Damit die Menge aller homogenen Ideale mehrere maximale Elemente bekommt, entfernt man R_+ oft.
(iii) Bezüglich der Graduierung aus Beispiel 3.2.2 (iv) sind die homogenen Ideale gerade die Ideale, die von Monomen erzeugt werden (vergleiche Definition 2.1.2). △

Lemma 3.2.8. *Sei R ein G-graduierter Ring.*
(i) Summe, Produkt und Durchschnitt von homogenen Idealen in R sind wieder homogen.
(ii) Ist I ein homogenes Ideal, so wird R/I durch

$$(R/I)_g := R_g/I$$

für $g \in G$ zu einem G-graduierten Ring.

Beweis. (i) ist klar, zum Beispiel mit Eigenschaft (i) aus Lemma 3.2.5. Für (ii) beachte zunächst, dass die R_g/I additive Untergruppen von R/I sind. Ebenfalls klar ist $R_g/I \cdot R_h/I \subseteq R_{g+h}/I$ sowie $R/I = \sum_g R_g/I$. Es bleibt zu zeigen, dass die Summe direkt ist. Seien also $a_g \in R_g$ mit

$$\sum_g \overline{a}_g = 0 \text{ in } R/I.$$

Das bedeutet $\sum_g a_g \in I$, und aus der Homogenität von I folgt $a_g \in I$ für alle g. Damit ist aber $\overline{a}_g = 0$ für alle g. □

Bemerkung 3.2.9. Sei I ein homogenes Ideal im graduierten Ring R, und trage R/I die eben eingeführte Graduierung. Dann kann man leicht zeigen, dass die homogenen Ideale von R/I genau den homogenen Idealen J von R mit $I \subseteq J$ entsprechen. △

Ab jetzt setzen wir voraus, dass G eine **angeordnete abelsche Gruppe ist,** d.h. es gibt eine total Ordnung $\leq$ auf G mit

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

für alle $a, b, c \in G$. Wie betrachten sowieso fast immer $G = \mathbb{Z}$, und hier gibt es eine solche Anordnung. Unser Ring R ist ab sofort immer G-graduiert.

Lemma 3.2.10. *Für ein homogenes Ideal I ist $\sqrt{I}$ wieder homogen.*

Beweis. Zeigt man entweder direkt als Aufgabe 20, oder man liest Korollar 3.2.14 weiter unten. □

Lemma 3.2.11. *Sei $I \neq 1$ ein homogenes Ideal im Ring R. Genau dann ist I ein Primideal, wenn für homogene $a, b \in R$ gilt*

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ oder } b \in I.$$

Beweis. Die eine Richtung ist trivial. Seien nun umgekehrt $a, b \in R$, nicht unbedingt homogen, mit $a, b \notin I$. Seien dann $g, h \in G$ die bezüglich $\leq$ jeweils maximalen Indizes mit $a_g \notin I, b_h \notin I$. Dann gilt

$$(ab)_{g+h} = a_g b_h + \underbrace{\cdots}_{\in I},$$

denn für $g' \neq g, h' \neq h$ mit $g' + h' = g + h$ muss entweder $g < g'$ oder $h < h'$ gelten. Nach Voraussetzung ist $a_g b_h \notin I$, und also auch $(ab)_{g+h} \notin I$. Da I homogen ist, folgt $ab \notin I$. □

Satz 3.2.12. *Sei M eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin M$ und $1 \in M$. Dann gibt es ein bezüglich "I homogen und $I \cap M = \emptyset$" maximales Ideal I von R. Jedes solche maximale I ist ein Primideal.*

Beweis. Die Existenz eines solchen maximalen Ideals I folgt direkt aus dem Zorn'schen Lemma. Wir zeigen dass I prim ist. Offensichtlich gilt $I \neq 1$, denn $1 \in M$. Falls

I nicht prim ist, gibt es unter Verwendung von Lemma 3.2.11 also $a, b \in R$ homogen mit $ab \in I, a, b \notin I$. Aufgrund der Maximalität von I ist

$$((a) + I) \cap M \neq \emptyset, \quad ((b) + I) \cap M \neq \emptyset.$$

Also gibt es Identitäten

$$ax + c \in M, \quad by + d \in M$$

mit $x, y \in R, c, d \in I$. Damit erhält man

$$M \ni (ax + c)(by + d) = \underbrace{abxy}_{\in I} + \underbrace{axd + cby + cd}_{\in I} \in I,$$

ein Widerspruch. □

Lemma 3.2.13. *Alle minimalen über dem homogenen Ideal I liegenden Primideale sind homogen.*

Beweis. Aufgabe 21. □

Korollar 3.2.14. *Für jedes homogene Ideal I von R ist $\sqrt{I}$ der Durchschnitt aller darüberliegender homogener Primideale. Insbesondere ist $\sqrt{I}$ selbst homogen.*

Lemma 3.2.15. *Sei R ein G-graduierter Ring und $M \subseteq R$ eine multiplikative Menge aus homogenen Elementen. Dann wird die Lokalisierung $M^{-1}R$ selbst zu einem G-graduierten Ring, vermöge*

$$(M^{-1}R)_g := \left\{ \frac{a}{m} \mid m \in M, a \in R_{\deg(m)+g} \right\}.$$

Beweis. Offensichtlich ist $(M^{-1}R)_g$ eine additive Untergruppe von $M^{-1}R$, und es gilt $(M^{-1}R)_g \cdot (M^{-1}R)_h \subseteq (M^{-1}R)_{g+h}$ sowie

$$M^{-1}R = \sum_g (M^{-1}R)_g.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe direkt ist. Sei dazu

$$0 = \sum_g \frac{a_g}{m_g} = \frac{\sum_g a_g \prod_{h \neq g} m_h}{\prod_h m_h} \text{ in } M^{-1}R,$$

eine endliche Summe mit $a_g \in R$ homogen, $m_g \in M$, sowie

$$\deg(a_g) = \deg(m_g) + g.$$

Dann gibt es ein $m \in M$ mit

$$m \cdot \left(\sum_g a_g \prod_{h \neq g} m_h \right) = 0 \text{ in } R.$$

Der Summand zum Index g ist dabei homogen vom Grad

$$\deg(m) + g + \deg \left(\prod_h m_h \right).$$

Da dies für verschiedene g jeweils verschiedene Grade sind, folgt

$$m \cdot a_g \cdot \prod_{h \neq g} m_h = 0$$

für alle g, und das impliziert $\frac{a_g}{m_g} = 0$ in $M^{-1}R$, für alle g. □

Definition 3.2.16. Sei M eine multiplikative Menge aus homogenen Elementen in R. Der Teilring

$$R_{(M)} := (M^{-1}R)_0 = \left\{ \frac{a}{m} \mid a \in R_{\deg(m)} \right\}$$

der Lokalisierung $M^{-1}R$ heißt **homogene Lokalisierung nach** M. Ihre geometrische Interpretation lernen wir beispielsweise in Satz 4.1.20 kennen. △

Beispiel 3.2.17. (i) Sei $m \in R$ homogen vom Grad $g \in G$. Setze $M = \{1, m, m^2, \ldots\}$ und schreibe

$$R_{(m)} = R_{(M)} = \left\{ \frac{a}{m^r} \mid a \in R_{r \cdot g} \right\}.$$

(ii) Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein homogenes Primideal, und M die Menge aller *homogenen* Elemente aus $R \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist M eine multiplikative Menge und wir nennen

$$R_{(\mathfrak{p})} := R_{(M)} = \left\{ \frac{a}{m} \mid a, m \in R \text{ homogen }, m \notin \mathfrak{p}, \deg(a) = \deg(m) \right\}$$

die **homogene Lokalisierung von** R **in** $\mathfrak{p}$.
(iii) Beachte, dass es zwar einen natürlichen Homomorphismus $R \to M^{-1}R$ gibt, aber im Allgemeinen keinen solchen von R nach $R_{(M)}$. △

3.3 Projektive algebraische Varietäten

Seien ab jetzt stets wieder k ein beliebiger Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper. Wir schreiben

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

Beachte dass wir im Sinne von Definition 3.1.1 den Raum K^{n+1} dabei als K-Vektorraum betrachten, und nicht etwa als k-Vektorraum. Elemente von $\mathbb{P}^n$ sind also eindimensionale K-Unterräume von K^{n+1}. Weiter ist ab jetzt $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ und $k[\underline{x}]$ immer mit der Standardgraduierung versehen. Für *homogenes* $p \in k[\underline{x}]$ und $v \in K^{n+1}$ sowie $\lambda \in K$ gilt

$$p(\lambda \cdot v) = \lambda^{\deg(p)} \cdot p(v).$$

Wenn ein homogenes Polynom an einem Punkt verschwindet, verschwindet es also auf der ganzen davon aufgespannten Gerade, und also ist für $a = [v] \in \mathbb{P}^n$ die Setzung

$$p(a) = 0 \;:\Leftrightarrow\; p(v) = 0$$

wohldefiniert. Analog schreiben wir $p(a) \neq 0$ falls $p(v) \neq 0$. Für allgemeines $p \in k[\underline{x}]$ schreibe

$$p = p_0 + p_1 + \cdots + p_d$$

mit $p_i \in k[\underline{x}]_i$ und definiere

$$p(a) = 0 \;:\Leftrightarrow\; p_0(a) = p_1(a) = \cdots = p_d(a) = 0.$$

Wegen

$$p(\lambda \cdot v) = p_0 + \lambda \cdot p_1(v) + \lambda^2 \cdot p_2(v) + \cdots + \lambda^d \cdot p_d(v)$$

ist das äquivalent zu

$$p(\lambda v) = 0 \text{ für alle } \lambda \in K,$$

d.h. dass p auf der ganzen von v aufgespannten Geraden verschwindet.

Definition 3.3.1. Sei $P \subseteq k[\underline{x}]$ und $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{P}^n$.
(i) Wir definieren

$$\mathcal{V}_+(P) = \{a \in \mathbb{P}^n \mid p(a) = 0 \text{ für alle } p \in P\}$$

sowie

$$\mathcal{I}_+(V) := \{p \in k[\underline{x}] \mid p(a) = 0 \text{ für alle } a \in V\}.$$

Wir nennen $\mathcal{V}_+(P)$ die von P definierte **projektive Varietät** und $\mathcal{I}_+(V)$ das **Verschwindungsideal** von V.
(ii) Eine Menge der Gestalt $\mathcal{V}_+(P)$ mit $P \subseteq k[\underline{x}]$ heißt **projektive k-Varietät**.
(iii) Wir setzen

$$\widehat{V} := \bigcup_{a \in V} a = \left\{v \in K^{n+1} \mid v \neq 0, [v] \in V\right\} \cup \{0\}$$

und nennen $\widehat{V}$ den **affinen Kegel über** V.
(iv) Weiter setzen wir

$$\mathcal{I}_+(\emptyset) := (x_0, \ldots, x_n)$$

(das irrelevante Ideal) und

$$\widehat{\emptyset} := \{0\}.$$

(v) Für homogenes $p \in k[\underline{x}]$ sei

$$\mathcal{D}_+(p) := \{a \in \mathbb{P}^n \mid p(a) \neq 0\} = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{V}_+(p). \qquad \triangle$$

Bemerkung 3.3.2. (i) Für $V \subseteq \mathbb{P}^n$ beliebig gilt in $k[\underline{x}]$

$$\mathcal{I}_+(V) = \mathcal{I}(\widehat{V}).$$

Insbesondere ist $\mathcal{I}_+(V)$ ein Radikalideal. Andererseits ist $\mathcal{I}_+(V)$ nach Definition von "$p(a) = 0$" auch ein homogenes Ideal.
(ii) Für $M \subseteq k[\underline{x}]$ sei M_h die Menge aller homogenen Komponenten von Elementen aus M, und $I = (M_h)$ das davon erzeugte Ideal. Dann gilt

$$\mathcal{V}_+(M) = \mathcal{V}_+(M_h) = \mathcal{V}_+(I) = \mathcal{V}_+(\sqrt{I})$$

(iii) Es gilt

$$\mathcal{V}_+(k[\underline{x}]) = \mathcal{V}_+((x_0, \ldots, x_n)) = \emptyset$$

und

$$\mathcal{V}_+(0) = \mathbb{P}^n.$$

Für homogene Ideale I, J, I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ gilt

$$\mathcal{V}_+(I) \cup \mathcal{V}_+(J) = \mathcal{V}_+(I \cap J) = \mathcal{V}_+(IJ)$$

sowie

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}_+(I_\lambda) = \mathcal{V}_+\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right).$$

(iv) Für beliebige Teilmengen $V_\lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ ($\lambda \in \Lambda$) gilt

$$\widehat{\bigcup_\lambda V_\lambda} = \bigcup_\lambda \widehat{V}_\lambda \text{ und } \widehat{\bigcap_\lambda V_\lambda} = \bigcap_\lambda \widehat{V}_\lambda.$$

(v) Ist $I \subsetneq k[\underline{x}]$ ein *homogenes* Ideal, so gilt in

$$\widehat{\mathcal{V}_+(I)} = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Mit jedem Punkt $v \in \mathcal{V}(I)$ ist nämlich $[v] \subseteq \mathcal{V}(I)$, da I von homogenen Elementen erzeugt ist. Man beachte dass die Aussage für $I = k[\underline{x}]$ nicht stimmt, denn $\widehat{\emptyset} = \{0\} \neq \emptyset$. Für $I = (x_0, \ldots, x_n)$ stimmt sie aber. Man beachte weiter, dass die Aussage für nicht-homogene Ideale ebenfalls nicht stimmt. So ist etwa nach unserer Definition

$$\mathcal{V}_+(x_0 - 1) = \emptyset \subseteq \mathbb{P}^1, \quad \widehat{\mathcal{V}_+(x_0 - 1)} = \{0\},$$

aber

$$\mathcal{V}(x_0 - 1) = \{(1, r) \mid r \in K\} \subseteq \mathbb{A}^2. \qquad \triangle$$

Definition 3.3.3. Die k-**Zariskitopologie auf** $\mathbb{P}^n$ habe genau die projektiven k-Varietäten als abgeschlossene Mengen. Nach Bemerkung 3.3.2 (iii) definiert das wirklich eine Topologie. $\triangle$

Lemma 3.3.4. *(i) Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\widehat{V} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ abgeschlossen ist.*
(ii) Die k-Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n$ ist noethersch.

Beweis. Für (i) sei zunächst $V = \mathcal{V}_+(I)$ für ein homogenes Ideal $I \neq 1$ (vergleiche Bemerkung 3.3.2 (ii)). Dann ist nach Bemerkung 3.3.2 (v) auch $\widehat{V} = \mathcal{V}(I)$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^{n+1}$. Sei umgekehrt $\widehat{V} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ abgeschlossen. Dann ist $I := \mathcal{I}(\widehat{V})$ ein homogenes Ideal $\neq 1$, denn $\widehat{V}$ ist nichtleer und eine Vereinigung von Ursprungsgeraden. Für $W := \mathcal{V}_+(I)$ haben wir dann

$$\widehat{W} = \mathcal{V}(I) = \widehat{V},$$

wobei wir die Abgeschlossenheit von $\widehat{V}$ für die letzte Gleichheit verwenden. Damit ist aber $V = W = \mathcal{V}_+(I)$ abgeschlossen.
Für (ii) sei eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen

$$V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots$$

in $\mathbb{P}^n$ gegeben. Dann ist

$$\widehat{V}_0 \supseteq \widehat{V}_1 \supseteq \cdots$$

eine absteigene Folge abgeschlossener Mengen in $\mathbb{A}^{n+1}$. Diese wird stationär, und also auch die ursprüngliche Folge. $\square$

Satz 3.3.5. *Sei $I \neq 1$ ein homogenes Ideal in $k[\underline{x}]$, und sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Teilmenge. Dann gilt*

(i) $\mathcal{I}_+(\mathcal{V}_+(I)) = \sqrt{I}$.

(ii) $\mathcal{V}_+(\mathcal{I}_+(V)) = \overline{V}$.

(iii) $V \mapsto \mathcal{I}_+(V)$ *ist eine Bijektion zwischen abgeschlossenen Teilmengen von* $\mathbb{P}^n$ *und homogenen Radikalidealen* $\neq 1$ *von* $k[\underline{x}]$*. Die Umkehrabbildung ist* $I \mapsto \mathcal{V}_+(I)$.

Beweis. Aussage (i) sieht man durch

$$\mathcal{I}_+(\mathcal{V}_+(I)) = \mathcal{I}(\widehat{\mathcal{V}_+(I)}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I},$$

wobei wir Bemerkung 3.3.2 und Satz 1.2.14 benutzt haben. Aussage (ii) folgt direkt aus der Definition der Zariskitopologie, denn $\mathcal{V}_+(\mathcal{I}_+(V))$ ist offensichtlich die kleinste abgeschlossene Obermenge von V. Aussage (iii) folgt unmittelbar aus (i) und (ii). □

Bemerkung 3.3.6. Im affinen wird die leere Varietät genau durch das Ideal $I = (1)$ definiert, und sonst durch kein Ideal (siehe Satz 1.2.11). Im projektiven Raum entsteht $\emptyset$ entweder durch ein bereits in $\mathbb{A}^{n+1}$ unlösbares homogenes Gleichungssystem, also durch das homogene Radikalideal $k[\underline{x}]$, oder durch ein homogenes System, das in $\mathbb{A}^{n+1}$ gerade $\{0\}$ definiert, also etwa durch das irrelevante Ideal $k[\underline{x}]_+$. Beides sind homogene Radikalideale, und in der Bijektion aus Satz 3.3.5 haben wir $k[\underline{x}]_+$ ausgewählt.
Die (nicht notwendigerweise radikalen) homogenen Ideale, die $\emptyset \subseteq \mathbb{P}^n$ definieren, kann man noch genauer beschreiben. Dabei betrachten dazu den **Idealquotienten**

$$(I : J) = \{a \in A \mid aJ \subseteq I\},$$

und definieren weiter

$$(I : J^\infty) := \bigcup_{d=0}^{\infty} (I : J^d).$$

Beachte dabei dass $(I : J^\infty)$ als Vereinigung der aufsteigenden Folge

$$I \subseteq (I : J) \subseteq (I : J^2) \subseteq \cdots$$

wieder ein Ideal ist. Man nennt es die **Saturierung von** I **bezüglich** J. △

Satz 3.3.7. *Sei $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein homogenes Ideal und $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n)$ das irrelevante Ideal. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{V}_+(I) = \emptyset$

(ii) $\mathfrak{m}^d \subseteq I$ *für ein* $d \geq 0$

(iii) $(I : \mathfrak{m}^\infty) = (1)$

(iv) $k[\underline{x}]_d \subseteq I$ *für ein* $d \geq 0$.

Beweis. Es ist $(I : \mathfrak{m}^\infty) = \bigcup_{d \geq 0}(I : \mathfrak{m}^d)$, und deshalb gilt

$$(I : \mathfrak{m}^\infty) = (1) \;\Leftrightarrow\; 1 \in (I : \mathfrak{m}^d) \text{ für ein } d \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{m}^d \subseteq I \text{ für ein } d \geq 0.$$

Das zeigt die Äquivalenz von (ii) und (iii). Für $(i)\Rightarrow(ii)$ sei $V = \mathcal{V}_+(I) = \emptyset$ und $I \neq 1$. Dann folgt mit Satz 3.3.5

$$\mathfrak{m} = \mathcal{I}_+(V) = \sqrt{I},$$

und insbesondere gilt $x_i^r \in I$ für alle i und ein r. Dann gilt $\mathfrak{m}^{r(n+1)} \subseteq I$, wie man sich leicht überlegt. Die Richung $(ii)\Rightarrow(iv)$ folgt direkt aus

$$k[\underline{x}]_d \subseteq \mathfrak{m}^d.$$

$(iv)\Rightarrow(i)$ gilt wegen $\mathcal{V}_+(x_0^d, \ldots, x_n^d) = \emptyset$. □

Definition 3.3.8. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive k-Varietät. Dann nennt man die $\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra

$$k_+[V] := k[\underline{x}]/\mathcal{I}_+(V)$$

den **projektiven Koordinatenring von** V (die Graduierung ist wie in Lemma 3.2.8 (ii) definiert). △

Bemerkung 3.3.9. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive k-Varietät.
(i) Der affine Kegel $\widehat{V} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ über V ist eine affine k-Varietät, und es gilt $\mathcal{I}(\widehat{V}) = \mathcal{I}_+(V)$. Also gilt

$$k[\widehat{V}] = k_+[V]$$

als *ungraduierte* Ringe.
(ii) Die Elemente von $k_+[V]$ lassen sich *nicht* wie im affinen Fall als Funktionen auf V auffassen. Zwar ist für homgenes $p \in k_+[V]$ die Bedingung $p(v) = 0$ für

$v \in V$ wohldefiniert, nicht jedoch der *Wert* $p(v)$. Sind allerdings $p, q \in k_+[V]$ *homogen vom selben Grad*, so definiert

$$v \mapsto \frac{p(v)}{q(v)}$$

eine wohldefinierte Abbildung $V \setminus \mathcal{V}_+(q) \to \mathbb{A}^1$.
(iii) Für ein homogenes Ideal $J \subseteq k_+[V]$ definieren wir

$$\mathcal{V}_{V,+}(J) := \{v \in V \mid p(v) = 0 \,\forall p \in J\}$$

und für homogenes $p \in k_+[V]$

$$\mathcal{D}_{V,+}(p) := V \setminus \mathcal{V}_{V,+}(p).$$

Die homogenen Radikalideale von $k_+[V]$ entsprechen den homogenen Radikalidealen von $k[\underline{x}]$ über $\mathcal{I}_+(V)$, und diese entsprechen wiederum den projektiven k-Untervarietäten von V. Damit erhalten wir die zu Bemerkung 1.4.4 analoge Aussage: die Zuordnung $\mathcal{V}_{V,+}(\cdot)$ liefert eine Bijektion zwischen homogenen Radikalidealen $\neq 1$ in $k_+[V]$ und projektiven k-Untervarietäten von V. $\triangle$

Konstruktion 3.3.10. Für $i \in \{0, \dots, n\}$ betrachte die wohldefinierte Bijektion

$$\begin{aligned} \phi_i \colon \mathcal{D}_+(x_i) &\to \mathbb{A}^n \\ (a_0 : \ldots : a_n) &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\widehat{a_i}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \\ (b_1 : \ldots : 1 : \ldots : b_n) &\leftarrow\!\shortmid (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Dabei sei ab jetzt der Einfachheit halber stets $i = 0$ angenommen.
Für $0 \neq p \in k[x_1, \dots, x_n]$ definieren wir

$$p^h := x_0^{\deg(p)} \cdot p\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in k[x_0, \dots, x_n]_{\deg(p)}$$

$$0^h := 0$$

und nennen p^h die **Homogenisierung von** p **mittels** x_0. Ist etwa $\deg(p) = d$ und $p = \sum_{|\alpha| \le d} p_\alpha \underline{x}^\alpha$, so gilt

$$p^h := \sum_{|\alpha| \le d} p_\alpha \cdot x_0^{d-|\alpha|} \cdot \underline{x}^\alpha.$$

Wir machen also p homogen, indem wir jedes Monom von p, welches nicht den maximalen Grad d hat, so oft mit x_0 multiplizieren, bis es Grad d hat. Beispielsweise ist

$$(x_1^2 - x_2 + 1)^h = x_1^2 - x_0 x_2 + x_0^2.$$

Nach Definition ist

$$(p_1 \cdot p_2)^h = p_1^h \cdot p_2^h$$

klar.
Sein nun umgekehrt $q \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogen. Dann setzen wir

$$\tilde{q} := q(1, x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

und nennen $\tilde{q}$ die **Dehomogenisierung von** q **mittels** x_0. Offensichtlich gilt dabei

$$\widetilde{p^h} = p.$$

Weiter ist

$$x_0^m \cdot (\tilde{q})^h = q \text{ für ein } m \geq 0.$$

In der letzten Gleichung taucht $m \geq 1$ genau dann auf, wenn der Grad von q beim Dehomogenisieren sinkt, also jedes Monom in q durch x_0 geteilt wird. Es ist also $m = \deg(q) - \deg(\tilde{q})$. Im folgenden Lemma zeigen wir, dass die algebraische Konstruktion der Homogenisierung bzw. Dehomogenisierung genau dem Anwenden von ϕ_0 auf der geometrischen Seite entspricht. △

Lemma 3.3.11. *Mit den vorangegangenen Konstruktionen erhalten wir für* $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$

$$\phi_0^{-1}(\mathcal{V}(p)) = \mathcal{V}_+(p^h) \cap \mathcal{D}_+(x_0)$$

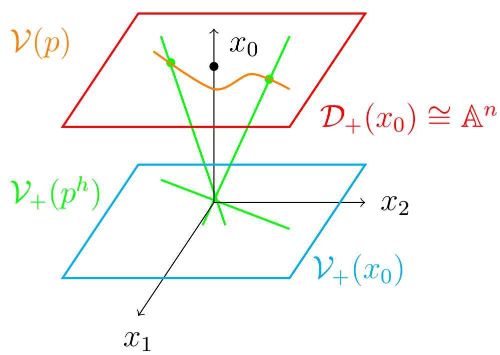
und für $q \in k[x_0, \ldots, x_n]$ *homogen*

$$\phi_0(\mathcal{V}_+(q) \cap \mathcal{D}_+(x_0)) = \mathcal{V}(\tilde{q}).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi_0^{-1}(\mathcal{V}(p)) &= \left\{ (a_0 : \ldots : a_n) \mid a_0 \neq 0, p\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = 0 \right\} \\
&= \left\{ (a_0 : \ldots : a_n) \mid a_0 \neq 0, a_0^{\deg(p)} \cdot p\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = 0 \right\} \\
&= \left\{ (a_0 : \ldots : a_n) \mid a_0 \neq 0, p^h(a_0, \ldots, a_n) = 0 \right\} \\
&= \mathcal{V}_+(p^h) \cap \mathcal{D}_+(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_0\left(\mathcal{V}_+(q) \cap \mathcal{D}_+(x_0)\right) &= \left\{ \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \mid a_0 \neq 0, q(a_0, \dots, a_n) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) \mid a_0 \neq 0, a_0^{\deg(q)} q\left(1, \frac{a_1}{a_0} \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) = 0 \right\} \\
&= \{(b_1, \dots, b_n) \mid \tilde{q}(b_1, \dots, b_n) = 0\} \\
&= \mathcal{V}(\tilde{q}).
\end{aligned}$$



□

Satz 3.3.12. *Für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ ist $\phi_i \colon \mathcal{D}_+(x_i) \to \mathbb{A}^n$ ein Homöomorphismus bezüglich der Zariskitopologien.*

Beweis. ϕ_i ist bijektiv, und nach Lemma 3.3.11 sind Bilder und Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Bemerkung 3.3.13. Ist ist also

$$\mathbb{P}^n = \mathcal{D}_+(x_0) \cup \dots \cup \mathcal{D}_+(x_n)$$

eine offene Überdeckung mit zu $\mathbb{A}^n$ homöomorphen Teilmengen. △

Definition 3.3.14. Sei $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Die **Homogenisierung** I^h von I ist das homogene Ideal

$$I^h := \left(p^h \mid p \in I\right) \subseteq k[x_0, \dots, x_n]. \qquad \triangle$$

Korollar 3.3.15. *Es gilt*

$$\phi_0^{-1}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{V}_+(I^h) \cap \mathcal{D}_+(x_0).$$

Beweis.

$$\phi_0^{-1}\left(\mathcal{V}(I)\right) = \phi_0^{-1}\left(\bigcap_{p\in I}\mathcal{V}(p)\right) = \bigcap_{p\in I}\phi_0^{-1}\left(\mathcal{V}(p)\right)$$
$$= \mathcal{D}_+(x_0)\cap\bigcap_{p\in I}\mathcal{V}_+(p^h) = \mathcal{D}_+(x_0)\cap\mathcal{V}_+(I^h),$$

wobei wir Lemma 3.3.11 benutzt haben. □

Lemma 3.3.16. *Sei $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ ein Ideal.*
(i) Jedes homogene $q \in I^h$ ist von der Gestalt $q = x_0^r \cdot p^h$ für ein $p \in I$.
(ii) Es gilt $\sqrt{I^h} = \sqrt{I}^h$. Insbesondere ist die Homogenisierung eines Radikalideals wieder ein Radikalideal.

Beweis. Für (i) schreibe $q = \sum_i g_i p_i^h$ mit $g_i \in k[x_0,\ldots,x_n]$ und $p_i \in I$. Da q und alle p_i^h homogen sind, können auch die g_i als homogen angenommen werden. Also haben wir

$$q = \sum_i x_0^{r_i}\tilde{g}_i^h p_i^h$$

mit $\deg(g_i) + \deg(p_i) = \deg(q) =: d$ und $r_i = \deg(g_i) - \deg(\tilde{g}_i)$. Dann gilt

$$d' := \deg\left(\sum_i \tilde{g}_i p_i\right) \le d,$$

da jeder Term der Summe Grad höchstens d hat. Wir erhalten

$$x_0^{d-d'}\left(\sum_i \tilde{g}_i p_i\right)^h = x_0^{d-d'}\cdot\sum_i x_0^{d'-\deg(\tilde{g}_i)-\deg(p_i)}\tilde{g}_i^h p_i^h$$
$$= \sum_i x_0^{d-\deg(\tilde{g}_i)-\deg(p_i)}\tilde{g}_i^h p_i^h$$
$$= \sum_i x_0^{r_i}\tilde{g}_i^h p_i^h = q.$$

Das zeigt Behauptung (i). Behauptung (ii) ist Aufgabe 22. □

Definition 3.3.17. Für jede affine k-Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$ nennt man

$$\overline{V} := \overline{\phi_0^{-1}(V)} \subseteq \mathbb{P}^n$$

den **projektiven Abschluss von** V **in** $\mathbb{P}^n$ (bezüglich ϕ_0^{-1}). Oft unterdrücken wir ϕ_0 in der Notation. Da $\mathbb{P}^n$ auf $\mathbb{A}^n$ genau die Zariskitopologie induziert, gilt $\overline{V}\cap\mathbb{A}^n = V$. △

Satz 3.3.18. *Sei $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Für den projektiven Abschluss gilt dann*

$$\overline{\mathcal{V}(I)} = \mathcal{V}_+\left(I^h\right) \text{ und } \mathcal{I}_+\left(\overline{\mathcal{V}(I)}\right) = \sqrt{I^h} = \sqrt{I}^h = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))^h.$$

Beweis. Sei $V := \mathcal{V}(I)$. Die erste Aussage folgt aus der zweiten, durch Anwenden von $\mathcal{V}_+(\cdot)$. Sei also zunächst $p \in \sqrt{I} = \mathcal{I}(V)$. Dann gilt $p^h \equiv 0$ auf $\phi_0^{-1}(V)$, nach Lemma 3.3.11. Dann gilt aber $p^h \equiv 0$ auf $\overline{\phi_0^{-1}(V)} = \overline{V}$, d.h. $p^h \in \mathcal{I}_+\left(\overline{V}\right)$. Das zeigt $\sqrt{I}^h \subseteq \mathcal{I}_+\left(\overline{V}\right)$. Sei umgekehrt $g \in \mathcal{I}_+\left(\overline{V}\right)$, und g o.B.d.A. homogen. Schreibe $g = x_0^m g_1$ mit $x_0 \nmid g_1$. Dann gilt $g_1 \equiv 0$ auf $\mathcal{D}_+(x_0) \cap \overline{V}$, und also $\tilde{g}_1 \equiv 0$ auf V, wieder nach Lemma 3.3.11. Daraus folgt $\tilde{g}_1 \in \sqrt{I}$ und es gilt $g_1 = \tilde{g}_1^h$, denn $x_0 \nmid g_1$. Also ist g_1 und damit auch g in $\sqrt{I}^h$. □

Bemerkung 3.3.19. Ist $I = (p_1, \ldots, p_s)$, so gilt

$$\left(p_1^h, \ldots, p_s^h\right) \subseteq I^h,$$

aber im Allgemeinen *keine Gleichheit*. Für $p_1 = x_1, p_2 = x_1 + 1$ gilt

$$I = (p_1, p_2) = (1)$$

und deshalb $I^h = (1)$. Es ist aber

$$\left(p_1^h, p_2^h\right) = (x_1, x_1 + x_0) \neq (1). \qquad \triangle$$

Definition 3.3.20. (i) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine k-Varietät und $\overline{V} \subseteq \mathbb{P}^n$ der projektive Abschluss. Sei $H = \mathcal{V}_+(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$. Dann heißen die Punkte von

$$H \cap \overline{V} = \overline{V} \setminus V$$

die **unendlich fernen Punkte von** V, bzw. die Punkte von V **im unendlichen**. Sie bilden eine abgeschlossene Menge in $H = \mathbb{P}^{n-1}$.
(ii) Für $0 \neq p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ schreibe $p = p_0 + p_1 + \cdots + p_d$ mit p_i homogen vom Grad i, $p_d \neq 0$. Dann heißt

$$\mathrm{LF}(p) := p_d$$

die **Leitform** von p. Beachte dass

$$\mathrm{LF}(p) = p^h(0, x_1, \ldots, x_n)$$

gilt.
(iii) Für ein Ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ heißt

$$\mathrm{LF}(I) := (\mathrm{LF}(p) \mid p \in I)$$

das **Leitformideal von** I. Es ist ein homogenes Ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$. △

Korollar 3.3.21. *Sei* $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Ideal und* $V = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$*. Sei* $H = \mathcal{V}_+(x_0)$*. Dann gilt*

$$\overline{V} \cap H = \mathcal{V}_+(\mathrm{LF}(I)) \subseteq H \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

wobei wir $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ *mit homogenen Koordinaten* $(x_1 : \ldots : x_n)$ *versehen. Insbesondere gilt* $\mathcal{I}_+(\overline{V} \cap H) = \sqrt{\mathrm{LF}(I)}$ *in* $k[x_1, \ldots, x_n]$*.*

Beweis. Wegen $\overline{V} = \mathcal{V}_+(I^h)$ gilt in $\mathbb{P}^n$

$$\overline{V} \cap H = \mathcal{V}_+((x_0) + I^h) = \mathcal{V}_+((x_0) + \mathrm{LF}(I)),$$

denn $p^h \equiv \mathrm{LF}(p)$ modulo (x_0). Beschränken wir uns auf H, erhalten wir also $\mathcal{V}_+(\mathrm{LF}(I)) \subseteq H = \mathbb{P}^{n-1}$. □

Beispiel 3.3.22. (i) Der projektive Abschluss einer affinen Hyperfläche

$$\mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^n$$

(mit $0 \neq p \in k[x_1, \ldots, x_n]$) ist

$$\overline{V} = \mathcal{V}_+(p^h),$$

denn $(p)^h = (p^h)$. Ist p quadratfrei so gilt $\mathcal{I}_+\left(\overline{V}\right) = \sqrt{(p)}^h = (p)^h = (p^h)$. Die unendlich fernen Punkte von V sind die Nullstellen von $\mathrm{LF}(p)$ in $\mathcal{V}_+(x_0) = \mathbb{P}^{n-1}$.
(ii) Für $p \in k[x_1, x_2]$ mit $\deg(p) \geq 1$ betrachte die affine Kurve $V = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^2$. Es gibt eine Faktorisierung

$$\mathrm{LF}(p) = c \cdot \prod_{i=1}^{d} (a_i x_1 + b_i x_2)$$

mit $(a_i : b_i) \in \mathbb{P}^1(\overline{k})$, $c \in k^*$, wobei die $(a_i : b_i)$ eindeutig bestimmt sind. Das erhält man, indem man $\mathrm{LF}(p)(x_1, 1) \in k[x_1]$ über $\overline{k}$ faktorisiert, und dann wieder homogenisiert. Die unendlich fernen Punkte von V sind also gerade die

$$(0 : b_i : -a_i) \in \mathbb{P}^2 \qquad i = 1, \ldots, d$$

beziehungsweise die Punkte

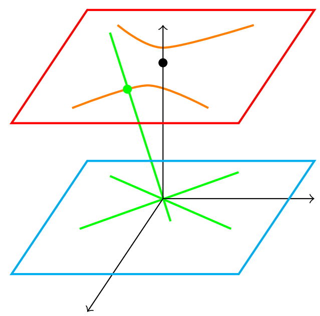
$$(b_i : -a_i) \in \mathbb{P}^1 = \mathcal{V}_+(x_0) \qquad i = 1, \ldots, d.$$

(iii) Im Fall $p = x_1^2 - x_2^2 - 1$ ist $\mathcal{V}(p)$ eine Hyperbel. Wegen

$$\mathrm{LF}(p) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

ergeben sich die beiden unendlich fernen Punkte

$$(0:1:1) \qquad (0:1:-1).$$



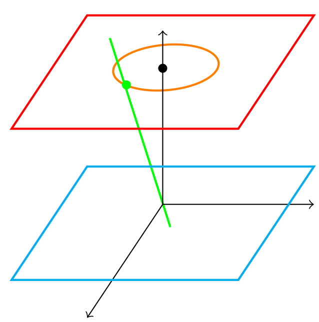
(iv) Im Fall $p = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2$ ist $\mathcal{V}(p)$ ein Kreis. Wegen

$$\mathrm{LF}(p) = x_1^2 + x_2^2$$

gibt es die beiden unendlich fernen Punkte

$$(0:1:\sqrt{-1}) \qquad (0:1:-\sqrt{-1})$$

die man im reellen Bild jedoch nicht sehen kann.



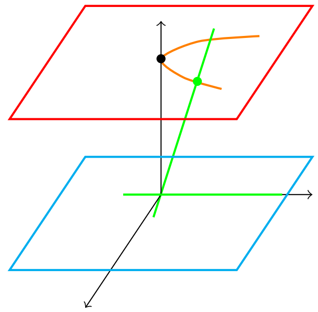
(v) Im Fall $p = x_1^2 - x_2$ ist $\mathcal{V}(p)$ eine Parabel. Wegen

$$\mathrm{LF}(p) = x_1^2$$

erhält man nur den einen Punkt

$$(0:0:1)$$

im Unendlichen.

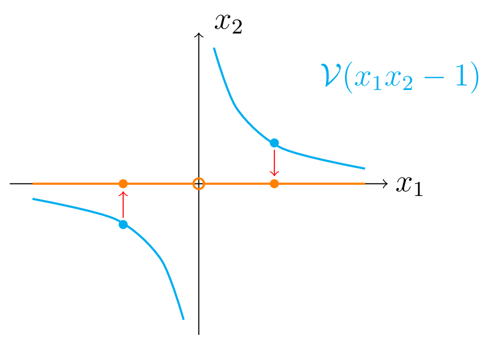


$\triangle$

Bemerkung 3.3.23. Selbst wenn $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Radikalideal ist, muss $\mathrm{LF}(I)$ kein Radikalideal sein. Das sieht man am letzten Beispiel mit $I = (x_1^2 - x_2)$. Hier ist $\mathrm{LF}(I) = (x_1^2)$. $\triangle$

3.4 Der Hauptsatz der Eliminationstheorie

Wir haben in Abschnitt 1.4 schon gesehen, dass das Bild einer affinen Varietät unter einem Morphismus nicht unbedingt wieder abgeschlossen, d.h. eine affine Varietät ist. Ein Beispiel ist die Projektion der Varietät $\mathcal{V}(x_1x_2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ auf die x_1-Komponente. Das Bild ist dabei gerade $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.



Der Grund für die fehlende Abgeschlossenheit besteht darin, dass das Urbild eines Punktes $a \in \mathbb{A}^1$ "gegen Unendlich verschwindet", wenn a gegen 0 läuft. Im projektiven Raum haben wir nun auch Punkte im Unendlichen zur Verfügung, und das ist der Grund, warum die Situation dann anders ist. Seien in diesem Abschnitt

$$\underline{x} = (x_0, \dots, x_m), \quad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

zwei Tupel von Variablen. Ein Polynom $p \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ heißt **homogen in** $\underline{x}$, falls es als Element des Polynomrings $(k[\underline{y}])[\underline{x}]$ homogen bezüglich der Standardgraduierung ist. Das bedeutet also gerade, dass für jedes Monom $\underline{x}^\alpha \underline{y}^\beta$ von p gilt $|\alpha| = d$, für ein festes $d \in \mathbb{N}$. Seien nun $p_1, \ldots, p_r \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ homogen bezüglich $\underline{x}$. Dann ist die folgende Menge wohldefiniert:

$$X := \{(a, b) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n \mid p_1(a, b) = \cdots = p_r(a, b) = 0\} .$$

Sei

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n &\to \mathbb{A}^n \\ (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

die Projektion auf die zweite Komponente.

Satz 3.4.1 (Hauptsatz der Eliminationstheorie). *Die Menge $\pi(X)$ ist k-abgeschlossen in $\mathbb{A}^n$.*

Beweis. Für $b \in \mathbb{A}^n$ gilt

$$b \in \pi(X) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{V}_+(p_1(\underline{x}, b), \ldots, p_r(\underline{x}, b)) \neq \emptyset.$$

Sei $R = K[\underline{x}]$ versehen mit der Standardgraduierung. Mit Satz 3.3.7 haben wir also

$$b \in \pi(X) \;\Leftrightarrow\; R_d \not\subseteq (p_1(\underline{x}, b), \ldots, p_r(\underline{x}, b)) \;\forall d \geq 0.$$

Für $d \geq 0$ setzen wir

$$Y_d := \{b \in \mathbb{A}^n \mid R_d \not\subseteq (p_1(\underline{x}, b), \ldots, p_r(\underline{x}, b))\} .$$

Dann gilt

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \quad \text{und} \quad \bigcap_{d \geq 0} Y_d = \pi(X).$$

Es genügt also zu zeigen, dass Y_d für alle genügend großen d abgeschlossen sind. Sei dazu $d_i = \deg_{\underline{x}}(p_i)$ und $d \geq \max\{d_1, \ldots, d_r\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b \notin Y_d &\Leftrightarrow R_d \subseteq (p_1(\underline{x}, b), \ldots, p_r(\underline{x}, b)) \\ &\Leftrightarrow \text{die } \underline{x}^\alpha \cdot p_i(\underline{x}, b) \text{ mit } |\alpha| = d - d_i \text{ spannen über } K \text{ ganz } R_d \text{ auf.} \end{aligned}$$

Für die zweite Äquivalenz haben wir Bemerkung 3.2.4 verwendet. Entwickelt man die $\underline{x}^\alpha \cdot p_i(\underline{x}, b)$ nun alle in einer geeigneten Basis von R_d (z.B. in der Monombasis) und schreibt die Koeffizienten in eine Matrix B, dann sind die Einträge von B Polynome über k in b, und wir erhalten insgesamt

$$b \notin Y_d \Leftrightarrow \operatorname{rang}(B) \geq \dim_K R_d.$$

Also gilt nun

$$\begin{aligned} b \in Y_d &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(B) < \dim_K R_d \\ &\Leftrightarrow \text{alle Minoren von } B \text{ der Größe } \dim_K R_d \text{ verschwinden.} \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung definiert eine k-abgeschlossene Menge. □

Bemerkung 3.4.2. Der Hauptsatz der Eliminationstheorie besagt, dass es zu $\underline{x}$-homogenen Polynomen $p_1, \dots, p_r \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ weitere Polynome $q_1, \dots, q_s \in k[\underline{y}]$ gibt, so dass für alle $b \in K^n$ gilt

$$\exists a \in \mathbb{P}^m(K) : \bigwedge_i p_i(a, b) = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_j q_j(b) = 0.$$

Man kann den Existenzquantor also eliminieren. △

Bemerkung 3.4.3. Alle Varietäten sind noethersch in der Zariskitopologie, und besitzen damit die endliche Überdeckungseigenschaft mit offenen Mengen. In Nicht-Hausdorffräumen ist diese Quasikompaktheit aber oft nicht sehr hilfreich. Der Hauptsatz der Eliminationstheorie ist nun eine Art alternative Kompaktheitsaussage für $\mathbb{P}^n$. Ein Hausdorffraum X ist genau dann kompakt, wenn für alle Hausdorffräume Y die Projektion

$$\pi \colon X \times Y \to Y$$

abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. Das wird in Aufgabe 24 bewiesen. △

Satz 3.4.4. *Sei $I = (p_1, \dots, p_r)$ das von den $\underline{x}$-homogenen Polynomen $p_i \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ erzeugte Ideal und $\mathfrak{m} := (x_0, \dots, x_m) \subseteq k[\underline{x}, \underline{y}]$. Setze*

$$\hat{I} := (I : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[\underline{y}].$$

Dann gilt $\pi(X) = \mathcal{V}(\hat{I})$ in $\mathbb{A}^n$.

Beweis. Für $i = 0, \dots, m$ setze $U_i := \mathcal{D}_+(x_i) \times \mathbb{A}^n$ und

$$X_i := X \cap U_i.$$

Wegen $\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n = U_0 \cup \cdots \cup U_m$ gilt $\pi(X) = \bigcup_{i=0}^m \pi(X_i)$, und wegen der Abgeschlossenheit von $\pi(X)$ (nach Satz 3.4.1) gilt

$$\pi(X) = \bigcup_{i=0}^m \overline{\pi(X_i)}.$$

Wir betrachten nun die Bijektion

$$\begin{aligned}\psi_i\colon U_i &\to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n\\ (a,b) &\mapsto \left(\frac{1}{a_i}a^{(i)}, b\right)\end{aligned}$$

wobei $a^{(i)} = (a_0, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, a_m)$ ist, und die Dehomogenisierung als Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi_i\colon k[\underline{x},\underline{y}] &\to k[\underline{x}^{(i)},\underline{y}]\\ x_i &\mapsto 1\\ x_j &\mapsto x_j \quad (j \neq i)\\ y_k &\mapsto y_k.\end{aligned}$$

Dann wird ganz analog zu Lemma 3.3.11 die Menge $\psi_i(X_i)$ durch das Ideal $\varphi_i(I)$ beschrieben. Nach Satz 1.4.13 ist dann aber

$$\overline{\pi(X_i)} = \mathcal{V}\left(k[\underline{y}] \cap \varphi_i(I)\right) \subseteq \mathbb{A}^n,$$

und also

$$\pi(X) = \mathcal{V}\left(k[\underline{y}] \cap \bigcap_{i=0}^{m} \varphi_i(I)\right).$$

Wir zeigen nun

$$k[\underline{y}] \cap \varphi_i(I) = k[\underline{y}] \cap (I : x_i^\infty)$$

für alle i, und daraus folgt die Aussage. Für "$\supseteq$" sei $g \in k[\underline{y}] \cap (I : x_i^\infty)$. Dann gilt $gx_i^N \in I$ für ein $N \geq 0$, und wegen $\varphi_i(gx_i^N) = g$ gilt $g \in \varphi_i(I)$.
Für "$\subseteq$" sei $g \in I$ mit $p := \varphi_i(g) \in k[\underline{y}]$. Dabei können wir o.B.d.A. g als $\underline{x}$-homogen annehmen, denn das Ideal ist $\underline{x}$-homogen (verwende Lemma 3.2.5 im Ring $\left(k[\underline{y}]\right)[\underline{x}]$ mit der Standard $\underline{x}$-Graduierung), und wir können die einzelnen $\underline{x}$-homogenen Summanden von q mit x_i multiplizieren, ohne $\varphi_i(g)$ zu verändern. Also haben wir

$$g = \sum_{|\alpha|=d} \underline{x}^\alpha p_\alpha(\underline{y}),$$

und aus $\varphi_i(g) \in k[\underline{y}|$ folgt dann direkt

$$g = x_i^d q(\underline{y}).$$

Damit gilt $p = q$ und also $x_i^d p \in I$. □

Definition 3.4.5. Für $\underline{x}$-homogene Polynome $p_1, \ldots, p_r \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ und $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_m) \subseteq k[\underline{x}, \underline{y}]$ heißt

$$\hat{I} := (I : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[\underline{y}]$$

das **projektive Eliminierungsideal von** I.

Wir erhalten den Hauptsatz der Eliminationstheorie auch im Fall $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$. Dafür sei

$$\underline{x} = (x_0, \ldots, x_m) \quad \underline{y} = (y_0, \ldots, y_n)$$

und die $p_i \in k[\underline{x}, \underline{y}]$ seien *bihomogen*, d.h. homogen sowohl bezüglich $\underline{x}$ als auch bezüglich $\underline{y}$. Dann ist

$$X = \{(a, b) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \mid p_1(a, b) = \cdots = p_r(a, b) = 0\}$$

wohldefiniert. Sei $\pi \colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ die Projektion.

Korollar 3.4.6. *Es ist $\pi(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $X' \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^{n+1}$ die Nullstellenmenge der p_i und

$$\pi' \colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^{n+1}$$

die Projektion. Nach Satz 3.4.1 ist dann $\pi'(X')$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^{n+1}$. Andererseits ist offensichtlich $\pi'(X') = \widehat{\pi(X)}$, und die Aussage folgt also aus Lemma 3.3.4 (i). □

Korollar 3.4.7. *Seien $p_1, \ldots, p_r \in k[x_0, \ldots, x_m]$ homogen und $f_0, \ldots, f_n \in k[x_0, \ldots, x_m]$ homogen vom selben Grad. Sei*

$$V = \mathcal{V}_+(p_1, \ldots, p_r) \subseteq \mathbb{P}^m$$

und weiter gelte

$$V \cap \mathcal{V}_+(f_0, \ldots, f_n) = \emptyset.$$

Dann hat die (wohldefinierte!) Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon V &\to \mathbb{P}^n \\ a &\mapsto (f_0(a) : \ldots : f_n(a)) \end{aligned}$$

ein abgeschlossenes Bild in $\mathbb{P}^n$.

Beweis. Der Graph

$$\Gamma_f := \{(a,b) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \mid a \in V, b = f(a)\}$$

ist bihomogen definierbar durch die Gleichungen $p_i(a) = 0$ für $i = 1, \ldots r$ und

$$b_j f_k(a) - b_k f_j(a) = 0$$

für $j, k = 0, \ldots, n$. Nach Korollar 3.4.6 ist aber

$$f(V) = \pi(\Gamma_f)$$

abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. □

Im letzten Satz sehen wir, wie man den Hauptsatz der Eliminationstheorie anwenden kann, wo man im Fall von Hausdorffräumen die Quasikompaktheit benutzt hätte. Die Menge V ist nämlich quasikompakt in der Zariskitopologie, und die Abbildung f ist stetig. Damit ist das Bild wieder quasikompakt, und in einem Hausdorffraum folgt daraus die Abgeschlossenheit.

Kapitel 4

Quasiprojektive Varietäten

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Begriffe von Varietäten und Morphismen noch weiter, um flexibler arbeiten zu können. Insbesondere erhalten wir einen Morphismusbegriff für projektive Varietäten.

4.1 Quasiprojektive Varietäten, reguläre Funktionen, Morphismen

Definition 4.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt **lokal abgeschlossen in** X, falls sie folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

(i) Y ist relativ offen in $\overline{Y}$

(ii) es gibt $O \subseteq X$ offen und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $Y = O \cap A$. △

Bemerkung 4.1.2. (i) Offene und abgeschlossene Teilmengen von X sind lokal abgeschlossen. Endliche Durchschnitte von lokal abgeschlossenen Teilmengen von X sind lokal abgeschlossen in X.
(ii) Für lokal abgeschlossenes $Y \subseteq X$ und $Z \subseteq Y$ gilt

$$Z \text{ lokal abgeschlossen in } Y \Leftrightarrow Z \text{ lokal abgeschlossen in } X.$$

(iii) Stetige Urbilder lokal abgeschlossener Mengen sind stets lokal abgeschlossen. △

Definition 4.1.3. Eine **quasiprojektive k-Varietät** V ist eine in der k-Zariski-topologie lokal abgeschlossene Menge eines $\mathbb{A}^n$ oder $\mathbb{P}^n$. Ist $W \subseteq V$ eine lokal abgeschlossene (abgeschlossene, offene) Teilmenge, so heißt W eine lokal abgeschlossene (abgeschlossene, offene) **Untervarietät** von V. △

Bemerkung 4.1.4. Abgeschlossene Mengen sind durch polynomiale Gleichungen definiert, offene Mengen durch Komplemente. Eine quasiprojektive Varietät kann also als Lösungsmenge eines Systems aus Gleichungen und Ungleichungen (und Vereinigungen von solchen) aufgefasst werden. △

Definition 4.1.5. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ (bzw. $V \subseteq \mathbb{P}^n$) eine lokal abgeschlossene Teilmenge.
(i) Eine **(k-)reguläre Funktion auf** V ist eine Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{A}^1$$

mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $a \in V$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von a und Polynome $p, q \in k[x_1, \dots, x_n]$ (bzw. homogene Polynome $p, q \in k[x_0, \dots, x_n]$ vom selben Grad) mit $q \neq 0$ auf U, sowie

$$f(b) = \frac{p(b)}{q(b)}$$

für alle $b \in U$.
(ii) Mit $\mathcal{O}(V)$ bezeichen wir die Menge aller k-regulären Funktionen auf der quasiprojektiven Varietät V. △

Lemma 4.1.6. *Sei V eine quasiprojektive Varietät.*
(i) Mit punktweise definierten Verknüpfungen von Funktionen ist $\mathcal{O}(V)$ eine k-Algebra.
(ii) Für jedes $f \in \mathcal{O}(V)$ ist

$$\mathcal{V}_V(f) := \{a \in V \mid f(a) = 0\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von V. Also ist

$$\mathcal{D}_V(f) := V \setminus \mathcal{V}_V(f)$$

in V offen.
(iii) Ist $f \in \mathcal{O}(V)$ mit $f(a) \neq 0$ für alle $a \in V$, so ist $\frac{1}{f}$ eine reguläre Funktion.
(iv) Ist $W \subseteq V$ lokal abgeschlossen und $f \in \mathcal{O}(V)$, so ist $f_{|W} \in \mathcal{O}(W)$. Die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(W)$ ist ein Algebrahomomorphismus.

Beweis. (i) und (iv) sind klar. Für (ii) genügt es zu zeigen, dass zu jedem $a \in V$ eine offene Umgebung $U \subseteq V$ existiert, mit $U \cap \mathcal{V}_V(f)$ abgeschlossen in U. Wenn aber $f = \frac{p}{q}$ auf einer offenen Umgebung U von a gilt, dann ist $\mathcal{V}_V(f) \cap U = \mathcal{V}(p) \cap U$ abgeschlossen in U. Aussage (iii) ist auch klar, da $f^{-1} = \frac{q}{p}$ auf U, falls $f = \frac{p}{q}$ auf U. □

Bemerkung 4.1.7. (i) Für jede quasiprojektive Varietät V und jede lokal abgeschlossene Teilmenge $W \subseteq V$ haben wir den Ring $\mathcal{O}(W)$ definiert, denn W ist selbst lokal abgeschlossen in $\mathbb{A}^n$ oder $\mathbb{P}^n$. Für $W' \subseteq W$ haben wir die Einschränkung als Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(W')$.
(ii) Die Eigenschaft einer Funktion $f\colon V \to \mathbb{A}^1$ regulär zu sein ist *lokal* bezüglich V. Das heißt, ist $V = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, so gilt

$$f \text{ regulär} \Leftrightarrow f\mid_{U_i} \text{ regulär für alle } i \in I.$$

(iii) Ab jetzt sagen wir oft nur **Varietät** anstatt *quasiprojektive k-Varietät*. △

Wir zeigen nun als nächstes, dass der neue Begriff einer regulären Funktion im Falle von affinen Varietäten mit dem alten aus Definition 1.4.1 überstimmt.

Satz 4.1.8. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen und $s \in k[V]$. Dann ist der natürliche Homomorphismus*

$$k[V]_s \to \mathcal{O}\left(\mathcal{D}_V(s)\right)$$

bijektiv.

Beweis. Injektivität: Für $\frac{p}{s^m} \in k[V]_s$ gelte $\frac{p}{s^m} = 0$ in $\mathcal{O}\left(\mathcal{D}_V(s)\right)$. Dann gilt $p\mid_{\mathcal{D}_V(s)} \equiv 0$, also $ps \equiv 0$ auf V, also $ps = 0$ in $k[V]$. Das impliziert $\frac{p}{s^m} = 0$ in $k[V]_s$.
Für die Surjektivität sei $f \in \mathcal{O}\left(\mathcal{D}_V(s)\right)$. Aufgrund der Quasikompaktheit von $\mathcal{D}_V(s)$ existiert eine endliche offene Überdeckung

$$\mathcal{D}_V(s) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$$

und Elemente $p_i, q_i \in k[V]$ mit

$$f = \frac{p_i}{q_i} \text{ auf } U_i.$$

Dabei können wir o.B.d.A. $U_i = \mathcal{D}_V(s_i)$ für gewisse $s_i \in k[V]$ annehmen. Aus $U_i \subseteq \mathcal{D}_V(q_i)$ folgt

$$U_i = \mathcal{D}_V(q_i^2 s_i)$$

und wegen
$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i q_i s_i}{q_i^2 s_i} \text{ auf } U_i$$
können wir schließlich
$$U_i = \mathcal{D}_V(q_i)$$
sowie
$$p_i \equiv 0 \text{ auf } \mathcal{V}_V(q_i)$$
annehmen. Dann gilt
$$p_i q_j = p_j q_i$$
als Elemente von $k[V]$ für alle $i, j = 1, \ldots, r$. Denn auf $\mathcal{V}_V(q_i q_j)$ verschwinden beide Seiten, und auf $\mathcal{D}_V(q_i q_j) = U_i \cap U_j$ kann man punktweise durch $q_i q_j$ dividieren und erhält
$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_j}{q_j},$$
denn beide Seiten stellen f auf $U_i \cap U_j$ dar. Wegen $\mathcal{D}_V(s) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ gilt
$$\mathcal{V}_V(s) = \mathcal{V}_V(q_1. \ldots, q_r),$$
und der Hilbertsche Nullstellensatz liefert
$$s \in \sqrt{(q_1, \ldots, q_r)} \subseteq k[V].$$
Sei also
$$s^m = b_1 q_1 + \cdots + b_r q_r$$
mit $m \geq 1$ und $b_1, \ldots, b_r \in k[V]$. Dann setzen wir
$$p := p_1 b_1 + \cdots + p_r b_r$$
und behaupten, dass
$$f = \frac{p}{s^m}$$
auf ganz $\mathcal{D}_V(s)$ gilt. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ gilt nämlich
$$q_i p = \sum_{j=1}^{r} q_i p_j b_j = \sum_{j=1}^{r} q_j p_i b_j = p_i \sum_{j=1}^{r} q_j b_j = p_i s^m,$$
und das bedeutet
$$\frac{p}{s^m} = \frac{p_i}{q_i} = f \text{ auf } U_i = \mathcal{D}_V(q_i). \qquad \square$$

Korollar 4.1.9. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Dann gilt $\mathcal{O}(V) = k[V]$, d.h. jede reguläre Funktion auf V ist global durch ein Polynom gegeben.*

Die regulären Funktionen auf einer projektiven Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n$ bestimmen wir in Satz 4.3.16 weiter unten genauer . Zunächst beschäftigen wir uns mit Morphismen zwischen Varietäten. Auch hier müssen wir uns später davon überzeugen, dass die folgende neue Definition im Fall von affinen Varietäten mit der alten übereinstimmt.

Definition 4.1.10. (i) Seien V, W quasiprojektive k-Varietäten. Ein k**-Mor-phismus** von V nach W ist eine stetige Abbildung

$$\phi\colon V \to W$$

so dass für jede *offene* Teilmenge $W' \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}(W')$ gilt

$$g \circ \phi\,|_{\phi^{-1}(W')} \in \mathcal{O}(\phi^{-1}(W')).$$

(ii) Ein Morphismus $\phi\colon V \to W$ heißt **Isomorphismus**, falls ein Morphismus $\psi\colon W \to V$ existiert mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$. △

Bemerkung 4.1.11. (i) Man nennt

$$\phi^*(g) := g \circ \phi\,|_{\phi^{-1}(W')}$$

das **Pullback** oder die **Zurückziehung** von g mittels ϕ. Eine stetige Abbildung ϕ ist also genau dann ein Morphismus, wenn das Pullback von jeder lokal auf W definierten regulären Funktion eine reguläre Funktion auf dem entsprechenden Urbild ist.
(ii) Für offenes $W' \subseteq W$ ist die induzierte Abbildung

$$\phi^*\colon \mathcal{O}(W') \to \mathcal{O}(\phi^{-1}(W'))$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Ist ϕ ein Isomorphismus, so ist ϕ^* ebenfalls ein Isomorphismus.
(iii) Sind $\phi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to X$ Morphismen, so ist

$$\psi \circ \phi\colon V \to X$$

ebenfalls ein Morphismus. Es gilt für $X' \subseteq X$ offen

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*\colon \mathcal{O}(X') \to \mathcal{O}(\psi^{-1}(X')) \to \mathcal{O}((\psi \circ \phi)^{-1}(X')).$$

(iv) Die Eigenschaft ein Morphismus zu sein ist *lokal* bezüglich der Ausgangsvarietät. Das heißt, ist $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung und ist $\phi\colon V \to W$ eine Abbildung, so ist ϕ genau dann ein Morphismus, wenn

$$\phi\mid_{V_i}\colon V_i \to W$$

ein Morphismus ist für alle $i \in I$. Das folgt unmittelbar aus Bemerkung 4.1.7 (ii), und der Tatsache, dass Stetigkeit eine lokale Bedingung ist.
(v) Die Eigenschaft ein Morphismus zu sein ist ebenfalls lokal bezüglich der Bildvarietät. Das heißt, ist $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ eine offene Überdeckung und $\phi\colon V \to W$ eine *stetige* Abbildung, so ist ϕ genau dann ein Morphismus, wenn

$$\phi\mid_{\phi^{-1}(W_i)}\colon \phi^{-1}(W_i) \to W_i$$

ein Morphismus ist, für alle $i \in I$. △

Das folgende Lemma zeigt, dass man Morphismen auf kleinere Definitionsbereiche und auf ihr Bild einschränken kann.

Lemma 4.1.12. *Sei V eine k-Varietät und $V' \subseteq V$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge.*
(i) Die Inklusion $V' \hookrightarrow V$ ist ein Morphismus.
(ii) Ist $\phi\colon W \to V$ ein Morphismus mit $\phi(W) \subseteq V'$, so ist die dadurch definierte Abbildung $\phi'\colon W \to V'$ ebenfalls ein Morphismus.

Beweis. (i) ist klar, denn die Einschränkung einer regulären Funktion auf eine lokal abgeschlossene Teilmenge bleibt regulär. Für (ii) sei $U \subseteq V'$ offen in V' und $g \in \mathcal{O}(U)$. Beachte dass U nicht notwendigerweise offen in V ist. Es ist aber o.B.d.A $g = \frac{p}{q}$ auf ganz U für geeignete Polynome p, q (notfalls verkleinert man U). Dann ist aber $\frac{p}{q}$ regulär auf der offenen Teilmenge $\mathcal{D}_V(q)$ von V, und damit ist $f := \phi^* \left(\frac{p}{q}\right)$ regulär auf $\phi^{-1}(\mathcal{D}_V(q))$. Dann ist aber auch $f\mid_{\phi^{-1}(U)}$ regulär, und stimmt mit $\phi'^*(g)$ überein. □

Satz 4.1.13. *Seien V, W Varietäten, wobei $W \subseteq \mathbb{A}^m$ abgeschlossen sei. Sei*

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)\colon V \to W$$

eine Abbildung. Dann ist ϕ genau dann ein Morphismus, wenn

$$\phi_i \in \mathcal{O}(V) \textit{ für } i = 1, \ldots, m$$

gilt. Insbesondere sind Morphismen $V \to \mathbb{A}^1$ gerade reguläre Funktionen auf V.

Beweis. Seien zunächst $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathcal{O}(V)$. Für jedes $p \in k[W]$ ist dann $\phi^*(p) = p(\phi_1, \ldots, \phi_m) \in \mathcal{O}(V)$, denn $\mathcal{O}(V)$ ist eine k-Algebra. Ist weiter $q \in k[W]$, so ist

$$\phi^{-1}(\mathcal{D}_W(q)) = \mathcal{D}_V\left(\phi^*(q)\right)$$

offen in V (nach Lemma 4.1.6 (ii)), und das Pullback der regulären Funktion

$$\frac{p}{q} \in \mathcal{O}\left(\mathcal{D}_W(q)\right)$$

ist

$$\phi^*\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\phi^*(p)}{\phi^*(q)}$$

und damit regulär auf $\phi^{-1}(\mathcal{D}_W(q))$, nach Lemma 4.1.6 ($iii$). Damit ist ϕ bereits ein Morphismus, denn lokal ist jede reguläre Funktion von solcher Gestalt $\frac{p}{q}$. Ist umgekehrt ϕ ein Morphismus, so ist

$$\phi_i = \phi^*(x_i) \in \mathcal{O}(V),$$

denn $x_i \in \mathcal{O}(W)$. □

Korollar 4.1.14. *Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}^m$ abgeschlossen. Dann ist eine Abbildung*

$$\phi\colon V \to W$$

genau dann ein Morphismus (im Sinne der neuen Definition 4.1.10), wenn es reguläre Funktionen $p_1, \ldots, p_m \in k[V]$ gibt mit

$$\phi = (p_1, \ldots, p_m).$$

Die neue Definition stimmt also für affine Varietäten mit der alten aus Definition 1.4.7 überein.

Beweis. Nach Satz 4.1.13 ist ϕ genau dann ein Morphismus wenn $\phi_i \in \mathcal{O}(V)$ gilt, für alle i. Andererseits ist $\mathcal{O}(V) = k[V]$, nach Korollar 4.1.9. □

Bemerkung 4.1.15. Ein Morphismus kann ein Homöomorphismus der topologischen Räume sein, ohne ein Isomorphismus zu sein. Das zeigt Beispiel 1.4.12 (iii). △

Satz 4.1.16. *Für $i = 0, \dots, n$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi_i \colon \mathcal{D}_+(x_i) &\to \mathbb{A}^n \\ (a_0 : \dots : a_n) &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\widehat{a_i}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Varietäten.

Beweis. Wir wissen schon, dass ϕ_i ein Homöomorphismus ist (Satz 3.3.12). Weiter ist ϕ_i nach Satz 4.1.13 auch ein Morphismus von Varietäten, denn die Komponentenfunktionen x_j/x_i sind reguläre Funktionen auf $\mathcal{D}_+(x_i)$. Für die Umkehrfunktion sei o.B.d.A $i = 0$, und $p, q \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome vom selben Grad. Wenn $\tilde{p} = p(1, x_1, \dots, x_n)$, und $\tilde{q} = q(1, x_1, \dots, x_n)$ die Dehomogenisierungen sind, gilt

$$\phi_0 \left(\mathcal{D}_+(x_0) \cap \mathcal{D}_+(q) \right) = \mathcal{D}(\tilde{q})$$

und

$$\left(\phi_0^{-1} \right)^* \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$$

ist eine reguläre Funktion auf $\mathcal{D}(\tilde{q})$. Wiederum ist jede reguläre Funktion lokal von der Gestalt $\frac{p}{q}$, und damit ist auch ϕ_0^{-1} ein Morphismus von Varietäten. $\square$

Satz 4.1.17. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen und $s \in k[V]$. Dann ist die offene Untervarietät $\mathcal{D}_V(s)$ von V isomorph zur abgeschlossenen Menge*

$$V' := \left\{ (a, t) \mid a \in V, t \in \mathbb{A}^1, t \cdot s(a) - 1 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Insbesondere gilt $k[V'] \cong \mathcal{O}(\mathcal{D}_V(s)) = k[V]_s$.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \colon V' &\to V \\ (a, t) &\mapsto a \end{aligned}$$

ist ein Morphismus mit $\operatorname{im}(\phi) = \mathcal{D}_V(s)$. Damit ist $\phi \colon V' \to \mathcal{D}_V(s)$ ebenfalls ein Morphismus. Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathcal{D}_V(s) &\to V' \\ a &\mapsto \left(a, \frac{1}{s(a)} \right) \end{aligned}$$

ist ebenfalls ein Morphismus, denn die Komponenten sind reguläre Funktionen auf $\mathcal{D}_V(s)$. $\square$

Wir erweitern nun den Begriff einer affinen bzw. projektiven Varietät.

Definition 4.1.18. Eine quasiprojektive k-Varietät V heißt **affin** (bzw. **projektiv**), falls V isomorph zu einer abgeschlossenen Untervarietät eines $\mathbb{A}^n$ (bzw. $\mathbb{P}^n$) ist. Ist V affin, so schreibt man oft $k[V]$ statt $\mathcal{O}(V)$. △

Bemerkung/Beispiel 4.1.19. (i) Ist V eine affine Varietät und $s \in k[V]$, so ist auch die offene Untervarietät $\mathcal{D}_V(s)$ affin und es gilt $k[\mathcal{D}_V(s)] = k[V]_s$. Denn ein Isomorphismus $\phi\colon V \to W$ auf eine abgeschlossene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{A}^n$ schränkt sich nach Lemma 4.1.12 zu einem Isomorphismus

$$\mathcal{D}_V(s) \to \mathcal{D}_W((\phi^{-1})^*(s))$$

ein. Dann wendet man Satz 4.1.17 für W an.
(ii) Die offene Untervarietät $\mathcal{D}_+(x_i) \subseteq \mathbb{P}^n$ ist affin nach Satz 4.1.16.
(iii) Jede offene Untervarietät von $\mathbb{A}^1$ ist affin. Da $k[x_1]$ ein Hauptidealring ist, ist jede offene Menge nämlich von der Gestalt $\mathcal{D}(s)$ für ein $s \in k[x_1]$.
(iv) Im Allgemeinen sind offene Untervarietäten von affinen Varietäten nicht affin. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

nicht affin (Aufgabe 25).
(v) Jede abgeschlossene Untervarietät einer affinen (bzw. projektiven) Varietät ist wieder affin (bzw. projektiv).
(vi) Jede quasiprojektive Varietät ist eine offene Untervarietät einer projektiven Varietät. Für $V \subseteq \mathbb{P}^n$ lokal abgeschlossen ist das klar, und $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen ist offen im projektiven Abschluss $\overline{V}$. △

Satz 4.1.20. *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $i \in \{0, \ldots, n\}$. Dann ist die offene Teilmenge*

$$V_i := V \cap \mathcal{D}_+(x_i)$$

von V affin, und der kanonische Homomorphismus

$$k_+[V]_{(\overline{x}_i)} \to k[V_i]$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Als abgeschlossene Teilmenge der affinen Varietät $\mathcal{D}_+(x_i)$ ist V_i affin. Elemente von $k_+[V]_{(\overline{x}_i)}$ sind von der Gestalt $\frac{p}{\overline{x}_i^r}$ mit $p \in k_+[V]$ homogen vom Grad r.

Sie definieren deshalb reguläre Funktionen auf V_i. Dieser so definierte kanonische Homomorphismus $\varphi\colon k_+[V]_{(\overline{x}_i)} \to k[V_i]$ ist injektiv, denn aus $\varphi\left(\frac{p}{\overline{x}_i^r}\right) = 0$ folgt $p \equiv 0$ auf V_i, und daraus $\overline{x}_i p \equiv 0$ auf V. Damit gilt $\overline{x}_i p = 0$ in $k_+[V]$ und also $\frac{p}{\overline{x}_i^r} = 0$ in $k_+[V]_{(\overline{x}_i)}$.
Für die Surjektivität beachte, dass der Koordinatenring einer affinen Varietät von den Koordinatenfunktionen erzeugt wird. Unter der Isomorphie $\mathcal{D}_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n$ entsprechen die Koordinatenfunktionen aber den x_j/x_i auf $\mathcal{D}_+(x_i)$, und die Koordinatenfunktionen von V_i sind also die $\overline{x}_j/\overline{x}_i$. Die liegen aber alle im Bild von φ. □

Korollar 4.1.21. *Jede Varietät V besitzt eine Basis offener Mengen aus affinen offenen Mengen.*

Beweis. Ist V affin, so folgt die Aussage aus Satz 4.1.17, denn die $\mathcal{D}_V(s)$ mit $s \in k[V]$ bilden eine Basis offener Mengen. Jede projektive Varietät wird überdeckt von offen-affinen Teilmengen, nach Satz 4.1.20, deshalb stimmt die Aussage auch für projektive Varietäten, und offene Teilmengen solcher. □

Beispiel 4.1.22. (i) Seien $p_0, \ldots, p_n \in k[x_0, \ldots, x_m]$ homogen vom selben Grad. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{P}^m \setminus \mathcal{V}_+(p_0, \ldots, p_n) &\to \mathbb{P}^n\\ a &\mapsto (p_0(a) : \ldots : p_n(a))\end{aligned}$$

ein Morphismus. Denn $\mathbb{P}^m \setminus \mathcal{V}_+(p_0, \ldots, p_n)$ ist Vereinigung der offenen Teilmengen $\mathcal{D}_+(p_i)$ und es genügt also zu zeigen, dass

$$\phi\colon \mathcal{D}_+(p_i) \to \mathbb{P}^n$$

ein Morphismus ist, für alle $i = 0, \ldots, n$. Es ist aber

$$\phi(\mathcal{D}_+(p_i)) \subseteq \mathcal{D}_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n,$$

und dabei wird ϕ zur Abbildung

$$a \mapsto \left(\frac{p_0(a)}{p_i(a)}, \ldots, \frac{\widehat{p_i(a)}}{p_i(a)}, \ldots, \frac{p_n(a)}{p_i(a)}\right).$$

Diese ist aber ein Morphismus nach Satz 4.1.13, denn $\frac{p_j}{p_i}$ ist regulär auf $\mathcal{D}_+(p_i)$.

(ii) Einen Spezialfall von (i) bilden die linearen Morphismen. Sei dazu M eine $(n+1) \times (m+1)$-Matrix über k mit $\operatorname{rang}(M) = m+1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_M \colon \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^n \\ [v] &\mapsto [Mv] \end{aligned}$$

ein Morphismus, und es gilt $\phi_{MN} = \phi_M \circ \phi_N$. Im Fall $m = n$ erhalten wir damit einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{GL}_{n+1}(k) \to \mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^n)$$

mit Kern $k^* I$. Daraus ergibt sich eine Einbettung

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^n),$$

von der man auch die Surjektivität zeigen kann.
(iii) Betrachte den Morphismus

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^2 \\ (a_0 : a_1) &\mapsto (a_0^2 : a_0 a_1 : a_1^2). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\phi(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathcal{V}_+(x_1^2 - x_0 x_2) =: C$$

und also ist $\phi \colon \mathbb{P}^1 \to C$ ebenfalls ein Morphismus, und sogar ein Isomorphismus. Dazu definieren wir den inversen Morphismus

$$\begin{aligned} \psi \colon C &\to \mathbb{P}^1 \\ (b_0 : b_1 : b_2) &\mapsto \begin{cases} (b_0 : b_1) \text{ falls } b_0 \neq 0 \\ (b_1 : b_2) \text{ falls } b_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist $C \subseteq \mathcal{D}_+(x_0) \cup \mathcal{D}_+(x_2)$ und auf den Schnitt innerhalb C stimmen beide Definitionen überein, denn $b_0 b_2 = b_1^2$. Damit ist ψ wohldefiniert auf C, und ein Morphismus, da es auf beiden Teilmengen $C \cap \mathcal{D}_+(x_0), C \cap \mathcal{D}_+(x_2)$ einer ist, nach (i). Man sieht nun leicht dass ψ invers zu ϕ ist. △

Bemerkung 4.1.23. Wir haben gerade

$$\mathbb{P}^1 \cong C = \mathcal{V}_+(x_1^2 - x_0 x_2) \subseteq \mathbb{P}^2$$

gezeigt. Wir vergleichen nun die projektiven Koordinatenringe beider Varietäten. Es ist

$$k_+[C] = k[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2 - x_0x_2)$$

und dabei gilt

$$\dim_k k_+[C]_1 = 3,$$

denn kein homogenes Polynom vom Grad 1 liegt in $(x_1^2 - x_0x_2)$. Daraus sieht man, dass sich $k_+[C]$ als k-Algebra *nicht* von 2 Elementen erzeugen lässt (die homogenen Summanden vom Grad 1 zweier Erzeuger würden sonst $k_+[C]_1$ über k aufspannen). Andererseits lässt sich $k_+[\mathbb{P}^1] = k[x_0, x_1]$ offensichtlich von zwei Elementen erzeugen. Damit ist also

$$\mathbb{P}^1 \cong C \text{ und } k_+[\mathbb{P}^1] \ncong k_+[C].$$

Der projektive Koordinatenring ist also nicht invariant unter Isomorphie! Damit unterscheidet er sich grundlegend vom affinen Koordinatenring, der Isomorphie ja sogar komplett klassifiziert. △

4.2 Die Veronese-Abbildung

In diesem Kapitel betrachten wir die Veronese-Abbildung, die zur Linearisierung von Gleichungen verwendet werden kann. Damit zeigen wir, dass man sich prinzipiell immer auf quadratische Gleichungen in projektiven Räumen beschränken kann.

Konstruktion 4.2.1. Sei $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ und sei $d \geq 1$ fixiert. Seien

$$m_0, m_1, \ldots, m_N \in k[\underline{x}]$$

alle Monome in $\underline{x}$ vom Grad d. Dabei ist $N = \binom{n+d}{n}$ (Aufgabe 15). Dann erhalten wir wie in Beispiel 4.1.22 (i) einen k-Morphismus:

$$\begin{aligned} v_d \colon \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^N \\ a &\mapsto (m_0(a) : \ldots : m_N(a)). \end{aligned}$$

Dabei heißt v_d die **d-te Veronese-Abbildung**, und ihr Bild

$$V_n^d := v_d(\mathbb{P}^n)$$

heißt **d-te Veronese-Varietät**. △

Satz 4.2.2. *Die d-te Veronese Varietät $V_n^d = v_d(\mathbb{P}^n)$ ist eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^N$, und*

$$v_d\colon \mathbb{P}^n \to V_n^d$$

ist ein Isomorphismus von k-Varietäten.

Beweis. Beachte, dass wir die Abgeschlossenheit von V_n^d bereits aus Korollar 3.4.7 wissen. Wir geben dennoch eine explizite Beschreibung durch homogene Gleichungen an, die wir für die Konstruktion der Umkehrabbildung benötigen. Sei dazu

$$J := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| = d\}\,.$$

Dann können wir $\mathbb{P}^N$ mit den homogenen Koordinaten $(z_\alpha : \alpha \in J)$ versehen, und es ist

$$v_d(a) = (a^\alpha)_{\alpha\in J}$$

für alle $a \in \mathbb{P}^n$. Sei nun $Z \subseteq \mathbb{P}^N$ die Nullstellenmenge aller quadratischen Polynome

$$z_\alpha z_\beta - z_\gamma z_\delta$$

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in J$ mit $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Dann gilt $V_n^d \subseteq Z$, denn

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\gamma+\delta} = a^\gamma a^\delta$$

für alle solchen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Damit ist

$$v_d\colon \mathbb{P}^n \to Z$$

ein Morphismus von Varietäten. Wir geben nun eine Umkehrabbildung an. Sei dazu $\beta \in J$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ mit $\beta_i \geq 1$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_{\beta,i}\colon Z \cap \mathcal{D}_+(z_\beta) &\to \mathbb{P}^n \\ (b_\alpha)_{\alpha\in J} &\mapsto (b_{\beta-e_i+e_0} : b_{\beta-e_i+e_1} : \ldots : b_{\beta-e_i+e_n})\,. \end{aligned}$$

Dann ist $\phi_{\beta,i}$ ein wohldefinierter Morphismus wie in Beispiel 4.1.22 (i) (das Bild von $\phi_{\beta,i}$ liegt in $\mathcal{D}_+(x_i)$). Seien nun $\beta, \gamma \in J$, $\beta_i \geq 1$, $\gamma_j \geq 1$ und $b \in Z \cap \mathcal{D}_+(z_\beta) \cap \mathcal{D}_+(z_\gamma)$. Dann gilt

$$\phi_{\beta,i}(b) = \phi_{\gamma,j}(b),$$

denn wie in Definition 3.1.2 erklärt reicht dafür

$$b_{\beta-e_i+e_k} b_{\gamma-e_j+e_l} = b_{\beta-e_i+e_l} b_{\gamma-e_j+e_k}$$

zu zeigen, für alle $k, l = 0, \ldots, n$. Das gilt aber aufgrund der Definition von Z, denn die beiden Indizes auf beiden Seiten bilden dieselbe Summe. Also liefern die $\phi_{\beta,i}$ einen wohldefinierten globalen Morphismus

$$\phi\colon Z \to \mathbb{P}^n.$$

Es gilt nun $\phi \circ v_d = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$: für $a \in \mathbb{P}^n$ wähle nämlich ein i mit $a_i \neq 0$ und setze $\beta := de_i$. Dann ist $a^\beta = a_i^d \neq 0$ und also $v_d(a) = (a^\alpha)_{\alpha\in J} \in \mathcal{D}_+(z_\beta)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\phi(v_d(a)) &= \phi_{\beta,i}(v_d(a)) \\ &= \left(a^{\beta-e_i+e_0} : \ldots : a^{\beta-e_i+e_n}\right) \\ &= \left(a_i^{d-1}a_0 : \ldots, a_i^{d-1}a_n\right) \\ &= a.\end{aligned}$$

Umgekehrt ist auch $v_d \circ \phi = \mathrm{id}_Z$: wähle dazu $\beta \in J$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\beta_i \geq 1$ und $b \in Z \cap \mathcal{D}_+(z_\beta)$. Dann gilt

$$v_d(\phi(b)) = \left(b_{\beta-e_i+e_0}^{\alpha_0} \cdots b_{\beta-e_i+e_n}^{\alpha_n}\right)_{\alpha\in J}$$

und das definiert in $\mathbb{P}^N$ den gleichen Punkt wie $b = (b_\alpha)_{\alpha\in J}$. Dafür genügt es wie üblich für alle $\gamma, \delta \in J$ die folgende Gleichheit zu zeigen:

$$b_\gamma \cdot b_{\beta-e_i+e_0}^{\delta_0} \cdots b_{\beta-e_i+e_n}^{\delta_n} = b_\delta \cdot b_{\beta-e_i+e_0}^{\gamma_0} \cdots b_{\beta-e_i+e_n}^{\gamma_n}.$$

Man beachte dazu, dass die Indizes auf beiden Seiten dieselbe Summe bilden:

$$\gamma + \delta_0 \cdot (\beta - e_i + e_0) + \cdots + \delta_n \cdot (\beta - e_i + e_n) = \gamma + d \cdot (\beta - e_i) + \delta = \cdots$$

Damit gilt die behauptete Gleichheit aber aufgrund der in Z geltenden Gleichungen (Aufgabe 33). $\square$

Bemerkung 4.2.3. (i) Wir haben explizit Gleichungen für die d-te Veronese-Varietät V_n^d gefunden. Versieht man $\mathbb{P}^N$ mit den homogenen Koordinaten $(z_\alpha)_{|\alpha|=d}$, sind es die

$$z_\alpha z_\beta - z_\gamma z_\delta$$

mit $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Insbesondere ist Z ein Durchschnitt von quadratisch definierten Hyperflächen, d.h. von **Quadriken**.
(ii) Für $n = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} v_d\colon \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^d \\ (a_0 : a_1) &\mapsto (a_0^d : a_0^{d-1}a_1 : \cdots : a_0 a_1^{d-1} : a_1^d)\end{aligned}$$

Das Bild V_1^d heißt **rationale Normalenkurve vom Grad** d. Im Fall $d = 2$ handelt es sich gerade um die Kurve aus Beispiel 4.1.22 (iii).
(iii) Für jede lokal abgeschlossene Teilvarietät V von $\mathbb{P}^n$ liefert v_d einen Isomorphismus von V auf $v_d(V) \subseteq \mathbb{P}^N$. △

Bemerkung 4.2.4. Sei $p \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogen vom Grad d, und schreibe $p = \sum_{|\alpha|=d} p_\alpha \underline{x}^\alpha$. Dann gilt für $a \in \mathbb{P}^n$

$$a \in \mathcal{V}_+(p) \;\Leftrightarrow\; v_d(a) \in \mathcal{V}_+\left(\sum_{|\alpha|=d} p_\alpha z_\alpha\right).$$

Unter dem Isomorphismus v_d entspricht die Grad d Hyperfläche $\mathcal{V}_+(p)$ also dem Schnitt von V_n^d mit einer Hyperebene. Eine etwas allgemeinere Aussage macht der folgende Satz. △

Satz 4.2.5. *Jede abgeschlossene k-Untervarietät von $\mathbb{P}^n$ ist via einem v_d isomorph zu einem Schnitt*

$$V_n^d \cap L$$

mit einem über k definierten linearen Teilraum L von $\mathbb{P}^N$.

Beweis. Für homogenes $p \in k[\underline{x}]$ und alle $r \geq 0$ gilt

$$\mathcal{V}_+(p) = \mathcal{V}_+(x_0^r p, \dots, x_n^r p).$$

Damit ist jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^n$ definierbar mit homogenen Polynomen vom selben Grad, und die Aussage folgt aus der letzten Bemerkung. □

Korollar 4.2.6. *Jede projektive k-Varietät ist isomorph zu einem Durchschnitt von quadratischen k-Hyperflächen ein einem geeigneten $\mathbb{P}^n$.*

Beweis. Der lineare Teilraum L im letzten Satz ist isomorph zu einem $\mathbb{P}^n$, und V_n^d ist durch quadratische Gleichungen definiert. □

Wir beweisen nun noch eine Verallgemeinerung von Satz 4.1.20 für beliebige Hyperflächen (und eine projektive Version von Satz 4.1.8).

Satz 4.2.7. *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $s \in k_+[V]$ homogen. Dann ist die offene Teilmenge $\mathcal{D}_{V,+}(s)$ von V affin mit*

$$k[\mathcal{D}_{V,+}(s)] = k_+[V]_{(s)}.$$

Beweis. Es reicht, die Aussage für $V = \mathbb{P}^n$ zu zeigen, denn für $t \in k[\underline{x}]$ homogen ist $\mathcal{D}_{V,+}\left(\bar{t}\right) = V \cap \mathcal{D}_+(t)$ eine abgeschlossene Untervarietät der affinen Varietät $\mathcal{D}_+(t) \subseteq \mathbb{P}^n$, und damit affin. Zusätzlich kommutieren Quotientenbildung und homogene Lokalisierung:

$$(R/I)_{\left(\bar{t}\right)} \cong R_{(t)}/\left(I\right).$$

Sei also $V = \mathbb{P}^n$ und $s \in k[\underline{x}]$ homogen vom Grad d. Betrachte die Veronese-Abbildung

$$v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

und sei $H_s \subseteq \mathbb{P}^N$ die zu $\mathcal{V}_+(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ korrespondierende Hyperebene. Dann gilt

$$\mathcal{D}_+(s) = v_d^{-1}(\mathbb{P}^N \setminus H_s) \cong V_n^d \cap \left(\mathbb{P}^N \setminus H_s\right).$$

Wegen $\mathbb{P}^N \setminus H_s \cong \mathbb{A}^N$ ist also $\mathcal{D}_+(s)$ eine affine Varietät. Der kanonische Homomorphismus

$$k[\underline{x}]_{(s)} \to \mathcal{O}\left(\mathcal{D}_+(s)\right)$$

ist injektiv, wie im Beweis von Satz 4.1.20. Auch die Surjektivität folgt ganz analog, da die erzeugenden Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{P}^N \setminus H_s \cong \mathbb{A}^N$ gerade die z_α/s sind, und unter dem Isomorphismus v_d entsprechen sie den $\underline{x}^\alpha/s \in k[\underline{x}]_{(s)}$. □

4.3 Direkte Produkte

Im Affinen gibt es eine kanonische Identifikation $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{m+n}$, und für zwei abgeschlossene Mengen $V \subseteq \mathbb{A}^m, W \subseteq \mathbb{A}^n$ ist $V \times W$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^{m+n}$. Wir können also problemlos direkte Produkte aus affinen Varietäten (im Sinne von Kapitel 1) bilden. Für projektive Varietäten ist das komplizierter. Es gibt zum Beispiel *keine* kanonische Identifikation von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ mit $\mathbb{P}^{m+n}$. Für Vektorräume V, W über demselben Körper gibt es jedoch eine wohldefinierte injektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) &\to \mathbb{P}(V \otimes W) \\ ([v], [w]) &\mapsto [v \otimes v] \end{aligned}$$

die sogenannte **Segre-Abbildung**. Wir beschreiben sie im Fall von $\mathbb{P}^m$ und $\mathbb{P}^n$ jetzt etwas konkreter.

Konstruktion 4.3.1. Für $m, n \geq 1$ idenfizieren wir $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ mit dem projektiven Raum

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)}(K)\right).$$

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)}(K)$ gilt

$$\mathrm{rang}(A) = 1 \ \Leftrightarrow\ A = uv^t$$

für gewisse Spaltenvektoren $0 \neq u \in K^{m+1}, 0 \neq v \in K^{n+1}$. Dabei sind u, v bis auf Skalierung eindeutig bestimmt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K^{m+1} \times K^{n+1} &\to \mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)} \\ (u, v) &\mapsto uv^t \end{aligned}$$

induzierte also eine wohldefinierte injektive Abbildung

$$\sigma\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)(K)}\right) = \mathbb{P}^{mn+m+n},$$

die sogenannte **Segre-Abbildung**. Das Bild

$$S_{m,n} := \{[A] \mid \mathrm{rang}(A) = 1\}$$

heißt **Segre-Varietät**. In der Tat ist $S_{m,n}$ eine k-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^{mn+m+n}$, denn sie ist durch das Verschwinden aller 2×2-Minoren von A definiert. △

Definition 4.3.2. Wenn wir ab sofort von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ als Varietät sprechen, meinen wir stets die projektive k-Varietät $S_{m,n}$. Auch wenn wir mit dem mengentheoretischen karthesischen Produkt $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ arbeiten, sind alle die Varietätsstruktur betreffen Aussagen mittels σ in $S_{m,n}$ gemeint. △

Satz 4.3.3. *(i) Die beiden Projektionen*

$$\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m, \quad \mathrm{pr}_2\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$$

sind Morphismen von Varietäten.
(ii) Sind $\phi\colon V \to \mathbb{P}^m$ und $\psi\colon V \to \mathbb{P}^n$ Morphismen von Varietäten, so ist

$$\begin{aligned} (\phi, \psi)\colon V &\to \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \\ a &\mapsto (\phi(a), \psi(a)) \end{aligned}$$

ebenfalls ein Morphismus.
(iii) Die projektive Varietät $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ zusammen mit den Morphismen pr_1 und pr_2 erfüllt die universelle Eigenschaft des direkten Produkts:

Für je zwei Morphismen $\phi\colon V \to \mathbb{P}^m, \psi\colon V \to \mathbb{P}^n$ gibt es genau einen Morphismus $\xi\colon V \to \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \xi = \phi, \mathrm{pr}_2 \circ \xi = \psi$.

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{P}^m \\ V \arrow[r, "\exists!\xi"] \arrow[urr, bend left, "\phi"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\ & & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Beweis. (i) Mittels σ nach $S_{m,n}$ übersetzt gilt für $[A] \in S_{m,n}$

$$\mathrm{pr}_1([A]) = [u]$$

für eine beliebige nichtverschwindende Spalte u von A. Das liefert eine lokale Definition von pr_1 als Morphismus im Sinne von Beispiel 4.1.22 (i), auf offenen Teilmengen von $S_{m,n}$ die durch das Nichtverschwinden der einzelnen Spalten definiert sind. Für pr_2 argumentiert man analog mit den Zeilen.
(ii) Wir wählen eine lokale Darstellung

$$\phi = (1 : \phi_1 : \ldots : \phi_m)\colon \phi^{-1}\left(\mathcal{D}_+(x_0)\right) \to \mathcal{D}_+(x_0) \subseteq \mathbb{P}^m$$

$$\psi = (1 : \psi_1 : \ldots : \psi_n)\colon \psi^{-1}\left(\mathcal{D}_+(y_0)\right) \to \mathcal{D}_+(y_0) \subseteq \mathbb{P}^n$$

mit regulären Funktionen ϕ_i, ψ_i. Dann übersetzt sich mittels der Identifikation

$$\mathcal{D}_+(x_0) \times \mathcal{D}_+(y_0) \xleftrightarrow{\sigma} \mathcal{D}_+(z_{00}) \subseteq \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{(m+1)\times(n+1)}(K)\right)$$

die Abbildung (ϕ, ψ) zu

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\left(\mathcal{D}_+(x_0)\right) \cap \psi^{-1}\left(\mathcal{D}_+(y_0)\right) &\to \mathcal{D}_+(z_{00}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & \psi_1(a) & \cdots & \psi_n(a) \\ \phi_1(a) & \phi_1(a)\psi_1(a) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_m(a) & & & \phi_m(a)\psi_n(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil $\mathcal{D}_+(z_{00})$ affin ist und alle Komponenten reguläre Funktionen sind, ist (ϕ, ψ) ein Morphismus. (iii) ist damit klar, denn ξ ist offensichtlich eindeutig durch ϕ und ψ bestimmt. $\square$

Bemerkung 4.3.4. (i) Sind $V \subseteq \mathbb{P}^m$ und $W \subseteq \mathbb{P}^n$ zwei beliebige lokal abgeschlossene Teilmengen, so ist

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(V) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(W) \subseteq S_{m,n}$$

ebenfalls lokal abgeschlossen, als Urbild unter Morphismen. Das entspricht mittels σ im karthesischen Produkt $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ genau dem Produkt $V \times W$. Auf diese Weise können wir also das Produkt zweier beliebiger k-Varietäten als k-Varietät auffassen, und $V \times W$ hat die universelle Eigenschaft des direkten Produkts. Das folgt unmittelbar aus Satz 4.3.3 und Lemma 4.1.12. Das Tripel

$$(V \times W, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$$

ist durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.
(ii) Für abgeschlossene Teilmengen $V \subseteq \mathbb{A}^m, W \subseteq \mathbb{A}^n$ haben wir im ersten Kapitel bereits das Produkt $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ explizit konstruiert. Offensichtlich erfüllt es die universelle Eigenschaft, und stimmt deshalb mit der neuen Konstruktion überein. Insbesondere ist das direkte Produkt von zwei affinen Varietäten wieder affin.
(iii) Nach Konstruktion ist das direkte Produkt von zwei projektiven Varietäten wieder projektiv.
(iv) In Abschnitt 3.4 haben wir $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ nur als Menge betrachtet, und mit bihomogenen Polynomen Teilmengen X definiert. Wir sehen wir jetzt, dass diese Mengen X gerade die abgeschlossenen Teilmengen im Sinne unserer Varietätsstruktur sind. Homogene Polynome auf $S_{m,n}$ entsprechen mittels σ nämlich bihomogenen Polynomen auf $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, homogen vom selben Grad in beiden Variablentupeln $\underline{x}$ und $\underline{y}$. Mit demselben Argument wie im Beweis von Satz 4.2.5 ist das aber keine Einschränkung. $\triangle$

Beispiel 4.3.5. Es ist $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Varietät der singulären 2×2-Matrizen in $\mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(K)\right)$, ist also eine Quadrik im $\mathbb{P}^3$:

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathcal{V}_+\left(\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{V}_+(x_0x_3 - x_1x_2) \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ gibt es zwei Scharen von Geraden:

$$\{a\} \times \mathbb{P}^1 \text{ sowie } \mathbb{P}^1 \times \{a\},$$

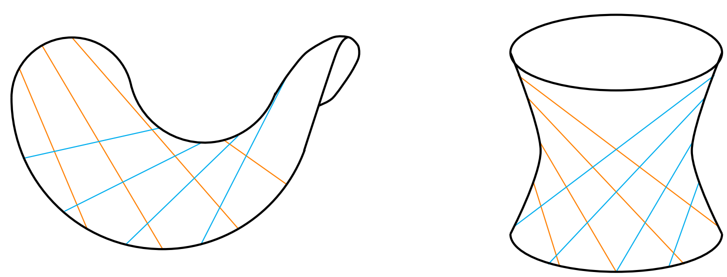
für $a \in \mathbb{P}^1$. Ist etwa $a = (a_0 : a_1)$, so gilt

$$\{a\} \times \mathbb{P}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mid \operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_1 \\ a_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 1 \right\},$$

und wird also durch die beiden linearen Gleichungen

$$a_0 x_2 - a_1 x_0 \text{ und } a_0 x_3 - a_1 x_1$$

innerhalb $S_{1,1}$ definiert. Analog für $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$. Zwei Geraden aus derselben Schar schneiden sich nicht, je zwei Geraden aus unterschiedlichen Scharen schneiden sich in genau einem Punkt. Das Bild zeigt zwei affine Schnitte von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, links mit $\mathcal{D}_+(x_0)$ und rechts mit $\mathcal{D}_+(x_0 + x_3)$:



Man kann zeigen, dass sich in $\mathbb{P}^2$ je zwei unendliche abgeschlossene Teilmengen schneiden (vergleiche Korollare 4.3.18 und 4.3.19) . Insbesondere gilt $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \not\cong \mathbb{P}^2$. △

Satz 4.3.6. *Seien V, W k-Varietäten mit V projektiv. Dann ist für jede abgeschlossene Menge $X \subseteq V \times W$ das Bild $\operatorname{pr}_2(X)$ abgeschlossen in W.*

Beweis. Für $\tilde{X} \subseteq S_{m,n}$ abgeschlossen ist $\tilde{X} \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ bihomogen definierbar, und $\tilde{X} \cap (\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n)$ ist $\underline{x}$-homogen definierbar. Damit folgt die Aussage für W affin aus Satz 3.4.1, denn $\tilde{X} \cap (V \times W) \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n$ ist dann ebenfalls so definierbar. Für allgemeine W wähle eine offene Überdeckung $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ aus affinen Mengen W_i und betrachte dann $X_i := X \cap (V \times W_i)$ in $V \times W_i$. Dann ist $\operatorname{pr}_2(X_i) = \operatorname{pr}_2(X) \cap W_i$ abgeschlossen in W_i. Daraus folgt die Aussage. □

Das folgende Lemma beweist die sogenannte **Separiertheit** von quasiprojektiven k-Varietäten. Oft kann man Argumente, die die Hausdorffeigenschaft eines topologischen Raumes benutzen, stattdessen auch mit der Separiertheit durchführen. Beachte dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\{(x, x) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ (bezüglich der Produkttopologie) ist.

Lemma 4.3.7 (Separiertheit)**.** *Für jede k-Varietät V ist die Diagonale*

$$\Delta_V := \{(a,a) \mid a \in V\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $V \times V$.

Beweis. Sei $\iota\colon V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ eine lokal abgeschlossene Einbettung. Die Morphismen

$$V \times V \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}^n$$
$$V \times V \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} V \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}^n$$

induzieren aufgrund der universellen Eigenschaft einen Morphismus

$$\iota \times \iota\colon V \times V \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n,$$

und Δ_V ist dabei das Urbild von $\Delta_{\mathbb{P}^n}$. Also genügt es, die Aussage für $V = \mathbb{P}^n$ zu zeigen. Unter der Identifikation

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \xleftrightarrow{\sigma} S_{n,n}$$

entspricht die Diagonale aber gerade den symmetrischen Matrizen in $S_{n,n}$. Also wird $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ durch die Gleichungen

$$z_{ij} - z_{ji} \quad \text{für } i,j = 0,\dots,n$$

in $S_{n,n}$ beschrieben, und ist damit abgeschlossen. □

Bemerkung 4.3.8. Alternativ könnte man $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ auch durch die bihomogenen Gleichungen

$$x_i y_j - x_j y_i = 0$$

für $i,j = 0,\dots,n$ beschreiben. △

Die folgende Aussage wäre für stetige Abbildungen zwischen Hausdorffräumen offensichtlich. Wir beweisen sie nun mittels der Separiertheit.

Lemma 4.3.9 (Identitätssatz)**.** *Seien V, W Varietäten und $\phi, \psi\colon V \to W$ Morphismen mit $\phi \equiv \psi$ auf einer zariskidichten Teilmenge $U \subseteq V$. Dann gilt $\phi = \psi$.*

Beweis. Die Menge

$$V' := \{a \in V \mid \phi(a) = \psi(a)\}$$

ist dicht in V, und ausserdem das Urbild von Δ_W unter dem Morphismus

$$(f,g)\colon V \to W \times W.$$

Damit ist V' abgeschlossen, und also $V' = V$. □

Satz 4.3.10. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten. Dann ist der Graph*

$$\Gamma_\phi := \{(a, \phi(a)) \mid a \in V\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $V \times W$. Der Graphmorphismus

$$\begin{aligned} \gamma_\phi\colon V &\to \Gamma_\phi \\ a &\mapsto (a, \phi(a)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Γ_ϕ ist das Urbild von Δ_W unter dem Morphismus

$$\begin{aligned} \phi \times \mathrm{id}_W\colon V \times W &\to W \times W \\ (a, b) &\mapsto (\phi(a), b). \end{aligned}$$

Damit ist Γ_ϕ abgeschlossen. Nach der universellen Eigenschaft des Produkts ist γ_ϕ ein Morphismus, und die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &\to V \\ (a, \phi(a)) &\mapsto a \end{aligned}$$

ist als Einschränkung der Projektion ebenfalls ein Morphismus. □

Korollar 4.3.11. *Für jede Varietät V gilt $V \cong \Delta_V$ vermöge $a \mapsto (a, a)$.*

Beweis. Satz 4.3.10 mit $\phi = \mathrm{id}_V\colon V \to V$. □

Korollar 4.3.12. *Sei V eine Varietät und $U_1, \ldots, U_r$ seien offen-affine Teilmengen von V. Dann ist auch $U_1 \cap \cdots \cap U_r$ affin.*

Beweis. Es reicht den Fall $r = 2$ zu betrachten. Dann gilt

$$U_1 \cap U_2 \cong \Delta_{U_1 \cap U_2}$$

und

$$\Delta_{U_1 \cap U_2} = (U_1 \times U_2) \cap \Delta_V.$$

Damit ist $\Delta_{U_1 \cap U_2}$ als abgeschlossene Teilmenge der affinen Varietät $U_1 \times U_2$ selbst affin. □

Satz 4.3.13. *Sei V projektiv und $\phi\colon V \to W$ ein Morphismus. Dann ist $\phi(V)$ abgeschlossen in W.*

Beweis. Es ist Γ_ϕ abgeschlossen in $V \times W$ nach Satz 4.3.10, und damit

$$\phi(V) = \mathrm{pr}_2(\Gamma_\phi)$$

abgeschlossen in W nach Satz 4.3.6. □

Definition 4.3.14. Sei V eine lokal abgeschlossene Teilmenge eines $\mathbb{A}^n$ (oder eines $\mathbb{P}^n$). Sei $k \subseteq L \subseteq K$ ein Zwischenkörper. Dann heißt

$$V(L) := V \cap L^n$$

bzw.

$$V(L) := V \cap \left\{[v] \in \mathbb{P}^n \mid v \in L^{n+1}\right\}$$

die Menge der L**-rationalen Punkte von** V. △

Bemerkung 4.3.15. (i) Sei V eine k-Varietät und $k \subseteq L \subseteq K$ ein Zwischenkörper. Für jedes $f \in \mathcal{O}(V)$ gilt dann

$$f\left(V(L)\right) \subseteq L$$

denn f ist lokal durch Brüche von Polynomen über k gegeben. Für jeden k-Morphismus $\phi\colon V \to W$ gilt damit

$$\phi\left(V(L)\right) \subseteq W(L)$$

denn ϕ ist lokal durch reguläre Funktionen gegeben. Insbesondere liefert jeder Isomorphimus eine Bijektion zwischen den L-rationalen Punkten.
(ii) Die Entscheidung ob eine Varietät L-rationale Punkte besitzt kann schwer sein. So ist beispielsweise die Tatsache dass die Varietäten

$$\mathcal{V}_+(z^n - x^n - y^n) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

für kein n einen $\mathbb{Q}$-rationalen Punkt besitzen gerade die Aussage des großen Satzes von Fermat. △

Satz 4.3.16. *Sei V eine irreduzible projektive k-Varietät. Dann ist $\mathcal{O}(V)$ eine endliche Körpererweiterung von k. Ist $V(k) \neq \emptyset$, so gilt $\mathcal{O}(V) = k$, d.h. jede reguläre Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $a \in V$ und $f \in \mathcal{O}(V)$ mit $f(a) = 0$. Betrachte f als Morphismus

$$f\colon V \to \mathbb{A}^1.$$

Nach Satz 4.3.13 hat f dann abgeschlossenes Bild, und also gilt $f(V) = \mathbb{A}^1$ oder $f(V)$ ist endlich. Es ist aber

$$f\colon V \to \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

ebenfalls ein Morphismus mit abgeschlossenem Bild, und also kann $f(V) = \mathbb{A}^1$ nicht sein. Also gilt

$$f(V) = \{0, r_1, \ldots, r_d\} = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^1$$

für ein $p \in k[t]$. Schreibe $p = t^s q$ mit $q(0) \neq 0$. Dann gilt $f(V) = \{0\} \mathbin{\dot\cup} \mathcal{V}(q)$. Nun ist aber $f(V)$ mit V ebenfalls irreduzibel, und daraus folgt $f(V) = \{0\}$. Wir haben also gezeigt, dass eine reguläre Funktion mit Nullstelle schon konstant Null ist. Damit ist $\mathcal{O}(V)$ ein Körper, nach Lemma 4.1.6 (iii).
Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt $V(\overline{k}) \neq \emptyset$, und damit gibt es eine endliche Körpererweiterung L/k und $a \in V(L)$. Der k-Algebrahomo-morphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(V) &\to L \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

ist injektiv, wie wir eben gezeigt haben. Also ist $\mathcal{O}(V)$ eine endliche Körpererweiterung von k. Gilt zusätzlich $V(k) \neq \emptyset$ zeigt dasselbe Argument $\mathcal{O}(V) = k$. □

Korollar 4.3.17. *Ist V gleichzeitig affin und projektiv, so gilt $|V| < \infty$.*

Beweis. V hat nur endlich viele irreduzible Komponenten, jede davon ist abgeschlossen und damit wieder affin und projektiv. Sei also o.B.d.A V ireduzibel. Dann gilt nach Satz 4.3.16

$$\dim_k k[V] = \dim_k \mathcal{O}(V) < \infty,$$

und damit ist V nach Satz 1.4.17 endlich. □

Korollar 4.3.18. *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche und sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ eine unendliche abgeschlossene Menge. Dann gilt $V \cap Z \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei $V = \mathcal{V}_+(p)$ für ein homogenes $p \in k[\underline{x}]$. Wäre $V \cap Z = \emptyset$, so wäre $Z \subseteq \mathcal{D}_+(p)$ eine abgeschlossene Menge einer affinen Varietät, und damit selbst affin. Daraus folgt $|Z| < \infty$, ein Widerspruch. □

Korollar 4.3.19. *Für $n \geq 2$ schneiden sich je zwei Hyperflächen in $\mathbb{P}^n$.*

Beweis. Mit Korollar 4.3.18 reicht es zu zeigen, dass Hyperflächen unendlich sind. Dabei reicht es affine Hyperflächen und den Fall $K = \overline{k}$ zu betrachten. Sei also $V = \mathcal{V}(p) \neq \emptyset$ eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n$. Wähle ein i mit $p \notin k[x_i]$. Dann ist $(p) \cap k[x_i] = \{0\}$, und nach Satz 1.4.13 ist

$$\mathrm{pr}_i(V) \subseteq \mathbb{A}^1 = \overline{k}$$

k-zariskidicht, und damit unendlich. □

4.4 Rationale Funktionen und Abbildungen

Wir verallgemeinern nun den Begriff eines Morphismus, um auch für projektive Varietäten solche Morphismen zu erhalten.

Definition 4.4.1. Seien V, W k-Varietäten.
(i) Eine **rationale Abbildung** $f\colon V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Morphismen

$$\phi\colon U \to W$$

auf offen-dichten Teilmengen U von V, unter folgender Äquivalenzrelation:

$$(\phi\colon U \to W) \sim (\psi\colon U' \to W)$$
$$:\Leftrightarrow$$
$$\exists U'' \subseteq U \cap U' \text{ offen-dicht in } V \text{ mit } \phi \equiv \psi \text{ auf } U''.$$

Wir schreiben dann auch $f = [\phi]$ für die von ϕ repräsentierte Klasse.
(ii) Die Menge aller rationalen Abbildungen von V nach W wird mit

$$\mathrm{Rat}_k(V, W)$$

bezeichnet.
(iii) Eine rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ heißt **rationale Funktion** auf V. △

Definition 4.4.2. Sei $f\colon V \dashrightarrow W$ eine rationale Abbildung. Dann heißt

$$\mathrm{dom}(f) := \bigcup \{U \mid U \subseteq V \text{ offen-dicht}, \exists \phi\colon U \to W \text{ mit } f = [\phi]\}$$

der **Definitionsbereich** von f. △

Satz 4.4.3. *Sei $f: V \dashrightarrow W$ eine rationale Abbildung. Dann gibt es einen Morphismus $f_0\colon \operatorname{dom}(f) \to W$, und jeder Repräsentant von f ist eine Einschränkung von f_0.*

Beweis. Seien $\phi\colon U \to W$ und $\psi\colon U' \to W$ zwei Vertreter von f. Nach dem Identitätssatz 4.3.9 folgt $\phi \equiv \psi$ auf $U \cap U'$. Damit kann man f_0 lokal durch seine Vetreter definieren. □

Bemerkung/Beispiel 4.4.4. (i) Für jede offen-dichte Teilmenge $U \subseteq V$ ist $\operatorname{Rat}_k(V, W) = \operatorname{Rat}_k(U, W)$.
(ii) Sei V eine irreduzible affine k-Varietät und $F = \operatorname{Quot}(k[V])$. Dann definierte jedes Element von F eine rationale Funktion auf V. Ist nämlich $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in k[V], b \neq 0$, so ist $\frac{a}{b}\colon \mathcal{D}_V(b) \to \mathbb{A}^1$ ein Morphismus. Da $\mathcal{D}_V(b)$ offen und nichtleer, und damit automatisch dicht in V ist, erhalten wir also die rationale Funktion $f = [\frac{a}{b}]$. Ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

eine andere Bruchdarstellung, so stimmen die Morphismen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf der offendichten Teilmenge $\mathcal{D}_V(bd) = \mathcal{D}_V(b) \cap \mathcal{D}_V(d)$ überein, und definieren also dieselbe rationale Funktion.
(iii) Im Allgemeinen kann $\operatorname{dom}(f)$ größer sein, als zunächst sichtbar. Betrachte etwa die projektive Kurve

$$C = \mathcal{V}_+(x_0^3 - x_0x_1^2 - x_1x_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2.$$

Die Vorschrift

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_0 : a_1)$$

definiert einen Morphismus

$$C \setminus \{(0 : 0 : 1)\} \to \mathbb{P}^1,$$

und also eine rationale Abbildung $f\colon C \to \mathbb{P}^1$. Andererseits gibt es den Morphismus

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_2^2 : a_0^2 - a_1^2),$$

der auf $C \setminus \{(1 : \pm 1 : 0)\}$ definiert ist. Auf allen Punkten von C, auf denen beiden Morphismen definiert sind, stimmen sie aber überein, wie man leicht sieht. Also ist f sogar auf ganz C definiert, i.e. sogar ein globaler Morphismus.
(iv) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^m$ abgeschlossen und irreduzibel. Jedes Tupel $p_0, \ldots, p_n \in k_+[V]$ aus homogenen Elementen $\neq 0$ des selben Grads definiert dann eine rationale Funktion

$$f = (p_0 : \ldots : p_n)\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

mit $\operatorname{dom}(f) \supseteq V \setminus \mathcal{V}_+(p_1, \ldots, p_n)$. △

Satz 4.4.5. *Sei V eine k-Varietät. Dann bilden die rationalen Funktionen auf V unter den punktweise definierten Operationen eine Algebra $k(V)$. Ist V irreduzibel, so ist $k(V)$ ein Körper, genannt der* **Funktionenkörper von** V.

Beweis. Für zwei rationale Funktionen $f_1, f_2 \colon V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ sind $f_1 \pm f_2, f_1 \cdot f_2$ reguläre Funktionen (und also Morphismen) auf $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$, und damit rationale Funktionen auf V. Ist V irreduzibel und $f \colon V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ nicht identisch Null, so ist $\{a \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq 0\}$ offen, nichtleer und damit dicht in V. Darauf ist aber $\frac{1}{f}$ als reguläre Funktion definiert, und also $k(V)$ ein Körper. $\square$

Ab jetzt werden wir uns zur Vereinfachung immer auf irreduzible Varietäten beschränken. Dann ist jede nichtleere offene Teilmenge automatisch dicht.

Satz 4.4.6. *Sei V eine irreduzible Varietät.*

(i) *Es gilt $k(V) = k(U)$ für jedes offene $U \neq \emptyset$ in V.*

(ii) *Es gilt $k(V) = \bigcup_U \mathcal{O}_V(U)$, wobei die Vereinigung über aller nichtleeren offenen Teilmengen von V läuft.*

(iii) *Die Körpererweiterung $k \subseteq k(V)$ ist endlich erzeugt.*

(iv) *Ist V affin, so gilt $k(V) = \mathrm{Quot}(k[V])$.*

Beweis. (i) ist klar nach Bemerkung 4.4.4 (i). (ii) ist ebenfalls klar, denn die Elemente von $\mathcal{O}_V(U)$ sind gerade die Morphismen von U nach $\mathbb{A}^1$. (iv) folgt aus

$$k(V) = \bigcup_{\emptyset \neq U \text{ offen}} \mathcal{O}(U) = \bigcup_{s \in k[V], s \neq 0} \mathcal{O}(\mathcal{D}_V(s)) = \bigcup_s k[V]_s = \mathrm{Quot}(k[V]),$$

wobei wir Satz 4.1.8 benutzt haben. Für (iii) können wir mit (i) V als affin annehmen, denn nach Korollar 4.1.21 hat V eine affine offene Teilmenge. Für affine Varietäten folgt die Aussage aber aus (iv), denn $k[V]$ ist als Algebra endlich erzeugt, und damit $\mathrm{Quot}(k[V])$ als Körper. $\square$

Bemerkung 4.4.7. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und irreduzibel. Dann ist $k_+[V]$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Sei T die Menge aller homogenen Elemente $\neq 0$, und betrachte den Körper

$$k_+[V]_{(T)} = (k_+[V]_T)_0 = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in k_+[V] \text{ homogen}, \deg(p) = \deg(q), q \neq 0 \right\}.$$

Dann gilt in Analogie zum affinen Fall $k(V) = k_+[V]_{(T)}$, diesmal mit Satz 4.2.7. $\triangle$

Beispiel 4.4.8. (i) $k(\mathbb{A}^n) = k(\mathbb{P}^n) = k(x_1, \ldots, x_n)$. Man nennt diesen Körper den **rationalen Funktionenkörper in** n **Variablen**.
(ii) Ist $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ irreduzibel, so gilt für $V = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^n$

$$k(V) = \operatorname{Quot}\left(k[x_1, \ldots, x_n]/p\right). \qquad \triangle$$

Bemerkung 4.4.9. Rationale Abbildungen kann man im Allgemeinen *nicht* komponieren. Betrachtet man zum Beispiel

$$f\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2, a \mapsto (a, 0)$$

und

$$g\colon \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{A}^1; (a, b) \mapsto a/b,$$

so gilt $\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{dom}(g) = \emptyset$, und also kann $g \circ f$ nicht definiert werden. $\triangle$

Definition 4.4.10. Seien V, W Varietäten, und V irreduzibel.
(i) Ein Morphismus $\phi\colon V \to W$ heißt **dominant**, wenn $\phi(V)$ dicht in W ist.
(ii) Eine rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$ heißt **dominant**, wenn ein (äquivalent jeder) repräsentierende Morphismus dominant ist.
(iii) Die Menge aller dominanten rationalen Abbildungen wird mit

$$\operatorname{Rat}_k^{\mathrm{dom}}(V, W)$$

bezeichnet. $\triangle$

Bemerkung 4.4.11. (i) Sind $\phi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to X$ dominante Morphismen, so ist auch $\psi \circ \phi$ dominant.
(ii) Ein Morphismus $\phi\colon V \to W$ affiner Varietäten ist genau dann dominant, wenn der assoziierte Ringhomomorphismus $\phi^*\colon k[W] \to k[V]$ injektiv ist. Das folgt direkt aus Satz 1.4.13. $\triangle$

Beachte nochmals, dass wir ab sofort die Irreduzibilität aller Varietäten voraussetzen.

Satz 4.4.12. *Seien $f\colon V \dashrightarrow W, g\colon W \dashrightarrow X$ rationale Abbildungen, und f sei dominant. Dann ist $g \circ f\colon V \dashrightarrow X$ eine wohldefinierte rationale Abbildung. Ist g ebenfalls dominant, so auch $g \circ f$.*

Beweis. Seien $\phi\colon V' \to W$ sowie $\psi\colon W' \to X$ Vetreter von f und g. Dann ist $\phi^{-1}(W') \neq \emptyset$, denn ϕ hat dichtes Bild. Damit ist $\phi^{-1}(W')$ dicht in V, und darauf ist der Morphismus $\psi \circ \phi$ definiert. So erhalten wir die rationale Abbildung $g \circ f\colon V \dashrightarrow X$, und die Definition hängt offensichtlich nicht von der Wahl der Vertreter ϕ und ψ ab. Der Rest der Aussage ist klar. $\square$

Definition 4.4.13. (i) Eine dominante rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$ heißt **birationale Äquivalenz** (oder einfach **birational**), falls es eine dominante rationale Abbildung $g\colon W \dashrightarrow V$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_W$.
(ii) Zwei Varietäten V, W heißen **(k-)birational äquivalent**, wenn es eine birationale Äquivalenz $f\colon V \dashrightarrow W$ gibt.
(iii) Eine Varietät V heißt **(k-)rational**, falls V birational äquivalent zu einem $\mathbb{P}^n$ ist. △

Beispiel 4.4.14. (i) Sei V irreduzibel und $\emptyset \neq U \subseteq V$ offen. Dann ist die Inklusion $U \hookrightarrow V$ eine birationale Äquivalenz. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n$ birational äquivalent zu $\mathbb{P}^n$, und jede irreduzible Varietät birational äquivalent zu einer affinen Varietät.
(ii) Für jede irreduzible projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ist der affine Kegel $\widehat{V} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ irreduzibel und birational äquivalent zu $V \times \mathbb{A}^1$. Es gibt nämlich die zueinander inversen rationalen Abbildungen

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{A}^1 &\dashrightarrow \widehat{V} \\ ((a_0 : \ldots : a_n), t) &\mapsto t \cdot \left(1, \frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) \end{aligned}$$

(o.B.d.A sei $V \cap \mathcal{D}_+(x_0) \neq \emptyset$), sowie

$$\begin{aligned} \widehat{V} &\dashrightarrow V \times \mathbb{A}^1 \\ (a_0, \ldots, a_n) &\mapsto ((a_0 : \ldots : a_n), a_0), \end{aligned}$$

definiert auf $\widehat{V} \setminus (0, \ldots, 0)$.
(iii) Ist $f\colon V \dashrightarrow W$ dominant und $V(k)$ zariskidicht, so ist auch $W(k)$ zariskidicht in W. Insbesondere ist für birational äquivalente Varietäten V, W genau dann $V(k)$ dicht in V, wenn $W(k)$ dicht in W ist. Insbesondere gilt für rationale Varietäten V, dass $V(k)$ stets dicht in V ist (zumindest im Fall dass k unendlich ist). △

Satz 1.4.8 und Satz 1.4.11 können wir nun ganz analog auch für rationalen Abbildungen beweisen. Für Körpererweiterungen $k \subseteq E, k \subseteq F$ bezeichnen wir wie üblich mit $\mathrm{Hom}_k(E, F)$ die Menge der k-Einbettungen von E nach F.

Satz 4.4.15. *Seien V, W irreduzible k-Varietäten.*
(i) Jede dominante rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$ induziert eine k-Einbettung $f^*\colon k(W) \hookrightarrow k(V)$ der Funktionenkörper. Diese Zuordnung ist funktoriell, d.h. $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ für dominantes $g\colon W \dashrightarrow X$.

(ii) Die Abbildung $^*\colon \mathrm{Rat}_k^{\mathrm{dom}}(V,W) \to \mathrm{Hom}_k(k(W),k(V))$ *ist bijektiv.*
(iii) Eine dominanten rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$ *ist genau dann eine birationale Äquivalenz, wenn* $f^*\colon k(W) \to k(V)$ *ein Isomorphismus der Körper ist.*

Beweis. (i) ist klar. Für (ii) können wir V, W als affin annehmen. Wir konstruieren die Umkehrabbildung zu *. Sei dazu $\varphi\colon k(W) \to k(V)$ eine k-Einbettung. Da $k[W]$ als k-Algebra endlich erzeugt ist, gibt es ein $0 \neq s \in k[V]$ mit

$$\varphi\mid_{k[W]}\colon k[W] \to k[V]_s = k[\mathcal{D}_V(s)].$$

Nach Satz 1.4.8 entspricht $\varphi\mid_{k[W]}$ einem Morphismus

$$f_0\colon D_V(s) \to W$$

der affinen Varietäten. Sei nun $f = [f_0]\colon V \dashrightarrow W$ die von f_0 repräsentierte rationale Abbildung. Diese hängt nicht von der Wahl von s ab, wie man durch Anwenden der Äquivalenz von Kategorien (Bemerkung 1.4.10) auf das folgende Diagramm sieht:

$$\begin{tikzcd}
& k[V]_s \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
k[W] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"] & & k[V]_{st} \\
& k[V]_t \arrow[ur, "\mathrm{id}"] &
\end{tikzcd}$$

Die Zuordnung $\varphi \mapsto f$ definiert die Umkehrabbildung zu *, wie man sich leicht überlegt (φ ist durch $\varphi\mid_{k[W]}$ bereits festgelegt, und $\varphi\mid_{k[W]}$ entspricht genau f_0).
(iii) Ist f eine birationale Äquivalenz, so folgt die Isomorphieeigenschaft von f^* direkt aus der Funktorialität aus (i). Ist umgekehrt $\varphi\colon k(V) \to k(W)$ eine Umkehreinbettung zu f^*, und ist $\varphi = g^*$ für ein $g \in \mathrm{Rat}_k^{\mathrm{dom}}(W,V)$, so folgt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = \varphi \circ f^* = \mathrm{id}_{k(W)}.$$

Aus der Bijektivität von * folgt also $f \circ g = \mathrm{id}_W$ (und analog für $g \circ f$). Also ist f eine birationale Äquivalenz. □

Korollar 4.4.16. *Für zwei irreduzible k-Varietäten sind äquivalent:*
(i) V und W sind birational äquivalent.
(ii) $k(V) \cong_k k(W)$
(iii) Es gibt $\emptyset \neq V' \subseteq V, \emptyset \neq W' \subseteq W$ *offen mit* $V' \cong W'$.

Beweis. "$(i) \Leftrightarrow (ii)$" ist klar aus Satz 4.4. Ebenso klar ist "$(iii)\Rightarrow(i)$" . Für "$(i) \Rightarrow (iii)$" seien schließlich $f\colon V_0 \to W$ und $g\colon W_0 \to V$ Morphismen auf offen-dichten Teilmengen mit $g \circ f = \mathrm{id}_{f^{-1}(W_0)}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{g^{-1}(V_0)}$. Daraus folgt direkt

$$f\colon f^{-1}(W_0) \xrightarrow{\cong} g^{-1}(V_0). \qquad \square$$

Korollar 4.4.17. *Eine irreduzible Varietät V ist genau dann rational, wenn $k(V)$ ein rationaler Funktionenkörper $k(x_1, \ldots, x_n)$ ist.*

Beispiel 4.4.18. Sei $C = \mathcal{V}(y^2 - x^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$ die Schleifenkurve aus Beispiel 1.2.2 (iii). Die rationale Funktion

$$\begin{aligned} f\colon C &\dashrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (a,b) &\mapsto \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ist eine birationale Äquivalenz. Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{A}^1 &\to C \\ r &\mapsto (r^2-1, r(r^2-1)). \end{aligned}$$

Also ist C eine rationale Kurve und $k(C) = k(x)$. Geometrisch ordnet f jedem Punkt von $C \setminus \{(0,0\}$ die Steigung der Ursprungsgerade durch den Punkt zu. Wir erhalten die Isomorphie der offenen Teilmengen $C \setminus \{(0,0)\}$ und $\mathbb{A}^1 \setminus \{\pm 1\}$. Damit haben wir das Gleichungssystem $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ in gewisser Weise fast vollständig gelöst. $\triangle$

Beispiel 4.4.19. (i) Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n$ eine k-Hyperebene, und $z \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$. Für jeden Punkt $z \neq a \in \mathbb{P}^n$ definieren wir den Punkt $\pi(a) \in H$ als den Schnittpunkt der von z und a aufgespannten Geraden mit H. Dadurch erhalten wir eine rationale Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow H = \mathbb{P}^{n-1},$$

genannt die **Projektion mit Zentrum** z. Man kann die Koordinaten so wählen, dass $z = (1:0:\ldots:0)$ und $H = \mathcal{V}_+(x_0)$ gilt. Dann ist

$$\pi(a_0 : \ldots : a_n) = (0 : a_1 : \ldots : a_n),$$

und dabei ist $\pi\colon \mathbb{P}^n \setminus \{z\} \to H$ ein Morphismus.
(ii) Seien allgemeiner Z, L lineare Teilräume von $\mathbb{P}^n$ mit $Z \cap L = \emptyset$ und $\dim(Z) + \dim(L) = n - 1$ (d.h. sie kommen von über k definierten Untervektorräumen

$\tilde{Z}, \tilde{L} \subseteq K^{n+1}$ mit $\tilde{Z} \oplus \tilde{L} = K^{n+1}$). Jeder Punkt $a \in \mathbb{P}^n \setminus Z$ kommt von einer Ursprungsgeraden $v \subseteq K^{n+1}$, für die $\mathrm{span}(\tilde{Z}, v) \cap \tilde{L}$ eindimensional ist. Das definiert eine rationale Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow L$$

genannt die **Projektion mit Zentrum Z**. Wählt man die Koordinaten so, dass $L = \mathcal{V}_+(x_0, \ldots, x_m)$ und $Z = \mathcal{V}_+(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ gilt, gilt

$$\pi(a_0 : \ldots : a_n) = (0 : \ldots : 0 : a_{m+1} : \ldots : a_n).$$

Ist $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine irreduzible Varietät mit $V \nsubseteq Z$, so ist $\pi\,|_V\colon V \dashrightarrow L$ ebenfalls eine rationale Abbildung. △

Eine **Quadrik** Q ist eine durch ein quadratisches homogenes Polynom beschriebene Varietät in $\mathbb{P}^n$. Ist $\mathrm{char}(k) \neq 2$, so kann man nach einem Koordinatenwechsel $Q = \mathcal{V}_+(c_0x_0^2 + \cdots + c_rx_r^2)$ mit $c_i \in k^\times$ annehmen (Diagonalisierung von quadratischen Formen). Für $r \geq 2$ ist Q irreduzibel (Aufgabe 26). Q heißt **nichtausgeartet**, falls $r = n$ gilt.

Satz 4.4.20. *Sei k unendlich mit $\mathrm{char}(k) \neq 2$, und $Q = \mathcal{V}_+(q) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine nichtausgeartete Quadrik. Dann gilt*

$$Q \text{ } k\text{-rational} \Leftrightarrow Q(k) \neq \emptyset.$$

Beweis. "$\Rightarrow$ ist klar nach Beispiel 4.4.14 (iii). Für "$\Leftarrow$" wähle $z \in Q(k)$ und eine k-Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $z \notin H$. Die Projektion mit Zentrum z liefert eine k-rationale Abbildung

$$\pi\colon Q \dashrightarrow H.$$

Wir geben eine Umkehrabbildung an. Dabei schneiden wir für $b \in H$ die von z und b aufgespannte Gerade mit Q. In den meisten Fällen wird das außer z genau ein weiterer Punkt a sein, der dann offensichtlich das Urbild von b unter π ist.
Sei also $z = [v]$ und $b = [w]$. Wir suchen also $s \in K$ mit $q(sv + w) = 0$. Damit setzen wir dann $a = [sv + w]$. Es ist

$$q(sv + w) = s^2q(v) + 2sb_q(v, w) + q(w) = 2sb_q(v, w) + q(w),$$

wobei b_q die zu q gehörende symmetrische Bilinearform ist. Die Gleichung $0 = q(sv + w)$ lässt sich also im Fall $b_q(v, w) \neq 0$ eindeutig nach s auflösen und liefert

$$a = [2b_q(v, w)w - q(w)v]\,.$$

Ausserhalb der k-Hyperebene $L = \{[w] \mid b_q(v,w) = 0\}$ erhalten wir so einen Morphismus $f\colon \mathbb{P}^n \setminus L \to Q$, der durch Einschränkung eine zu π inverse rationale Abbildung $f\colon H \dashrightarrow Q$ definiert (H kann so gewählt werden, dass $H \nsubseteq L$ gilt). $\square$

Beispiel 4.4.21. Der Beweis von Satz 4.4.20 liefert eine explizite birationale Äquivalenz. Sei etwa $q = x_0x_1 + x_2^2 - x_3^2$ und $Q = \mathcal{V}_+(q) \subseteq \mathbb{P}^3$. Wir wählen $z = (1:0:0:0) \in Q$ und $H = \mathcal{V}_+(x_0)$. Die Abbildung $\pi\colon Q \dashrightarrow H$ hat also die Vorschrift

$$\pi(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = (0 : a_1 : a_2 : a_3).$$

Die Umkehrabbildung nimmt dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned} f\colon H = \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow Q \\ (0 : b_1 : b_2 : b_3) &\mapsto (b_3^2 - b_2^2 : b_1^2 : b_1b_2 : b_1b_3), \end{aligned}$$

und liefert eine rationale Parametrisierung von Q. $\triangle$

Beispiel 4.4.22. Es gibt eine birationale Äquivalenz zwischen $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^2$. Sie ist gegeben durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ ((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) &\mapsto (a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0) \\ (b_0 : b_2), (b_0 : b_1) &\leftarrow\!\shortmid (b_0 : b_1 : b_2). \end{aligned}$$

$\triangle$

Kapitel 5

Verschiedenes

5.1 Ganzheit und endliche Morphismen

Seien A, B Ringe und $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann können wir B als A-Algebra auffassen, vermöge der skalaren Multiplikation $\varphi(a) \cdot b$. Dabei unterdrücken wir teilweise φ in der Notation und schreiben einfach $a \cdot b$.

Definition 5.1.1. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.
(i) φ heißt **ganzer Ringhomomorphismus** (bzw. nennt man B dann auch **ganze** A**-Algebra**), falls jedes $b \in B$ eine Ganzheitsgleichung

$$b^n + \varphi(a_1) \cdot b^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n) = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ erfüllt.
(ii) φ heiß **endlich** (bzw. B heißt **endliche** A**-Algebra**), wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

Lemma 5.1.2. *$b \in B$ erfüllt genau dann eine Ganzheitsgleichung über A, wenn $A[b]$ ein endliche A-Algebra ist. Dabei ist $A[b]$ die von b erzeugte A-Unteralgebra von B (bzw. der von $1, b, b^2, \ldots$ erzeugte A-Modul).*

Beweis. Leichte Übung, siehe Aufgabe 28. □

Proposition 5.1.3. *Genau dann ist $\varphi\colon A \to B$ endlich, wenn B ganz und als A-Algebra endlich erzeugt ist.*

Beweis. "⇒": Offensichtlich ist B als A-Algebra erst recht endlich erzeugt. Sei nun $b \in B$ beliebig. Schreibe

$$B = Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_n$$

mit $b_i \in B$ und o.B.d.A. $b_1 = 1$. Dann gibt es für alle $i = 1, \ldots, n$ Gleichungen

$$b \cdot b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$$

mit $a_{ij} \in A$. Sei $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$. Dann gilt

$$M \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

und also liegt $(b_1, \ldots, b_n)^t$ im Kern von

$$N := M - b \cdot \mathrm{Id}_n.$$

Daraus folgt aber $\det(N) = 0$, denn es gilt $\mathrm{adj}(N) \cdot N = \det(N) \cdot \mathrm{Id}_n$, und also

$$\det(N) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0,$$

und es gilt $b_1 = 1$. An der Leibnitzformel zur Determinantenberechnung sieht man aber, dass

$$\det(N) = (-1)^n b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n$$

für gewisse $a_i \in A$ gilt. Das liefert eine Ganzheitsgleichung für b.
"$\Leftarrow$": Sei B ganz und als A-Algebra endlich erzeugt von $b_1, \ldots, b_n$. Sei

$$b_i^{n_i} + a_{i1} b_i^{n_i - 1} + \cdots = 0$$

eine Ganzheitsgleichung für b_i. Dann wird B also A-Modul offensichtlich erzeugt von allen Produkten

$$b_1^{e_1} \cdots b_n^{e_n}$$

mit $e_i < n_i$. □

Korollar 5.1.4. *Seien $b_1, \ldots, b_n \in B$ ganz über A. Dann ist jedes Element aus der A-Algebra $A[b_1, \ldots, b_n]$ ganz über A.*

Beweis. Der Beweis von "$\Leftarrow$" in 5.1.3 zeigt, dass $A[b_1, \ldots, b_n]$ endlich über A ist. Die Aussage folgt dann aus "$\Rightarrow$". □

Korollar 5.1.5. *(i) Sind $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ beide endlich, so auch $\psi \circ \varphi\colon A \to C$.*
(ii) Sind $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ beide ganz, so auch $\psi \circ \varphi\colon A \to C$.

Beweis. (i) Erzeugen $c_1, \ldots, c_n$ den B-Modul C und $b_1, \ldots, b_m$ den A-Modul B, so erzeugen die Produkte $b_i c_j$ offensichtlich den A-Modul C.
(ii) Sei $c \in C$ mit Ganzheitgleichung

$$c^n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i c^i$$

über B. Dann ist $\tilde{C} := A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]$ eine endlich erzeugte $\tilde{A}$-Algebra, wobei $\tilde{A} := A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$. Da c ganz über $\tilde{A}$ ist, ist $\tilde{C}$ ganz über $\tilde{A}$, nach Korollar 5.1.4. Damit ist aber $\tilde{C}$ sogar endlich über $\tilde{A}$, nach Proposition 5.1.3. Andererseits ist $\tilde{A}$ aber über A ebenfalls ganz und endlich erzeugt (mit demselben Argument), und also ebenfalls endlich. Mit (i) ist damit $\tilde{C}$ endlich über A, und damit ganz. Wegen $c \in \tilde{C}$ ist c also ganz über A. □

Bemerkung 5.1.6. (i) Der Ring aller über $\mathbb{Z}$ ganzen Zahlen aus $\mathbb{C}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$, aber nicht endlich erzeugt bzw. endlich.
(ii) Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Homomorphismus endlich erzeugter k-Algebren, so gilt

$$\varphi \text{ endlich } \Leftrightarrow \varphi \text{ ganz.}$$

Denn B ist als A-Algebra endlich erzeugt (sogar als k-Algebra).
(iii) Ist B endliche/ganze A-Algebra und C eine weitere A-Algebra, so ist $B \otimes_A C$ eine endliche/ganze C-Algebra (Aufgabe 29).

Satz 5.1.7 (Cohen-Seidenberg)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ganz.*
(i) Sind $\mathfrak{q} \subseteq J$ Ideale in B mit $\mathfrak{q}$ prim und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(J)$, so folgt $\mathfrak{q} = J$.
(ii) Für $\mathfrak{q} \subseteq B$ prim gilt

$$\mathfrak{q} \textit{ maximal } \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \textit{ maximal.}$$

(iii) ("Going up") Zu Primidealen $\mathfrak{q} \subseteq B$ und $\mathfrak{p}' \subseteq A$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}'$ gibt es stets ein Primideal $\mathfrak{q}' \subseteq B$ mit $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$.
(iv) Ist φ injektiv, so ist $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ surjektiv.

Beweis. (i) Setze $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Indem wir zu $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ übergehen, können wir $A \subseteq B$ als ganze Erweiterung nullteilerfreier Ringe annehmen, und müssen $J \cap A \neq (0)$ für jedes $J \neq (0)$ zeigen. Für $0 \neq b \in B$ sei

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

eine Ganzheitsgleichung über A. Dabei können wir $a_n \neq 0$ annehmen, da man aufgrund der Nullteilerfreiheit b kürzen kann. Also ist $0 \neq a_n \in A \cap Bb$.
(ii) Nach Übergang zu $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ müssen wir also zeigen, dass bei einer ganzen Erweiterung $A \subseteq B$ von Integritätsringen genau dann A ein Körper ist, wenn B einer ist.
Sei also A ein Körper. Für jedes Ideal $J \subsetneq B$ ist dann $J \cap A = (0)$, und mit (i) folgt $J = (0)$. Also hat auch B nur die beiden trivialen Ideale, und ist damit ein Körper.
Sei umgekehrt B ein Körper. Für $0 \neq a \in A$ existiert $a^{-1} \in B$. Sei

$$a^{-n} + a_1 a^{-(n-1)} + \cdots + a_n = 0$$

eine Ganzheitsgleichung für a^{-1} über A. Multiplikation mit a^{n-1} zeigt $a^{-1} \in A$.
(iii) Nach Übergang zu ganzen Erweiterung $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ folgt die Aussage direkt aus (iv).
(iv) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Setze $S := A \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ wieder eine Erweiterung, die ebenfalls ganz ist (das ist ein Spezialfall von Bemerkung 5.1.6 (iii) denn $S^{-1}B = B \otimes_A S^{-1}A$). Insbesondere ist $S^{-1}B \neq \{0\}$, und wir können ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in $S^{-1}B$ wählen. Nach (ii) ist $\mathfrak{m} \cap S^{-1}A$ maximal in $S^{-1}A$. Da $S^{-1}A$ nur ein maximales Ideal besitzt, folgt $\mathfrak{m} \cap S^{-1}A = \mathfrak{p}S^{-1}A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ S^{-1}A \arrow[r] & S^{-1}B \end{tikzcd}$$

Wegen $\mathfrak{p}S^{-1}A \cap A = \mathfrak{p}$ folgt also

$$\mathfrak{p} = \left(\mathfrak{m} \cap S^{-1}A\right) \cap A = (\mathfrak{m} \cap B) \cap A.$$

Für $\mathfrak{q} := \mathfrak{m} \cap B \in \operatorname{Spec}(B)$ folgt also $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. $\square$

Korollar 5.1.8. *Ist $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, so hat die Abbildung $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ genau die Bildmenge*

$$\{\mathfrak{p} \mid \ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Beweis. Klar nach Übergang zur ganzen Erweiterung $A/\ker(\varphi) \subseteq B$ und Satz 5.1.7 (iv). □

Lemma 5.1.9. *Sei M ein A-Modul und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $(a_1, \ldots, a_n) = (1)$. Falls alle M_{a_i} als A_{a_i}-Moduln endlich erzeugt sind, so ist M als A-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Es gibt endlich viele $m_1, \ldots, m_r \in M$, so dass jedes M_{a_i} als A_{a_i}-Modul von $m_1, \ldots, m_r$ erzeugt wird. Wir zeigen dass dann M von $m_1, \ldots, m_r$ als A-Modul erzeugt wird.
Sei dazu $m \in M$ beliebig. Indem wir $m \in M_{a_i}$ durch die m_j darstellen und mit einer hohen Potenz von a_i multiplizieren, erhalten wir

$$a_i^{n_i} \cdot m \in \sum Am_i.$$

Aus $(a_1^{n_1}, \ldots, a_n^{n_r}) = (1)$ folgt $m \in \sum Am_i$. □

Proposition 5.1.10. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten, und W sei affin.*
(i) Ist auch V affin und $\phi^*\colon k[W] \to k[V]$ endlich, so ist für jedes $p \in k[W]$ und $W' := \mathcal{D}_W(p)$ auch $V' := \phi^{-1}(W')$ affin, und $\phi^*\colon k[W'] \to k[V']$ ist endlich.
(ii) Sind umgekehrt $p_1, \ldots, p_r \in k[W]$ mit $(p_1, \ldots, p_r) = (1)$ so, dass für $W_i := \mathcal{D}_W(p_i)$ auch $V_i := \phi^{-1}(W_i)$ affin und $\phi^*\colon k[W_i] \to k[V_i]$ endlich ist, so ist V affin und $\phi^*\colon k[W] \to k[V]$ endlich.

Beweis. (i) ist klar, denn $\phi^{-1}(W') = \mathcal{D}_V(\phi^*(p))$ ist affin, und es ist

$$\phi^*\colon k[W]_p \to k[V]_{\phi^*(p)}$$

endlich.
Für (ii) fixiere $i \in \{1, \ldots, r\}$. Wir bezeichnen $\phi^*(p_i) \in \mathcal{O}(V)$ der Einfachheit halber wieder mit p_i. Dann ist $V_i = \mathcal{D}_V(p_i)$. Zunächst zeigen wir, dass der natürliche Homomorphismus

$$\psi\colon \mathcal{O}(V)_{p_i} \to \mathcal{O}(V_i) = k[V_i]$$

ein Isomorphismus ist. Die Injektivität ist dabei klar. Für die Surjektivität sei $g \in \mathcal{O}(V_i)$. Für $N \geq 1$ definieren wir eine Funktion $g_N\colon V \to \mathbb{A}^1$ durch

$$g_N(v) = \begin{cases} p_i(x)^N g(v) & \text{falls } v \in V_i \\ 0 & \text{falls } v \in V \setminus V_i \end{cases}$$

Es ist natürlich $g \in \mathcal{O}(V_i \cap V_j)$ für alle j. Wegen $V_i \cap V_j = \mathcal{D}_{V_j}(p_i)$ affin gilt $\mathcal{O}(V_i \cap V_j) = k[V_j]_{p_i}$. Deshalb stimmt für großes N die Funktion g_N auf $V_i \cap V_j$

mit einer regulären Funktion $p \in \mathcal{O}(V_j)$ überein. Dann stimmt g_{N+1} dort mit $p_i p$ überein, und auf $V_j \setminus V_i$ sind beide Funktionen 0. Also ist g_{N+1} regulär auf ganz V_j. Insgesamt können wir also N so groß wählen, dass g_N regulär auf allen V_j, und damit regulär auf V ist. Es ist nun $\psi\left(\frac{g_N}{p_i^N}\right) = g$.
Wegen $\mathcal{O}(V)_{p_i} \cong k[V_i]$ ist $\mathcal{O}(V)_{p_i}$ nun also eine endliche Algebra über $k[W_i] = k[W]_{p_i}$. Nach Lemma 5.1.9 ist damit $\mathcal{O}(V)$ eine endliche $k[W]$-Algebra. Insbesondere ist $\mathcal{O}(V)$ als k-Algebra endlich erzeugt (und sowieso reduziert). Also gibt es eine affine Varietät V' und einen Isomorphismus $k[V'] \cong \mathcal{O}(V)$. Dieser induziert wie gewöhnlich einen Morphismus von Varietäten $\gamma\colon V \to V'$. Ausserdem ergibt auch $k[W] \to \mathcal{O}(V) \to k[V']$ einen Morphismus von affinen Varietäten $\phi'\colon V' \to W$, und das folgende Dreieck kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\phi"'] & & V' \arrow[dl, "\phi'"] \\ & W & \end{tikzcd} .$$

Über jeden offenen Teil W_i ist die Restriktion $\gamma\colon V_i = \phi^{-1}(W_i) \to \phi'^{-1}(W_i)$ ein Isomorphismus. Denn beide Varietäten sind affin, und der dazugehörige Ringhomomorphismus $k[\phi'^{-1}(W_i)] = k[V']_{p_i} = \mathcal{O}(V)_{p_i} \to k[V_i]$ ist gerade ψ von oben, ein Isomorphismus. $\square$

Satz 5.1.11. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten. Dann sind äquivalent:*
(i) Es gibt eine offen-affine Überdeckung $W = \bigcup_i W_i$, so dass $V_i := \phi^{-1}(W_i)$ ebenfalls affin ist, und der Ringhomomorphismus $\phi^*\colon k[W_i] \to k[V_i]$ endlich ist für alle i.
(ii) Für jede offen-affine Teilmenge $W' \subseteq W$ ist $V' := \phi^{-1}(W')$ wieder affin, und $\phi^*\colon k[W'] \to k[V']$ ist endlich.

Beweis. (ii)⇒(i) ist klar. Für (i)⇒(ii) bemerken wir, dass für jedes i und jedes $p \in k[W_i]$ die Menge $\mathcal{D}_{W_i}(p)$ die Eigenschaft aus (ii) hat, nach Proposition 5.1.10 (i). Damit existiert eine Basis aus offen-affinen Mengen für W, die Eigenschaft (ii) haben. Damit folgt die Aussage aus Proposition 5.1.10 (ii), angewandt auf W'. Beachte, dass $(p_1, \ldots, p_r) = (1)$ äquivalent dazu ist, dass die Mengen $\mathcal{D}_W(p_i)$ ganz W überdecken. $\square$

Definition 5.1.12. Ein Morphismus von Varietäten heißt **endlich**, wenn er die äquivalenten Bedingungen aus Satz 5.1.11 erfüllt.

Korollar 5.1.13. *(i) Ein Morphismus $\phi\colon V \to W$ von affinen Varietäten ist genau dann endlich, wenn $\phi^*\colon k[W] \to k[V]$ endlich ist.*

(ii) Jede abgeschlossene Einbettung ist endlich.
(iii) Die Komposition zweier endlicher Morphismen ist endlich.

Beweis. (i) ist klar aus der Definition und Proposition 5.1.10 (i). Für (ii) sei $V \hookrightarrow W$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge. Für jede offen-affine Teilmenge $W' \subseteq W$ ist $W' \cap V$ abgeschlossen in W' und damit affin. Der dazugehörige Ringhomomorphismus hat die Gestalt einer Projektion $k[W'] \twoheadrightarrow k[W']/I$, und ist also endlich. Für (iii) seien $\phi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to X$ endliche Morphismen. Für $X' \subseteq X$ offen-affin ist dann

$$V' := (\psi \circ \phi)^{-1}(X') = \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(X')\right)$$

affin, und $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*\colon k[X'] \to k[V']$ ist endlich nach Korollar 5.1.5 (i). □

Korollar 5.1.14. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein endlicher Morphismus.*
(i) Für jedes abgeschlossene $Z \subseteq V$ ist $\phi(Z)$ abgeschlossen in W
(ii) Für jedes $b \in W$ ist die Faser $\phi^{-1}(b)$ eine endliche Menge.

Beweis. Für beide Aussagen können wir W affin annehmen (Abgeschlossenheit ist eine lokale Bedingung). Damit ist auch V affin. Nach Korollar 5.1.13 ist $\phi\mid_Z\colon Z \to W$ ebenfalls endlich. Für (i) können wir also $Z = V$ annehmen. Wenn wir noch W durch $\overline{\phi(V)}$ ersetzen, können wir ϕ als dominant annehmen. Dann ist $\phi^*\colon k[W] \to k[V]$ injektiv und endlich. Nach Satz 5.1.7 (iv) ist die induzierte Abbildung $\mathrm{Spec}\,(k[V]) \to \mathrm{Spec}\,(k[W])$ surjektiv, und nach Lemma 1.4.14 ist auch ϕ surjektiv.
Für (ii) seien $p_1, \ldots, p_n$ Erzeuger der k-Algebra $k[V]$. Da $k[V]$ mittels ϕ^* eine endliche und damit ganze $k[W]$-Algebra ist, gibt es für jedes p_i eine Ganzheitsgleichung

$$p_i^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \phi^*(q_{ij})p_i^j = 0$$

mit $q_{ij} \in k[W]$. Für $a \in V$ mit $\phi(a) = b$ gilt dann

$$p_i(a)^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} q_{ij}(b)p_i(x)^j = 0.$$

Das ist bei festem b eine echte polynomiale Gleichung über K für $p_i(a)$, und die hat nur endlich viele Lösungen. Damit gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für die Werte $p_1(a), \ldots, p_n(a)$. Andererseits legen diese Werte a eindeutig fest, denn die p_i erzeugen $k[V]$. Damit gibt es auch nur endlich viele Möglichkeiten für a. □

Bemerkung 5.1.15. Die Umkehrung zu Korollar 5.1.14 (*ii*) gilt nicht. Ein Morphismus kann ausschließlich endliche Fasern haben, aber trotzdem nicht endlich sein. Ein Beispiel ist die offene Einbettung $\mathcal{D}(x) \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. Der induzierte Ringhomomorphismus ist

$$\begin{aligned} k[t] &\to k[\mathcal{D}(x)] = k[x,y]/(xy-1) \\ t &\mapsto x. \end{aligned}$$

Hier ist $k[\mathcal{D}(x)]$ kein endlich erzeuger $k[t]$-Modul.

Satz 5.1.16. *Seien $Z, L \subseteq \mathbb{P}^n$ lineare Teilräume mit $Z \cap L = \emptyset$ und $\dim(Z)+\dim(L) = n-1$. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen mit $Z \cap V = \emptyset$. Dann ist die lineare Projektion mit Zentrum Z*

$$\pi\colon V \to L$$

ein endlicher Morphismus von Varietäten.

Beweis. Nach geeigneter Wahl der Koordinaten können wir annehmen $Z = \mathcal{V}_+(x_0, \dots, x_m)$, $L = \mathcal{V}_+(x_{m+1}, \dots, x_n) = \mathbb{P}^m$, und also

$$\pi(a_0 : \ldots : a_n) = (a_0 : \ldots : a_m).$$

Fixiere ein $i \in \{0. \dots, m\}$ und setze $L_i = \mathcal{D}_+(x_i)$ sowie $V_i = \pi^{-1}(L_i) = \mathcal{D}_{V,+}(x_i)$. Dann sind L_i und V_i affin, und wir müssen zeigen, dass jedes $g \in k[V_i]$ eine Ganzheitsgleichung über $k[L_i]$ erfüllt. Nach Satz 4.2.7 ist g von der Gestalt $\frac{p}{x_i^d}$ für ein $p \in k_+[V]$ homogen vom Grad d. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to \mathbb{P}^{m+1} \\ a &\mapsto (a_0^d : \ldots : a_m^d : p(a)), \end{aligned}$$

die ein wohldefinierter Morphismus ist. Nach Satz 4.3.13 ist $\phi(V)$ abgeschlossen, also

$$\phi(V) = \mathcal{V}_+(h_1, \dots, h_r)$$

für gewisse homogene $h_i \in k[x_0, \dots, x_m, y]$. Wegen $(0 : \ldots : 0 : 1) \notin \phi(V)$ gilt

$$\mathcal{V}_+(h_1, \dots, h_r, x_0, \dots, x_m) = \emptyset.$$

Nach Satz 3.3.7 gibt es eine Gleichung

$$y^s = \sum_{i=1}^r a_i h_i + \sum_{j=0}^m b_j x_j$$

für ein großes $s \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_j \in k[\underline{x}, y]$. Dabei können alle Summanden als homogen vom Grad s angenommen werden, und insbesondere sind alle b_j homogen vom Grad $s-1$. Wir setzen nun einen Punkt $\phi(a)$ ein:

$$p(a)^s = \sum_{j=0}^{m} b_j(a_0^d, \ldots, a_m^d, p(a))a_j^d.$$

Hier sind alle Summanden homogen von Grad ds in a, und wenn wir durch a_i^{ds} dividieren, erhalten wir

$$g(a)^s = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^d, \ldots, \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^d, g(a) \right) \cdot \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^d.$$

Nun ist aber $z_j := \frac{a_j}{a_i} \in k[L_i]$, und die Gleichung

$$g^s = \sum_{j=1}^{m} b_j(z_0^d, \ldots, z_m^d, g)z_j^d$$

ist eine Ganzheitsgleichung für g über $k[L_i]$. Da b_j homogen vom Grad $s-1$ ist, taucht g rechts nämlich höchstens zur Potenz $s-1$ auf. □

Korollar 5.1.17. *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen, $p_0, \ldots, p_m \in k_+[V]$ homogen vom selben Grad mit $V \cap \mathcal{V}_+(p_0, \ldots, p_m) = \emptyset$. Dann ist der Morphismus*

$$p = (p_0 : \ldots : p_m) \colon V \to \mathbb{P}^m$$

endlich.

Beweis. Seien o.B.d.A. die Elemente $p_1, \ldots, p_m \in k_+[V]$ linear unabhängig (linear abhängige p_i entsprechen der Verknüpfung mit einer abgeschlossene Einbettung $\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{m+r}$). Sei d der Grad der p_i und $\nu \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ die d-te Veronese Einbettung. Dann gibt es Linearformen $\ell_0, \ldots, \ell_m \in k[y_0, \ldots, y_N]$ mit $\nu^{-1}(\mathcal{V}_+(\ell_i)) \cap V = \mathcal{V}_{V,+}(p_i)$. Die ℓ_i sind dann ebenfalls linear unabhängig, und können also zu einer Basis $\ell_{m+1}, \ldots, \ell_N$ der Linearformen ergänzt werden. Sei $Z = \mathcal{V}_+(\ell_0, \ldots, \ell_m)$ und $L = \mathcal{V}_+(\ell_{m+1}, \ldots, \ell_N) = \mathbb{P}^m$. Die Projektion $\pi \colon \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^m$ mit Zentrum Z erfüllt dann offensichtlich

$$p = \pi \circ \nu$$

für $v \in V$. Es ist aber ν ein Isomorphismus von V auf $\nu(V)$ (Satz 4.2.2) und π endlich. Damit ist auch p endlich. □

5.2 Transzendenzgrad und Noethersche Normalisierung

Definition 5.2.1. Sei k ein Körper und A eine k-Algebra.
(i) Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **algebraisch abhängig**, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_n \in B$, sowie ein Polynom $0 \neq p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ gibt mit $p(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Andernfalls heißt B **algebraisch unabhängig**.
(ii) Ist $A = K$ ein Körper, so heißt jede maximale algebraisch unabhängige Teilmenge $B \subseteq K$ **Transzendenzbasis** von K über k.

Bemerkung 5.2.2. (i) Eine einelementige Teilmenge $B = \{a\} \subseteq K$ ist genau dann algebraisch abhängig, wenn a algebraisch über k ist.
(ii) Eine algebraisch unabhängige Teilmenge $B \subseteq K$ ist genau dann eine Transzendenzbasis, wenn die Körpererweiterung $k(B) \subseteq K$ algebraisch ist.
(iii) Jede algebraisch unabhängige Teilmenge $B \subseteq K$ ist in einer Transzendenzbasis enthalten (Zorn'sches Lemma). Insbesondere besitzt jede Körpererweiterung $k \subseteq K$ eine Transzendenzbasis.

Lemma 5.2.3 (Austauschsatz). *Seien B, C zwei Transzendenzbasen von K/k, und B sei endlich. Dann gibt es zu jedem $b \in B$ ein $c \in C$, so dass $(B \setminus \{b\}) \cup \{c\}$ eine Transzendenzbasis von K/k ist.*

Beweis. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ und $b = b_1$. Da $k(B) \subseteq K$ algebraisch ist, gibt es für alle $c \in C$ Polynome $0 \neq p_c \in k[t, x_1, \ldots, x_r]$ mit $p_c(c, b_1, \ldots, b_r) = 0$. Dabei muss für mindestens ein c die Variable x_1 in p_c vorkommen. Ansonsten wären alle c schon algebraisch über $k(b_2, \ldots, b_r)$, und da K algebraisch über $k(C)$ ist, wäre K schon algebraisch über $k(b_2, \ldots, b_r)$, ein Widerspruch.
Komme also x_1 in p_c vor. Dann ist $\{c, b_2, \ldots, b_r\}$ eine Transzendenzbasis von K/k. Wegen $p_c(c, b_1, b_2, \ldots, b_r) = 0$ ist nämlich b_1 algebraisch über dem Körper $k(c, b_2, \ldots, b_r)$, und damit auch K. Wären nun $c, b_2, \ldots, b_r$ algebraisch abhängig über k, so wäre c algebraisch über $k(b_2, \ldots, b_r)$, und damit b_1 algebraisch über $k(b_2, \ldots, b_r)$, ein Widerspruch. $\square$

Satz 5.2.4. *Je zwei Transzendenzbasen der Körpererweiterung K/k haben dieselbe Mächtigkeit.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass K/k eine endliche Transzendenzbasis B besitzt. Sei C eine weitere Transzendenzbasis und $s := |B \cap C|$. Falls $s = |B|$ gilt, folgt $B \subseteq C$, und damit sogar $B = C$, aufgrund der Maximalität von B.

Andernfalls gibt es ein $b \in B \setminus C$. Mit Lemma 5.2.3 finden wir ein $c \in C$, so dass $B_1 := (B \setminus \{b\}) \cup \{c\}$ wieder eine Transzendenzbasis ist. Dabei gilt $|B_1| = |B|$, denn sonst wäre $B_1 = B \setminus \{b\}$ eine Transzendenzbasis, Widerspruch. Nun ist aber $|B_1 \cap C| = s + 1$, und nach endlich vielen Iterationsschritten sind wir im ersten Fall angekommen. □

Definition 5.2.5. Sei K/k eine Körpererweiterung. Dann ist der **Transzendenzgrad** $\operatorname{trdeg}_k(K)$ definiert als die Mächtigkeit einer Transzendenzbasis von K über k. Es ist $\operatorname{trdeg}_k(K) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ wohldefiniert nach Satz 5.2.4.

Bemerkung 5.2.6. (i) $\operatorname{trdeg}_k(K) = 0$ genau dann wenn K/k algebraisch ist.
(ii) Ist $E \subseteq K$ ein Erzeugendensystem von K über k, so ist jede maximale algebraisch unabhängige Teilmenge E_0 von E eine Transzendenzbasis von K/k. Denn jedes $e \in E$ ist dann algebraisch über $k(E_0)$, und damit ist K algebraisch über $k(E_0)$. Insbesondere folgt daraus

$$\operatorname{trdeg}_k(K) \leq |E|.$$

(iii) Gibt es eine Transzendenzbasis die K erzeugt, so heißt die Erweiterung K/k **rein transzendent**. Zu jeder Erweiterung K/k gibt es einen Zwischenkörper F mit F/k rein transzendent und K/F algebraisch (man wähle $F = k(B)$ mit einer Transzendenzbasis B). Dabei ist $\operatorname{trdeg}_k(F) = \operatorname{trdeg}_k(K)$ eindeutig bestimmt.
(iv) K heißt **Funktionenkörper über** k, falls K endlich erzeugt über k ist. Solche Körper sind genau die Funktionenkörper von irreduziblen k-Varietäten (Aufgabe 27). Falls $\operatorname{trdeg}_k(K) = d$, so heißt K ein d**-dimensionaler** Funktionenkörper über k. Ein Funktionenkörper heißt **rational**, falls K/k rein transzendent ist. Eine irreduzible Varietät ist also genau dann rational, wenn ihr Funktionenkörper rational ist.

Korollar 5.2.7. *Sei K ein Funktionenkörper über k und $\{a_1, \ldots, a_d\}$ eine Transzendenzbasis. Dann ist $K/k(a_1, \ldots, a_n)$ endlich algebraisch.*

Beweis. Die Erweiterung ist algebraisch und endlich erzeugt, also endlich. □

Lemma 5.2.8. *Seien $k \subseteq K \subseteq L$ Körper. Sei $B \subseteq K$ algebraisch unabhängig über k und $C \subseteq L$ algebraisch unabhängig über K. Dann ist $B \cup C$ algebraisch unabhängig über k.*

Beweis. Seien $b_1, \ldots, b_n \in B$ und $c_1, \ldots, c_m \in C$ paarweise verschieden, und $p \in k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ mit $p(b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m) = 0$. Schreibe $p =$

$\sum_\alpha p_\alpha(\underline{x})\underline{y}^\alpha \in k[\underline{x},\underline{y}]$. Aus der algebraischen Unabhängigkeit von C über K folgt dann $p_\alpha(b_1,\dots,b_n) = 0$ für alle α. Aus der algebraischen Unabhängigkeit von B über k folgt dann $p_\alpha = 0$ für alle α, also $p = 0$. □

Satz 5.2.9. *Seien $k \subseteq K \subseteq L$ Körper. Dann gilt*

$$\operatorname{trdeg}_k(L) = \operatorname{trdeg}_k(K) + \operatorname{trdeg}_K(L).$$

Beweis. Sei B eine Transzendenzbasis von K über k und C eine Transzendenzbasis von L über K. Dann ist nach Lemma 5.2.8 $B \cup C$ algebraisch unabhängig über k. Wir zeigen nun noch, dass L algebraisch über $k(B \cup C)$ ist. Das ist aber klar, denn L ist algebraisch über $K(C)$, und da K algebraisch über $k(B)$ ist, ist $K(C)$ algebraisch über $k(B \cup C)$. □

Satz 5.2.10 (Noethersche Normalisierung)**.** *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $t_1,\dots,t_d \in A$, so dass A eine endliche $k[t_1,\dots,t_d]$-Algebra ist.*

Beweis. Sei A als k-Algebra erzeugt von $a_1,\dots,a_n$. Angenommen $a_1,\dots,a_n$ sind algebraisch abhängig über k. Wir zeigen, dass es dann $b_1,\dots,b_{n-1} \in A$ gibt, so dass A ganz über $k[b_1,\dots,b_{n-1}]$ ist. Damit folgt die Aussage (mit Korollar 5.1.5 und Proposition 5.1.3) induktiv.
Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist klar, denn a_1 ist dann algebraisch und damit ganz über k. Somit ist A ganz über k.
Sei nun n beliebig und $0 \neq p \in k[x_1,\dots,x_n]$ mit $p(a_1,\dots,a_n) = 0$. Wir setzen $b_i = a_i - a_n^{e_i}$ $(i = 1,\dots,n-1)$ für später zu wählende $e_i \in \mathbb{N}$. Es gilt dann

$$0 = p(b_1 + a_n^{e_1},\dots,b_{n-1} + a_n^{e_{n-1}}, a_n).$$

Schreibe $p = \sum_\alpha c_\alpha \underline{x}^\alpha$ mit $c_\alpha \in k$, und fasse die rechte Seite der letzen Gleichung als Polynom in a_n mit Koeffizienten in $k[b_1,\dots,b_{n-1}]$ auf:

$$0 = \sum_\alpha c_\alpha \left(a_n^{e_1\alpha_1+\cdots+e_{n-1}\alpha_{n-1}+\alpha_n} + \text{niedrigere Grade in } a_n\right).$$

Wenn wir nun die e_i so wählen, dass für alle auftretenden α die Grade

$$e_1\alpha_1 + \cdots + e_{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n$$

paarweise verschieden sind, liefert das (nach Normierung) eine Ganzheitsgleichung für a_n über $k[b_1,\dots,b_{n-1}]$. Die e_i können aber so gewählt werden. Setzt man zum Beispiel $e_i = e^i$, so ist

$$e\alpha_1 + \cdots + e^{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n$$

ein Polynom in e. Verschiedene Polynome nehmen aber nur an endlich vielen Stellen dieselben Werte an. Also ergeben sich für alle verschiedenen α unterschiedliche Werte, wenn e groß genug gewählt wird. □

Definition 5.2.11. Sei A eine k-Algebra. Jede Teilalgebra $k[t_1, \dots, t_d]$ wie in Satz 5.2.10 heißt eine **Noethersche Normalisierung von** A.

Bemerkung 5.2.12. Sei k unendlich, und $A = k[a_1, \dots, a_n]$. Dann kann die Noethersche Normalisierung $k[t_1, \dots, t_d]$ sogar so gewählt werden, dass

$$t_i = a_i + \sum_{j=d+1}^{n} s_{ij} a_j$$

mit $s_{ij} \in k$ gilt, für alle $i = 1, \dots, d$. Macht man nämlich im Beweis von Satz 5.2.10 den alternativen Ansatz $b_i = a_i - s_i a_n$, so ergibt sich als Leitkoeffizient von $p(b_1 + s_1 a_n, \dots, b_{n-1} + s_{n-1} a_{n-1}, a_n)$ als Polynom in a_n gerade

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha s_1^{\alpha_1} \cdots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Da k unendlich ist, gibt es eine Wahl für $s_1, \dots, s_{n-1} \in k$, für die der Ausdruck $\neq 0$ ist.

Korollar 5.2.13. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen. Dann gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus*

$$V \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$$

für ein $0 \leq d \leq n$. Ist k unendlich, so kann er als Einschränkung einer linearen Abbildung $K^n \to K^d$ mit Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

über k realisiert werden.

Beweis. Betrachte eine Noethersche Normalisierung $k[t_1, \dots, t_d] \hookrightarrow k[V]$. Dazu korrespondiert ein endlicher und dominanter Morphismus $V \to \mathbb{A}^d$. Wegen Korollar 5.1.14 (i) ist dieser aber surjektiv. Die Darstellung im Fall k unendlich folgt direkt aus Bemerkung 5.2.12. □

Beispiel 5.2.14. Sei $C = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^2$ mit $p(x,y) = x^2 - y^2 - 1$. Die Konstruktion aus Bemerkung 5.2.12 liefert $t_1 = x - sy$ für ein $\pm 1 \neq s \in k$. Damit ist

$$\begin{aligned} C &\to \mathbb{A}^1 \\ (a_1, a_1) &\mapsto a_1 - sa_2 \end{aligned}$$

ein endlicher surjektiver Morphismus.

Bemerkung 5.2.15. Mit der Noetherschen Normalisierung erhalten wir einen neuen Beweis für den Hilbertschen Nullstellensatz 1.2.9. Sei nämlich F/k eine Körpererweiterung und F als k-Algebra endlich erzeugt. Sei $N := k[t_1, \ldots, t_d]$ eine Noethersche Normalisierung für F. Weil F ein Körper ist, folgt aus dem Satz von Cohen-Seidenberg 5.1.7 (ii), dass N ebenfalls ein Körper ist. Das impliziert aber $d = 0$, d.h. F/k ist endlich.

5.3 Dimension von Varietäten

Definition 5.3.1. (i) Sei X ein topologischer Raum. Die **(Krull-)Dimension** $\dim(X)$ **von** X ist das Supremum über alle Längen n von Ketten

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subseteq X$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Z_i von X. Wir setzen $\dim(\emptyset) = -1$.
(ii) Ist V eine (quasiprojektive) k-Varietät, so sei $\dim(V)$ die Dimension von V bezüglich der k-Zariskitopologie.
(iii) Sei A ein Ring. Dann ist die **(Krull-)Dimension** $\dim(A)$ **von** A definiert als das Supremum über alle Längen n von Ketten

$$\mathfrak{p}_n \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_0$$

von Primidealen von A. Dabei setzen wir $\dim(\{0\}) = -1$.

Bemerkung 5.3.2. Die Dimension eines topologischen Raumes stimmt nicht notwendigerweise mit unserer unmittelbaren Anschauung überein. So gilt etwa für jeden Hausdorffraum $\dim(X) = 0$. Die einzigen irreduziblen Teilmengen sind nämlich die Einpunktmengen.

Lemma 5.3.3. *Sei V eine affine Varietät. Dann ist* $\dim(V) = \dim(k[V])$.

Beweis. Die Zuordnung $Z \mapsto \mathcal{I}(Z)$ ist eine inklusionsumdrehende Bijektion zwischen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von V und Primidealen von $k[V]$. $\square$

Beispiel 5.3.4. Für $V = \mathbb{A}^n$ haben wir die folgende Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen

$$\emptyset \subsetneq \mathcal{V}(x_1, \dots, x_n) \subsetneq \mathcal{V}(x_2, \dots, x_n) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{V}(x_n) \subsetneq \mathbb{A}^n.$$

Ihr entspricht die folgende Kette von Primidealen in $k[\underline{x}]$:

$$(0) \subsetneq (x_n) \subsetneq (x_n, x_{n-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, \dots, x_n).$$

Also gilt

$$\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(k[\underline{x}]) \geq n.$$

Lemma 5.3.5. *Sei X ein topologischer Raum.*
(i) Ist $Y \subseteq X$, so gilt $\dim(Y) \leq \dim(X)$.
(ii) Ist $X = \bigcup_{i \in I} Y_i$ eine offene Überdeckung, so gilt $\dim(X) = \sup_{i \in I} \dim(Y_i)$.
(iii) Ist $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung, so gilt $\dim(X) = \max_{i=1,\dots,n} \dim(Y_i)$.

Beweis. Aufgabe 30. $\square$

Satz 5.3.6. *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt $\dim(A) = \dim(B)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ eine Primidealkette in B. Dann ist nach Satz 5.1.7 (i)

$$\mathfrak{q}_0 \cap A \subsetneq \mathfrak{q}_1 \cap A \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n \cap A$$

eine echte Primidealkette in A. Das zeigt $\dim(A) \geq \dim(B)$. Sei umgekehrt $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette in A. Nach Satz 5.1.7 (iv) gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}_0$ in B mit $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$. Durch iteratives Anwenden von Satz 5.1.7 (iii) erhalten wir so eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ in B mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$. Insbesondere ist die Kette echt aufsteigend, und das zeigt $\dim(A) \leq \dim(B)$. $\square$

Korollar 5.3.7. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein endlicher Morphismus von Varietäten. Dann ist ($\phi(V)$ abgeschlossen und) $\dim(V) = \dim(\phi(V))$.*

Beweis. Sei o.B.d.A ϕ surjektiv. Sei $W = \bigcup_i W_i$ eine offen-affine Überdeckung. Dann liefern die $V_i := \phi^{-1}(W_i)$ eine offen-affine Überdeckung von V, und $\phi^*\colon k[W_i] \hookrightarrow k[V_i]$ ist endlich und damit ganz. Nach Lemma 5.3.3 und Satz 5.3.6 ist also

$$\dim(V_i) = \dim(k[V_i]) = \dim(k[W_i]) = \dim(W_i),$$

und die Aussage folgt also aus Lemma 5.3.5. $\square$

Für eine nullteilerfreie k-Algebra A schreiben wir

$$\tau(A) := \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot}(A)).$$

Lemma 5.3.8. *Sei A eine nullteilerfreie k-Algbera mit $\tau(A) \geq n$. Dann gibt es n über k algebraisch unabhängige Elemente in A.*

Beweis. Seien $\frac{a_1}{b}, \ldots, \frac{a_n}{b}$ algebraisch unabhängige Elemente in $\operatorname{Quot}(A)$. Der Teilkörper $F := k(a_1, \ldots, a_n, b)$ von $\operatorname{Quot}(A)$ erfüllt dann $\operatorname{trdeg}_k(F) \geq n$. Nach Bemerkung 5.2.6 (ii) müssen also n der Elemente $a_1, \ldots, a_n, b$ algebraisch unabhängig über k sein. $\square$

Lemma 5.3.9. *Sei A eine nullteilerfreie k-Algebra und $0 \neq \mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Dann gilt entweder*

$$\dim(A/\mathfrak{p}) < \dim(A)$$

oder

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) = \infty.$$

Beweis. Seien $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in A/\mathfrak{p}$ algebraisch unabhängig über k. Sei $0 \neq b \in \mathfrak{p}$ beliebig. Dann sind $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ algebraisch unabhängig über k. Gäbe es nämlich eine nichttriviale Gleichung

$$p_0(a_1, \ldots, a_n)b^r + \cdots + p_{r-1}(a_1, \ldots, a_n)b + p_r(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

mit $p_i \in k[\underline{x}]$ nicht alle 0, so folgt nach Reduktion modulo $\mathfrak{p}$ bereits $p_r(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = 0$, also $p_r = 0$. Wir können also einmal durch b kürzen. Iterativ ergibt sich $p_i = 0$ für alle i, ein Widerspruch. Das beweist die Aussage. $\square$

Korollar 5.3.10. $\dim(\mathbb{A}^n) = n$. *Insbesondere stimmt die Dimension jedes linearen Teilraums von $\mathbb{A}^n$ mit der bekannten überein.*

Beweis. Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n] = k[\mathbb{A}^n]$ und $(0) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ eine Primidealkette in A. Dann gilt nach Lemma 5.3.9

$$n = \tau(A) > \tau(A/\mathfrak{p}_1) > \cdots > \tau(A/\mathfrak{p}_d) \geq 0.$$

Das impliziert $d \leq n$, also $\dim(\mathbb{A}^n) \leq n$. Die andere Ungleichung ist Beispiel 5.3.4. $\square$

Korollar 5.3.11. *Für jede endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra A gilt*

$$\dim(A) = \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot}(A)) = \tau(A) < \infty.$$

Dies ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer über k algebraisch unabhängigen Teilmenge von A.

Beweis. Sei $B = k[t_1, \dots, t_d] \subseteq A$ eine Noethersche Normalisierung. Nach Satz 5.3.6 und Korollar 5.3.10 gilt $\dim(A) = \dim(B) = d$. Andererseits gilt $d = \tau(B) = \tau(A)$, denn die Körpererweiterung $\operatorname{Quot}(B) \subseteq \operatorname{Quot}(A)$ ist algebraisch (das sieht man zum Beispiel durch Anwenden von Lemma 5.3.8 auf die endliche $\operatorname{Quot}(B)$-Algebra $B^{-1}A$). □

Satz 5.3.12. *Sei V eine k-Varietät und $V_1, \dots, V_r$ ihre irreduziblen Komponenten. Dann gilt:*
(i) $\dim(V) = \max_i \dim(V_i)$.
(ii) Ist V irreduzibel, so ist $\dim(V) = \operatorname{trdeg}_k(k(V))$.
(iii) Sind zwei irreduzible Varietäten birational äquivalent, so haben sie dieselbe Dimension.

Beweis. (i) folgt aus Lemma 5.3.5 (iii). Für (ii) sei $V = U_1 \cup \dots \cup U_r$ eine offenaffine Überdeckung. Dann gilt $\dim(V) = \dim(U_i)$ für ein i. Andererseits ist für alle i $\dim(U_i) = \operatorname{trdeg}_k(k(U_i))$ nach Korollar 5.3.11 und Satz 4.4.6 (iv). Andererseits gilt für jedes nichtleere U_i schon $k(V) = k(U_i)$ nach Satz 4.4.6 (i). (iii) folgt direkt aus (ii) und Korollar 4.4.16. □

Korollar 5.3.13. *Sei $\emptyset \neq V$ eine k-Varietät und $W \subseteq V$ eine offen-dichte Teilmenge. Dann gilt*

$$\dim(W) = \dim(V) \textit{ und } \dim(V \setminus W) < \dim(V).$$

Beweis. Seien $V_1, \dots, V_r$ die irreduziblen Komponenten von V. Dann gilt $W \cap V_i \neq \emptyset$ für alle i. Denn sonst wäre

$$V_i \subseteq V = \overline{W} \subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j,$$

ein Widerspruch. Dann liegt $W \cap V_i$ aber dicht in V_i und ist insbesondere selbst irreduzibel. Ausserdem gilt $k(V_i) = k(W \cap V_i)$. Das Maximum der Transzendengrade von $k(V_i)$ bzw. $k(W \cap V_i)$ ist aber $\dim(V)$ bzw. $\dim(W)$, nach Satz 5.3.12. Sei nun $Z \subseteq V \setminus W$ abgeschlossen und irreduzibel. Es gibt dann ein i mit $Z \subseteq V_i$. Wegen $V_i \cap W \neq \emptyset$ folgt $Z \subsetneq V_i$. Also gilt $\dim(V \setminus W) < \dim(V_i) \leq \dim(V)$. □

Beispiel 5.3.14. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ (oder $V \subseteq \mathbb{P}^n$) eine Hyperfläche. Dann gilt $\dim(V) = n-1$. Wir können dabei V als irreduzibel annehmen, also $V = \mathcal{V}(p)$ mit $p \in k[\underline{x}]$ irreduzibel. Dann gilt $k[V] = k[\underline{x}]/(p) = k[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$, wobei $p(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) = 0$ gilt. Aus $k(V) = k(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ folgt $\operatorname{trdeg}_k (k(V)) \leq n-1$. Kommt nun etwa x_n in p vor, so ist $(p) \cap k[x_1, \dots, x_{n-1}] = (0)$, und damit sind $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}$ algebraisch unabhängig über k. Somit ist $\operatorname{trdeg}_k (k(V)) = n-1$.

Satz 5.3.15. *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen mit $\dim(V) = d$.*
(i) Für jeden linearen Teilraum $L \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $\dim(L) \geq n-d$ gilt $V \cap L \neq \emptyset$.
(ii) Falls k unendlich ist, gibt es einen linearen Teilraum L mit $\dim(L) = n-d-1$ und $V \cap L = \emptyset$.

Beweis. Für (i) sei L ein linearer Teilraum der Dimension r mit $L \cap V = \emptyset$. Die Projektion $\pi\colon V \to \mathbb{P}^{n-r-1}$ mit Zentrum L ist endlich nach Satz 5.1.16, und also gilt $\dim(V) = \dim(\pi(V)) \leq n-r-1$. Daraus folgt $r \leq n - \dim(V) - 1 = n-d-1$.
(ii) beweisen wir per Induktion nach $n-d$. Falls $n-d=0$ ist können wir einfach $L = \emptyset$ wählen. Sei also nun $n-d \geq 1$. Wir wählen einen Punkt $z \in \mathbb{P}^n(k)$ mit $z \notin V$ (hier benötigen wir k unendlich). Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene mit $z \notin H$ und

$$\pi\colon V \to H = \mathbb{P}^{n-1}$$

die Projektion mit Zentrum z. Dann gilt wieder $\dim(V) = \dim(\pi(V))$ und also gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen linearen Teilraum $M \subseteq H$ der Dimension $n-1-d-1$ mit $M \cap \pi(V) = \emptyset$. Sei nun L der lineare Teilraum, der aus allen Geraden durch z und einen Punkt aus M besteht. Dann gilt $\dim(L) = \dim(M) + 1 = n+d-1$, und $L \cap V = \emptyset$, denn $\pi(L) \subseteq M$. □

Korollar 5.3.16. *Sei k unendlich und $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen. Ist m die maximale Dimension eines zu V disjunkten Teilraumes, so gilt $\dim(V) = n-m-1$.*

Bemerkung 5.3.17. Aus Satz 5.3.15 (ii) folgt eine Variation von Korollar 5.2.13 für projektive Varietäten (zumindest im Fall k unendlich): für $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen mit $\dim(V) = d$ gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus $\phi\colon V \twoheadrightarrow \mathbb{P}^d$. Man wählt einen linearen Teilraum L von $\mathbb{P}^n$ mit $\dim(L) = n-d-1$ und $L \cap V = \emptyset$. Die Projektion $\pi\colon V \to \mathbb{P}^d$ mit Zentrum L hat als endlicher Morphismus ein abgeschlossenes Bild der Dimension d. Damit ist π nach Beispiel 5.3.14 surjektiv.

Korollar 5.3.18. *Sei k unendlich, $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen, und $H_1, \dots, H_r \subseteq \mathbb{P}^n$ Hyperflächen. Dann gilt*

$$\dim(V \cap H_1 \cap \dots \cap H_r) \geq \dim(V) - r.$$

Inbesondere ist $V \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r \neq \emptyset$ *für* $r \leq \dim(V)$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $r = 1$, und zunächst $H_1 = H$ eine lineare Hyperebene. Sei $d = \dim(V)$. Für jeden linearen Teilraum M von $\mathbb{P}^n$ mit Dimension $n - d$ gilt $M \cap V \neq \emptyset$. Dies gilt insbesondere für solche $M \subseteq H$. Wegen $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ gilt also nach Satz 5.3.15 (ii) $\dim(V \cap H) \geq (n-1) - (n-d) = d - 1$.
Den Fall einer allgemeinen Hyperfläche H führt man leicht mit der Veronese-Abbildung auf den linearen zurück. □

Bemerkung 5.3.19. (i) Für homogene $p_1, \ldots, p_r \in k[\underline{x}] \setminus k$ ist also

$$\dim\left(\mathcal{V}_+(p_1, \ldots, p_r)\right) \geq n - r.$$

Insbesondere ist $\mathcal{V}_+(p_1, \ldots, p_r) \neq \emptyset$ für $r \leq n$.
(ii) Wenn $V \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen ist mit $\dim(V) = d$, so kann man V *nicht* mit weniger als $n - d$ Gleichungen definieren. Im Allgemeinen braucht man aber sogar mehr. Beispiele dafür sind zwei windschiefe Geraden in $\mathbb{P}^3$ (siehe Aufgabe 31).

5.4 Lokale Ringe und Tangentialräume

Für eine Untersuchung von lokalen Phänomenen auf einer Varietät benötigen wir zunächst eine relative Version des Funktionenkörpers. Sei V eine k-Varietät und $X \subseteq V$ eine irreduzible Teilmenge. Sei

$$\mathcal{U} := \{(U, f) \mid U \subseteq V \text{ offen}, U \cap X \neq \emptyset, f \in \mathcal{O}(U)\}.$$

Auf $\mathcal{U}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$(U, f) \sim (U', f') \;:\Leftrightarrow\; \exists U'' \subseteq U \cap U' \text{ offen}, U'' \cap X \neq \emptyset, f = f' \text{ in } \mathcal{O}(U'').$$

Für die Transitivität benötigt man dabei die Irreduzibilität von X; je zwei nichtleere offene Teilmengen von X schneiden sich! Nun definieren wir den **lokalen Ring von** V **entlang** X als die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathcal{O}_{V,X} := \{[(U, f)] \mid (U, f) \in \mathcal{U}\}.$$

Falls V aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch $\mathcal{O}_X$ statt $\mathcal{O}_{V,X}$. Ein Element von $\mathcal{O}_X$ ist also eine (Äquivalenzklasser einer) reguläre Funktion auf einer offenen Teilmenge, die X schneidet. Die Menge $\mathcal{O}_X$ trägt offensichtlich die Struktur

einer k-Algebra, indem man Funktionen punktweise (auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche) verknüpft. Dies ist verträglich mit der Äquvalenzrelation.
Etwas konzeptueller formuliert ist $\mathcal{O}_X$ der *direkte Limes* des gerichteten Systems der Ringe $\mathcal{O}(U)$ mit U offen und $U \cap X \neq \emptyset$, bezüglich der Einschränkungsabbildungen $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ für $U' \subseteq U$.
Für jedes offene U mit $U \cap X \neq \emptyset$ gibt es den Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\to \mathcal{O}_X \\ f &\mapsto [(U, f)] \,. \end{aligned}$$

Ist U irreduzibel, so ist dieser injektiv, nach dem Identitätssatz 4.3.9.

Bemerkung 5.4.1. (i) Ist $V' \subseteq V$ offen mit $V' \cap X \neq \emptyset$, so ist

$$\mathcal{O}_{V,X} = \mathcal{O}_{V',X\cap V'}.$$

Zum Studium von $\mathcal{O}_{V,X}$ kann mal also stets V als affin annehmen.
(ii) Für $X \subseteq V$ irreduzibel gilt $\mathcal{O}_{V,X} = \mathcal{O}_{V,\overline{X}}$. Man kann also stets X als abgeschlossen annehmen.
(iii) Für irreduzible Teilvarietäten $X \subseteq V$ gibt es einen kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{V,X} &\twoheadrightarrow k(X) \\ [(U, f)] &\mapsto \left[\left(f \colon U \cap X \to \mathbb{A}^1\right)\right] \,. \end{aligned}$$

Die Surjektivität folgt aus der Tatache, dass jede reguläre Funktion auf einer offenen Teilmenge von X lokal auf eine offene Teilmenge von V ausgeweitet werden kann.
(iv) Für offenes irreduzibles $X \subseteq V$ ist der Homomorphismus aus (iii) ein Isomorphismus, d.h. $\mathcal{O}_{V,X} = k(X)$, unabhängig von V. Insbesonderer gilt für irreduzibles V schon $\mathcal{O}_{V,V} = k(V)$.
(iv) Sei $\phi \colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten. Dann wird für jedes irreduzible $X \subseteq V$ ein kanonischer Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_X \colon \mathcal{O}_{W,\phi(X)} &\to \mathcal{O}_{V,X} \\ [(U, f)] &\mapsto \left[(\phi^{-1}(U), f \circ \phi)\right] \end{aligned}$$

induziert.

Lemma 5.4.2. *(i) Sei V affin und $X \subseteq V$ abgeschlossen und irreduzibel. Dann gilt*

$$\mathcal{O}_{V,X} \cong k[V]_{\mathcal{I}_V(X)}.$$

(ii) Sei V eine Varietät und $X \subseteq V$ eine irreduzible Teilmenge. Dann ist $\mathcal{O}_{V,X}$ noethersch und besitzt genau ein maximales Ideal

$$\mathfrak{m} = \{[(U, f)] \mid f \equiv 0 \textit{ auf } X \cap U\}.$$

Es gilt

$$\mathcal{O}_{V,X}/\mathfrak{m} = k\left(\overline{X}\right).$$

Beweis. (i) Es gibt einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[V]_{\mathcal{I}(X)} &\to \mathcal{O}_{V,X} \\ \frac{p}{q} &\mapsto \left[\left(\mathcal{D}_V(q), \frac{p}{q}\right)\right], \end{aligned}$$

der offensichtlich bijektiv ist. (ii) folgt direkt aus (i), mit Hilfe von Bemerkung 5.4.1 (i) und (ii) (siehe auch Aufgabe 32). □

Definition 5.4.3. Sei V eine Varietät und $a \in V$. Dann heißt der Ring

$$\mathcal{O}_a := \mathcal{O}_{V,a} := \mathcal{O}_{V,\{a\}} = \mathcal{O}_{V,\overline{\{a\}}}$$

der **lokale Ring von V im Punkt** a. Er besteht also aus regulären Funktionen, die auf offenen Umgebungen von a definiert sind (mit der Identifikation von Funktionen, die auf beliebig kleinen offenen Umgebung von a übereinstimmen).

Bemerkung/Beispiel 5.4.4. (i) Sei $V = \mathbb{A}^n$ und $a \in \mathbb{A}^n$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a} = k[\underline{x}]_{\mathcal{I}(a)} = \left\{\frac{p}{q} \in k(\underline{x}) \mid q(a) \neq 0\right\}.$$

Für $k = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{C}$ ist zum Beispiel $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0} = \mathbb{Q}[t]_{(t)}$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,\pi} = \mathbb{Q}(t)$.
(ii) Sei $V = \mathcal{V}(x_1x_2) \subseteq \mathbb{A}^2$ und $a = (1, 0)$. Dann gilt

$$\mathcal{I}(a) = (\overline{x}_1 - 1) \subseteq k[V] = k[\overline{x}_1, \overline{x}_2].$$

Man erhält einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,1} = k[t]_{(t-1)} &\to k[V]_{(\overline{x}_1-1)} = \mathcal{O}_{V,a} \\ t &\mapsto \overline{x}_1 \end{aligned}$$

(beachte dass $\overline{x}_2 = 0$ gilt in $k[V]_{(\overline{x}_1-1)}$.) Lokal am Punkt a sieht V also genauso aus wie der affine Raum $\mathbb{A}^1$.
Sei nun andererseits $a = (0,0)$. Dann gibt es in $\mathcal{O}_{V,a} = k[V]_{(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}$ die beiden Elemente $\overline{x}_1, \overline{x}_2$, die beide nicht 0 sind. Andererseits gilt $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = 0$, also ist $\mathcal{O}_{V,a}$ nicht nullteilerfrei. Insbesondere kann es einen Isomorphismus wie oben nicht geben.
(iii) Sei $V = \mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x^2)$ eine Schleifenkurve und $a = (0,0)$. Da $k[V]$ nullteilerfrei ist, gilt das auch für die Lokalisierung $\mathcal{O}_{V,a}$.
(iv) Ist V affin und $a \in V$, so entsprechen die Primideale in $\mathcal{O}_{V,a} = k[V]_{\mathcal{I}(a)}$ genau den Primidealen $\mathfrak{p}$ von $k[V]$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{I}(a)$, und damit den irreduziblen Teilvarietäten von V, die a enthalten. Damit ist $\dim(\mathcal{O}_{V,a})$ die sogenannte **lokale Dimension von a in V**, definiert als die maximale Länge einer Kette irreduzibler Teilvarietäten von V, die a enthalten.
(v) Jeder Morphismus $\phi\colon V \to W$ von Varietäten induziert Algebrahomomorphismen $\phi_a\colon \mathcal{O}_{W,\phi(a)} \to \mathcal{O}_{V,a}$ der lokalen Ringe, für jedes $a \in V$.

Definition 5.4.5. Ein Ring A heißt **lokal**, wenn er noethersch ist und genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Man nennt

$$\kappa(A) := A/\mathfrak{m}$$

den **Restklassenkörper von** A. Es gibt eine wohldefinierte Multiplikation

$$A/\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Auf diese Weise wird die abelsche Gruppe $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ zu einem Vektorraum über dem Restklassenkörper $\kappa(A)$. Wir bezeichnen den algebraischen Dualraum

$$\left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right)^\vee = \left\{\ell\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \kappa(A) \mid \ell \text{ ist } \kappa(A)\text{-linear}\right\}$$

dieses Vektorraum mit $\mathcal{T}(A)$.

Bemerkung 5.4.6. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus von lokalen Ringen, mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$. Dann induziert φ eine Einbettung der Restklassenkörper $\kappa(A) \hookrightarrow \kappa(B)$, und eine $\kappa(A)$-lineare Abbildung

$$\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2.$$

Falls $\kappa(A) = \kappa(B) = \kappa$, induziert das durch Dualität eine κ-lineare Abbildung

$$\mathcal{T}(B) \to \mathcal{T}(A).$$

Ist φ surjektiv, so gilt $\kappa(A) = \kappa(B)$, und die induzierte Abbildung $\mathcal{T}(B) \to \mathcal{T}(A)$ ist injektiv.

Definition 5.4.7. Sei V eine Varietät und $X \subseteq V$ irreduzibel. Wir nennen den $k\left(\overline{X}\right)$-Vektorraum

$$\mathcal{T}_{V,X} := \mathcal{T}\left(\mathcal{O}_{V,X}\right)$$

den **(k-)Tangentialraum an V entlang W**. Der Tangentialraum **an einem Punkt** $a \in V$ ist $\mathcal{T}_{V,a} := \mathcal{T}_{V,\{a\}}$.

Bemerkung/Beispiel 5.4.8. (i) Tangentialräume sind zunächst einfach abstrakte Vektorräume (über verschiedenen Körpern), die wir irreduziblen Teilmengen der Varietät V zuordnen. Für eine geometrische Interpretation und eine Rechtfertigung des Begriffs siehe Satz 5.4.10 und Bemerkung 5.4.11.
(ii) Sei $a \in \mathbb{A}^n$ beliebig. Dann gilt (zum Beispiel mit Aufgabe 32)

$$\kappa := \kappa\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}\right) = \operatorname{Quot}\left(k[a_1, \ldots, a_n]\right) = k(a_1, \ldots, a_n).$$

In $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$ haben wir das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} = \left\{\frac{p}{q} \mid p(a) = 0, q(a) \neq 0\right\}.$$

Wir erhalten eine $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathfrak{m} &\to \kappa^n \\ \frac{p}{q} &\mapsto q(a)^{-1} \cdot \left(\partial_{x_1} p(a), \ldots, \partial_{x_n} p(a)\right). \end{aligned}$$

Der Kern von π besteht aus denjenigen $\frac{p}{q} \in \mathfrak{m}$ mit $\partial_{x_i} p(a) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Schreiben wir $p(\underline{x} + a) = p_1 + \cdots + p_d$ mit homogenen Summanden $p_j \in \kappa[\underline{x}]$ vom Grad j, so gilt $\partial_{x_i} p(a) = \partial_{x_i} p_1(0)$. Damit besteht der Kern von π aus denjenigen $\frac{p}{q}$ mit $p(\underline{x} + a) = p_2 + \cdots + p_d$, enthält also $\mathfrak{m}^2$. Die induzierte Abbildung

$$\tilde{\pi}\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \kappa^n$$

ist dann κ-linear. Durch Dualität erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\tilde{\pi}^\vee\colon (\kappa^n)^\vee \cong \kappa^n \to \mathcal{T}_{\mathbb{A}^n,a}.$$

Sei nun $a \in k^n$ angenommen. Dann ist $\kappa = k$, π surjektiv (denn $\pi(x_i - a_i) = e_i$) und $\ker(\pi) = \mathfrak{m}^2$. Also ist $\tilde{\pi}$ und damit $\tilde{\pi}^\vee$ ein Isomorphismus, d.h.

$$\mathcal{T}_{\mathbb{A}^n,a} \cong k^n.$$

(iii) Sei $k = \mathbb{F}_2(x)$ mit x transzendent, und $a := \sqrt{x} \in \mathbb{A}^1$. Für das Minimalpolynom $p = t^2 - x \in k[t]$ von a gilt $\partial_t p = 0$, also liegt $\frac{p}{1}$ im Kern von π. Andererseits liegt $\frac{p}{1}$ aber nicht in $\mathfrak{m}^2$, wie man leicht sieht. Also ist $\tilde{\pi}$ nicht injektiv, und damit $\tilde{\pi}^\vee$ nicht surjektiv.
(iv) Sei $k = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{C}$, sowie $a = \pi$. Dann gilt $\kappa = \mathbb{Q}(\pi)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,a} = \mathbb{Q}(t)$ und damit $\mathfrak{m} = 0$ und $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^1,\pi} = 0$. Insbesondere ist $\tilde{\pi}$ nicht surjektiv und damit $\tilde{\pi}^\vee$ nicht injektiv.

Im folgenden Lemma sieht man, warum wir den Tangentialraum als *Dualraum* von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ definiert haben:

Lemma 5.4.9. *Sei $\phi\colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten und $a \in V(k)$. Dann induziert ϕ eine k-lineare Abbildung $\mathcal{T}_{V,a} \to \mathcal{T}_{W,\phi(a)}$.*

Beweis. ϕ induziert einen k-Algebrahomomorphismus der lokalen Ringe

$$\mathcal{O}_{W,\phi(a)} \to \mathcal{O}_{V,a},$$

der sich wie in Bemerkung 5.4.6 mit den maximalen Idealen verträgt. Nach Bemerkung 4.3.15 (i) ist $\phi(a) \in W(k)$, also sind beide Restklassenkörper gleich k. Die Aussage folgt also aus Bemerkung 5.4.6. □

Satz 5.4.10. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen und $a \in V(k)$. Dann ist die von der Einbettung $V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ induzierte k-lineare Abbildung*

$$\mathcal{T}_{V,a} \to \mathcal{T}_{\mathbb{A}^n,a} \cong k^n$$

injektiv, und ihr Bild hat die folgende Beschreibung:

$$\left\{ u \in k^n \mid \sum_{i=1}^n u_i \cdot \partial_{x_i} p(a) = 0 \,\forall p \in \mathcal{I}(V) \right\}.$$

Beweis. Die von der Einbettung induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a} \to \mathcal{O}_{V,a}$ ist surjektiv, denn jede reguläre Funktion auf einer offenen Teilmenge von V lässt sich lokal auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ ausdehnen. Damit ist die induzierte Abbildung $\mathcal{T}_{V,a} \to \mathcal{T}_{\mathbb{A}^n,a}$ injektiv, nach Bemerkung 5.4.6.
Seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die maximalen Ideale in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}$ bzw. $\mathcal{O}_{V,a}$. Die von der Einbettung induzierte Abbildung

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$$

hat genau den Kern

$$\left\{\left[\frac{p}{q}\right] \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \mid p,q \in k[\underline{x}], q(a) \neq 0, p \in \mathfrak{m}_a^2 + \mathcal{I}(V)\right\}.$$

Nach Dualität und unter der in 5.4.8 (ii) beschriebenen Isomorphie $\mathcal{T}_{\mathbb{A}^n,a} \cong k^n$ erhalten wir das Bild

$$\left\{u \in k^n \mid \sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} p(a) = 0 \,\forall p \in \mathfrak{m}_a^2 + \mathcal{I}(V)\right\}.$$

Für Elemente $p \in \mathfrak{m}_a^2$ gilt aber $\partial_{x_i} p(a) = 0$ für alle i, und das beweist die Aussage. □

Bemerkung 5.4.11. (i) Die Bildmenge in Satz 5.4.10 hat auch folgende alternative Beschreibung, die den Begriff *Tangentialraum* endgültig rechtfertigt. Sei $p \in k[\underline{x}]$ und $a \in k^n$ mit $p(a) = 0$. Schreibe $q(\underline{x}) := p(\underline{x} + a) = q_1 + \cdots + q_d$ als Summe seiner homogener Bestandteile. Dann gilt

$$\partial_{x_i} p(a) = \partial_{x_i} q(0) = \partial_{x_i} q_1(0)$$

und somit

$$\sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} p(a) = q_1(u).$$

Wegen

$$p(a+tu) = q_1(u)t + q_2(u)t^2 + \cdots + q_d(u)t^d$$

besteht das Bild in Satz 5.4.10 also genau aus den Richtungen $u \in k^n$, für die p, eingeschränkt auf die Gerade $a + tu$, eine mindestens doppelte Nullstelle bei $t = 0$ hat (und das für alle $p \in \mathcal{I}(V)$). Wir betrachten also alle Geraden, die alle auf V geltenden Gleichungen im Punkt a nur berühren, aber nicht schneiden.
(ii) Beachte, dass für $\mathcal{I}(V) = (p_1, \ldots, p_r)$ und $a \in V$ die Bedingung

$$\sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} p(a) = 0 \,\forall p \in \mathcal{I}(V)$$

äquivalent ist zu

$$\sum_{i=1}^n u_i \partial_{x_i} p_j(a) = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, r.$$

Denn es gilt $\partial_{x_i}(qp_j)(a) = \underbrace{p_j(a)}_{=0} \partial_{x_i} q(a) + q(a)\partial_{x_i} p_j(a) = q(a)\partial_{x_i} p_j(a)$.

Beispiel 5.4.12. (i) Sei $V = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, mit p quadratfrei. Für jedes $a \in V(k)$ besteht der Tangentialraum also aus denjenigen $u \in k^n$, die senkrecht zum Gradienten $\nabla p(a)$ von p am Punkt a stehen.
(ii) Sei $V = \mathcal{V}(p) \subseteq \mathbb{A}^2$ mit $p = x_1 x_2$, und sei $a = (1,0)$. Es gilt $\nabla p(a) = (0,1)$. Also gilt

$$\mathcal{T}_{V,a} = \{(u,0) \mid u \in k\} \subseteq k^2.$$

Sei andererseits $a = (0,0)$. Dann gilt $\nabla p(a) = (0,0)$ und somit

$$\mathcal{T}_{V,a} = k^2.$$

Dasselbe Phänomen findet man für die Schleifenkurve $\mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$ oder die spitze Kurve $\mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3)$ am Punkt $a = (0,0)$. Hier sind die Varietäten sogar irreduzibel.
(iii) Es reicht im Allgemeinen nicht, die Bedingung $u \perp \nabla p(a)$ nur für definierende Gleichungen von V zu stellen. Zum Beispiel ist $\mathcal{V}(x_1^2) = \mathcal{V}(x_1) \subseteq \mathbb{A}^2$, und $\nabla x_1^2(0,0) = (0,0)$, wohingegen $\nabla x_1(0,0) = (1,0)$.

Definition 5.4.13. (i) Sei A ein lokaler Ring. Dann heißt A **regulär**, wenn

$$\dim_\kappa \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \dim(A)$$

gilt.
(ii) Sei V eine k-Varietät und $a \in V$. Dann heißt a **regulärer Punkt von** V, falls $\mathcal{O}_{V,a}$ ein regulärer lokaler Ring ist. Andernfalls heißt a **singulärer Punkt von** V.

Bemerkung 5.4.14. Sei V affin, $a \in V(k)$, $A = \mathcal{O}_{V,a}$ der lokale Ring von a und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal.
(i) Es ist $\mathcal{T}_{V,a}$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Insbesondere ist

$$\dim_k \left(\mathcal{T}_{V,a}\right) = \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right).$$

(ii) Regularität bedeutet, dass $\dim_k \left(\mathcal{T}_{V,a}\right)$ genau mit der lokalen Dimension von a in V übereinstimmt (siehe Bemerkung 5.4.4 (iv)).

Beispiel 5.4.15. Der Punkt $(0,0)$ ist kein regulärer Punkt der Schleifenkurve $V = \mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$. Alle anderen k-rationalen Punkte sind regulär. Denn an jedem Punkt ist die lokale Dimension gleich der globalen Dimension gleich 1.

Kapitel 6

Garbentheorie und Schemata

In diesem Kapitel wollen wir eine kurze Einführung in die Konzepte der modernen algebraischen Geometrie, sprich der Schematheorie, geben. Dafür befassen wir uns zunächst mit dem sehr allgemeinen Begriff einer Garbe, der in vielen Bereichen der Mathematik auftritt. Wir haben implizit in den früheren Abschnitten schon viel damit gearbeitet.

6.1 Garben

Definition 6.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine **Ring-Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf X besteht aus den folgenden Daten:

- Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ein Ring $\mathcal{F}(U)$, wobei $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ gelte.
- Für je zwei offene Teilmengen $U \subseteq V$ ein Ringhomomorphismus

  $$r_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U),$$

  genannt die **Restriktion von** V **auf** U. Dabei gelte für drei offene Mengen $U \subseteq V \subseteq W$ stets

  $$r_{V,U} \circ r_{W,V} = r_{W,U}$$

  sowie $r_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

Bemerkung 6.1.2. (i) Offensichtlich kann man eine **Gruppen-, Vektorraum, Mengen-, etc.-**Prägarbe ganz analog definieren, wenn man den Begriff Ring und Ringhomomorphismus jeweils entsprechend ersetzt.

(ii) Noch etwas allgemeiner formuliert man das so: Der topologische Raum X kann als eigene Kategorie $\mathcal{X}$ aufgefasst werden. Dabei sind die Objekte gerade die offenen Teilmengen, und die Morphismen sind die Inklusionen. Für eine beliebige weitere Kategorie $\mathcal{K}$ ist eine **Prägarbe mit Werten in** $\mathcal{K}$ (oder eine $\mathcal{K}$**-Prägarbe**) dann einfach ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{K}$. Wir wollen uns im folgenden aber immer auf Ringe beschränken.

Beispiel 6.1.3. (i) Sei V eine k-Varietät, und für jede offene Menge $U \subseteq V$ sei $\mathcal{O}(U)$ der Ring der regulären Funktionen auf U. Mit der Restriktion von Funktionen auf kleinere Definitionsmengen erhalten wir eine Ring-Prägarbe $\mathcal{O}$ (genauer sogar eine k-Algebra-Prägarbe) auf V, genannt die **Prägarbe der regulären Funktionen**.
(ii) Seien X, W topologische Räume. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{C}(U, W)$ die Menge aller stetigen Funktionen von U nach W (je nach weiterer Struktur von W kann das z.B. auch ein Ring sein). Wiederum mit der Restriktion von Funktionen auf kleinere Definitionsbereiche erhalten wir eine Prägarbe $\mathcal{C}$ auf X, genannt die **Prägarbe der stetigen Funktionen mit Werten in** W. So ähnlich kann man Prägarben von differenzierbaren- oder holomorphen Funktionen definieren.
(iii) Sei $X = \{0, 1\}$ versehen mit der feinstmöglichen Topologie. Der Verband der offenen Mengen sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur, hook] & & \{1\} \arrow[ul, hook'] \\
 & \emptyset \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] \arrow[uu, hook] &
\end{tikzcd}.$$

Eine Prägarbe auf X besteht also aus einem kommutativen Diagramm von Ringen des folgenden Typs

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
B \arrow[dr] & & C \arrow[dl] \\
 & \{0\} &
\end{tikzcd}.$$

(iv) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, und $U \subseteq X$ offen. Jede offene Teilmenge von U ist eine offene Teilmenge von X, und somit kann man $\mathcal{F}$ einfach auf U einschränken. Die so entstehende Prägarbe auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{|U}$.

Um die Lokalität der Bedingung an die verwendeten Funktionsklassen in Beispiel 6.1.3 (i) und (ii) axiomatisch zu erfassen, definiert man nun den Begriff einer Garbe.

Definition 6.1.4. Sei X ein topologischer Raum. Eine **Garbe** auf X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, die zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:
Für jedes offene $U \subseteq X$, jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ und jede Auswahl von Elementen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit

$$r_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j)$$

für alle $i, j \in I$, gibt es *genau ein* $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$r_{U,U_i}(s) = s_i$$

für alle $i \in I$.

Bemerkung/Beispiel 6.1.5. (i) Denkt man sich jedes $\mathcal{F}(U)$ wirklich als Menge von auf U definierten Funktionen, so sagt die Garbeneigenschaft, dass die Bedingung an die betrachteten Funktionen *lokal* ist. Für vorgegebene Funktionen s_i auf U_i, die auf allen paarweisen Schnitten übereinstimmen, gibt es natürlich immer genau eine global auf U definierte Funktion s, die alle s_i fortsetzt. Dieses s muss aber nun automatisch die in $\mathcal{F}$ geforderten Bedingungen erfüllen.
(ii) Die in Beispiel 6.1.3 (i) und (ii) betrachteten Prägarben $\mathcal{O}$ und $\mathcal{C}$ der regulären bzw. stetigen Funktionen sind sogar Garben. Regulärität und Stetigkeit sind lokale Bedingungen.
(iii) Die in Beispiel 6.1.3 (iii) betrachtete Prägarbe ist nicht notwendigerweise eine Garbe. Die Bedingung ist hier, dass jedes Paar von Elementen $b \in B, c \in C$ genau ein gemeinsames Urbild in A hat.
(iv) Die Einschränkung $\mathcal{F}_{|U}$ einer Garbe $\mathcal{F}$ auf eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist offensichtlich wieder eine Garbe.

Definition 6.1.6. Seien $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ topologische Räume mit (Prä-)Garben. Ein **Morphismus von (Prä-)Garben** besteht aus den folgenden Daten:

- Eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$.

- Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ ein Ringhomomorphismus

$$f_U^*\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

so dass für $U \subseteq V \subseteq Y$ das folgende Diagramm stets kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[r, "f_V^*"] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[d, "r_{f^{-1}(V),f^{-1}(U)}"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "f_U^*"'] & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \end{tikzcd}$$

Wir schreiben oft auch einfach f^* statt f_U^*, und bezeichnen den gesamten Homomomorphismus mit (f, f^*).

Bemerkung/Beispiel 6.1.7. (i) Morphismen von (Prä-)Garben kann man auf die offensichtliche Weise hintereinander ausführen. Ebenso ist die Identität ein offensichtlicher Morphismus. Deshalb erhalten wir auch einen kanonischen Begriff von **(Prä-)Garbenisomorphismus**, als Morphismus mit beidseitigem Inversen. Es ist (f, f^*) genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus und alle f_U^* Isomorphismen der jeweiligen Ringe sind.
(ii) Die Abbildung f_U^* nennt man auch die **Zurückziehung** von Elementen aus $\mathcal{G}(U)$ nach $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben von Funktionen, handelt es sich dabei oft wirklich um die Zurückziehung durch Komposition mit f. Man benötigt dabei dann die Bedingung, dass alle Zurückziehungen von Funktionen aus $\mathcal{G}$ die in $\mathcal{F}$ spezifierte Bedingung erfüllen.
(iii) Sind V, W k-Varietäten, versehen mit der Garbe der regulären Funktionen, so sind die früher definierten Morphismen gerade Morphismen im Sinne der Garbentheorie.
(iv) Sind X, Y topologische Räume mit der Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in W, dann erhält man für jede stetige Funktion $f\colon X \to Y$ einen Morphismus, indem man f^* als Zurückziehung mittels f definiert.

Um das lokale Verhalten einer (Prä-)Garbe an einem Punkt zu erfassen, definiert man den Begriff eines *Halms* (der genau mit dem Begriff *lokaler Ring an einem Punkt* aus Abschnitt 5.4 übereinstimmt). Sei dazu $(X, \mathcal{F})$ eine (Prä-)Garbe und $x \in X$. Auf der Menge

$$\mathcal{M} := \{(U, s) \mid x \in U, U \subseteq X \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

definiert man folgende Äquivalenzrelation:

$$(U, s) \sim (V, t) \ :\Leftrightarrow\ \exists W \subseteq U \cap V \text{ offen}, x \in W, \text{ mit } r_{U,W}(s) = r_{V,W}(t).$$

Im Fall einer Garbe von Funktionen bedeutet das: zwei auf Umgebungen von x definierte Funktionen sind äquivalent, wenn sie auf einer kleinen offenen Umgebung von x übereinstimmen. Die Menge

$$\mathcal{F}_x := \mathcal{M}/\sim = \{[(U, s)] \mid (U, s) \in \mathcal{M}\}$$

der Äquivalenzklassen trägt nun eine kanonische Ringstruktur:

$$[(U, s)] \dotplus [(V, t)] := [(U \cap V, r_{U,U\cap V}(s) \dotplus r_{V,U\cap V}(t))].$$

Etwas abstrakter formuliert ist $\mathcal{F}_x$ gerade der *direkte Limes* des gerichteten Systems der Ringe $\mathcal{F}(U)$ mit Restriktionsabbildungen, wobei U alle offenen Umgebungen von x durchläuft.

Definition 6.1.8. Der Ring $\mathcal{F}_x$ heißt **Halm der (Prä-)Garbe $\mathcal{F}$ am Punkt** x.

Bemerkung 6.1.9. (i) Für offenes $U \subseteq X$ mit $x \in U$ gibt es den kanonischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}_x \\ s &\mapsto [(U, s)]. \end{aligned}$$

(ii) Ist $\varphi = (f, f^*)\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ ein Garbenmorphismus, so induziert er für jedes $x \in X$ einen kanonischen Morphismus der Halme

$$\begin{aligned} \varphi_x\colon \mathcal{G}_{f(x)} &\to \mathcal{F}_x \\ [(U, s)] &\mapsto [(f^{-1}(U), f^*(s))]. \end{aligned}$$

Satz 6.1.10. *Sei $\varphi = (f, f^*)\colon (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ ein Morphismus von Garben, wobei f ein Homöomorphismus der topologischen Räume sei. Dann ist φ genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $x \in X$ die induzierten Morphismen φ_x der Halme Isomorphismen sind.*

Beweis. Ist φ ein Isomorphismus, so sind alle φ_x offensichtlich ebenfalls Isomorphismen, denn der Umkehrmorphismus von φ induziert die Umkehrmorphismen der φ_x.

Seien also umgekehrt alle φ_x Isomorphismen. Da f ein Homöomorphismus ist, können wir nach Umbenennung der Elemente $X = Y$ und $f = \mathrm{id}$ annehmen. Wir müssen nun zeigen, dass für jedes offene $U \subseteq X$ die Abbildung

$$f^*\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

ein Ringisomorphismus ist. Dafür zeigen wir die Bijektivität. Sei also zunächst $s \in \mathcal{G}(U)$ mit $f^*(s) = 0$. Dann ist für jedes $x \in U$ auch das Bild von $f^*(s)$ in $\mathcal{F}_x$ Null, und aufgrund der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{G}_x \arrow[r, "\varphi_x"'] & \mathcal{F}_x
\end{tikzcd}$$

und der Injektivität von φ_x folgt, dass das Bild von s in $\mathcal{G}_x$ ebenfalls immer Null ist. Das bedeutet, dass jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ besitzt, mit $r_{U,U_x}(s) = 0$. Diese Mengen U_x liefern eine offene Überdeckung von U, und aus der Eindeutigkeitsbedingung im Garbenaxiom für $\mathcal{G}$ folgt direkt $s = 0$.
Für die Surjektivität von f^* sei $t \in \mathcal{F}(U)$ gegeben. Wir bilden t nach $\mathcal{F}_x$ ab und verwenden die Surjektivität von φ_x: es gibt ein $s_x \in \mathcal{G}_x$ mit

$$\varphi_x(s_x) = t \in \mathcal{F}_x.$$

Es wird s_x repräsentiert von einem Element $\tilde{s}_x \in \mathcal{G}(U_x)$, wobei $U_x \subseteq U$ eine offene Umgebung von x ist. Dann sind $f^*(\tilde{s}_x)$ und $r_{U,U_x}(t)$ zwei Elemente von $\mathcal{F}(U_x)$, die in $\mathcal{F}_x$ dasselbe Element repräsentieren. Wir können also o.B.d.A ihre Gleichheit annehmen (nach eventueller Verkleinerung von U_x):

$$f^*(\tilde{s}_x) = r_{U,U_x}(t).$$

Für $x, y \in U$ haben wir nun also $\tilde{s}_x \in \mathcal{G}(U_x)$ und $\tilde{s}_y \in \mathcal{G}(U_y)$, und nach Restriktion auf $U_x \cap U_y$ werden beide Elemente mittels f^* auf dasselbe abgebildet, nämlich die Einschränkung von t. Aus der bereits bewiesenen Injektivität von f^* (auf allen U) folgt also

$$r_{U_x,U_x \cap U_x}(\tilde{s}_x) = r_{U_y,U_x \cap U_y}(\tilde{s}_y).$$

Da die U_x die Menge U offen überdecken, gibt es laut Garbenaxiom für $\mathcal{G}$ ein $s \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_{U,U_x}(s) = \tilde{s}_x$ für alle $x \in U$. Es gilt nun $f^*(s) = t$. Dafür genügt es aufgrund des Garbenaxioms an $\mathcal{F}$, die Gleichheit nach Restriktion auf alle Mengen U_x zu zeigen. Es gilt aber

$$r_{U,U_x}(t) = f^*(\tilde{s}_x) = f^*(r_{U,U_x}(s)) = r_{U,U_x}(f^*(s)).$$

Das beweist die Behauptung. □

Bemerkung 6.1.11. (i) Der Beweis von Satz 6.1.10 zeigt, dass die Injektivität aller φ_x die Injektivität aller f^* induziert. Für die Surjektivität der f^* haben wir aber außer der Surjektivität der φ_x auch noch die Injektivität von f^* verwendet. Im Allgemeinen impliziert die Surjektivität aller φ_x auch *nicht* die Surjektivität aller f^*.
(ii) Ohne genauer ins Detail zu gehen impliziert die Bemerkung aus (i), dass der Funktor $(X, \mathcal{F}) \mapsto \mathcal{F}(X)$ kein *exakter* Funktor ist. Man kann *Garbenkohomologie* deshalb als abgeleitete Funktorenfolge dieses Funktors definieren.

Man kann eine Prägarbe immer eindeutig zu einer Garbe erweitern:

Satz 6.1.12. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Dann gibt es eine Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X, sowie einen Morphismus $\iota = (\mathrm{id}, f^*)\colon (X, \mathcal{F}^+) \to (X, \mathcal{F})$, mit der folgenden universellen Eigenschaft:*
Jeder Morphismus $\varphi\colon (Y, \mathcal{G}) \to (X, \mathcal{F})$ von einer Garbe nach $(X, \mathcal{F})$ faktorisiert eindeutig durch ι:

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{G}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\exists!"'] & (X,\mathcal{F}) \\
& (X,\mathcal{F}^+) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Dadurch ist $\mathcal{F}^+$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt. Man nennt $\mathcal{F}^+$ die **Garbifizierung von** *$\mathcal{F}$.*

Beweis. Für $U \subseteq X$ offen definieren wir $\mathcal{F}^+(U)$ als die Menge aller Abbildungen

$$s\colon U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(1) $s(x) \in \mathcal{F}_x$ für alle $x \in U$.

(2) Für alle $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ von x, und ein $t \in \mathcal{F}(U_x)$ mit
$$s(y) = t \text{ in } \mathcal{F}_y \text{ für alle } y \in U_x.$$

Wir betrachten also die *lokal konstanten* Abbildungen in die disjunkte Vereinigung der Halme über U. Offensichtlich trägt $\mathcal{F}^+(U)$ mit punktweise definierten Verknüpfungen eine Ringstruktur, und wir erhalten mit der wirklichen Restriktion auf kleiner Definitionsmengen eine Prägarbe. Aufgrund der Lokalität der Bedingung (2) ist $\mathcal{F}^+$ aber sogar eine Garbe auf X.
Die Abbildungen $f^*\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ sind die offensichtlichen: jedes $t \in \mathcal{F}(U)$ definiert eine auf ganz U konstant durch t gegebene Funktion s. Der Beweis der universellen Eigenschaft ist Aufgabe 34. $\square$

Bemerkung 6.1.13. Der Konstruktion von $\mathcal{F}^+$ sieht man direkt an, dass der Morphismus ι Isomorphismen aller Halme induziert:

$$\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+ \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere kann Satz 6.1.10 ohne die Garbenbedingung nicht stimmen.

6.2 Schemata

Wir wollen nun zu jedem kommutativen Ring A einen topologischen Raum mit Ringgarbe konstruieren. Die Konstruktion ist eng an die der regulären Funktionen auf Varietäten angelehnt. Allerdings lassen wir beliebige Ringe zu, und nicht nur endlich erzeugte reduzierte Algebren über Körpern, wie in der bisherigen Geometrie. Das erlaubt uns später, geometrische Methoden auch auf Fragen etwa der Zahlentheorie anzuwenden.

Definition 6.2.1. Sei A ein Ring. Die Menge

$$\operatorname{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$$

heißt **Spektrum von** A.

Sei $I \subseteq A$ eine beliebige Menge. Wir setzen

$$\mathcal{V}(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\},$$

und nennen die Menge *die von I definierte Varietät*. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}((I)) = \mathcal{V}\left(\sqrt{(I)}\right),$$

und wir können also immer I als Radikalideal annehmen. Ebenso offensichtlich gilt
$$\mathcal{V}(1) = \emptyset \text{ und } \mathcal{V}(0) = \operatorname{Spec}(A)$$
sowie
$$\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(IJ)$$
und
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$$
für Ideale I, J, I_λ.

Definition 6.2.2. Die **Zariskitopologie** auf $\operatorname{Spec}(A)$ hat die Mengen $\mathcal{V}(I)$ als abgeschlossene Mengen.

Beispiel 6.2.3. (i) Sei k ein Körper. Dann hat $\operatorname{Spec}(k) = \{(0)\}$ nur einen Punkt, und die Topologie ist deshalb klar.
(ii) Es gilt $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$. Für $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ ist
$$\mathcal{V}(n) = \{(p_1), \ldots, (p_r)\}\,.$$
Aus $(0) \in \mathcal{V}(I)$ folgt $\mathcal{V}(I) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, der einzelne Punkt (0) liegt also dicht.
(iii) Sei k ein Körper und $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann entsprechen die Punkte von $\operatorname{Spec}(A)$ genau den irreduziblen k-Varietäten in $\mathbb{A}^n$, nach Korollar 1.3.16. Für $I \subseteq A$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gilt dann
$$\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I) \;\Leftrightarrow\; I \subseteq \mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; \text{ in } \mathbb{A}^n \text{ gilt } \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathcal{V}(I).$$
Die abgeschlossene Menge $\mathcal{V}(I)$ in $\operatorname{Spec}(A)$ enthält als Punkte also alle irreduziblen Teilmengen der geometrischen Varietät $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$.
Setzen wir k als *algebraisch abgeschlossen* voraus, so sind die Punkte von $\mathbb{A}^n$ gerade die minimalen nichtleeren k-Untervarietäten, und die entsprechen genau den maximalen Idealen von A:
$$\mathbb{A}^n \leftrightarrow \operatorname{MaxSpec}(k[\underline{x}]).$$
Für $a \in \mathbb{A}^n$, $\mathfrak{m}_a := (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ und $I \subseteq k[\underline{x}]$ gilt dann
$$\mathfrak{m}_a \in \mathcal{V}(I) \Leftrightarrow a \in \mathcal{V}(I).$$

Dabei ist rechts die geometrische Varietät in $\mathbb{A}^n$, und links die Varietät im Spektrum gemeint. Eingeschränkt auf $\mathrm{MaxSpec}(k[\underline{x}])$ ist die Zariskitopologie also gerade die bereits bekannte k-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^n$.
Falls k *nicht* algebraisch abgeschlossen ist, finden wir die Punkte von $\mathbb{A}^n$ nicht unbedingt einzeln in $\mathrm{MaxSpec}(k[\underline{x}])$ wieder. Für $k = \mathbb{R}$ entspricht das maximale Ideal $(t^2+1) \in \mathrm{MaxSpec}(\mathbb{R}[t])$ der minimalen Varietät $\{i, -i\} \subseteq \mathbb{A}^1$, und $i, -i$ haben einzeln keine Korrelate in $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[t])$. Andererseits sind $i, -i$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^1$ sowieso ununterscheidbar. In dieser Sichtweise ist $\mathrm{MaxSpec}(\mathbb{R}[t])$ eigentlich das viel geeignetere Objekt als $\mathbb{A}^1$. Die doppelte geometrische Vielfachheit von $\mathfrak{m} = (t^2+1)$ ist immer noch erhalten in der Tatsache, dass

$$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}[t]/\mathfrak{m}) = 2$$

gilt

(iv) Für eine k-Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$ gelten die in (iii) getroffenen Aussagen völlig analog mit $A = k[V]$.
(v) Für $A = k[t]/(t^2)$ erhalten wir $\mathrm{Spec}(A) = \{(t)\}$. Allgemeiner noch gibt es für jeden Ring A eine kanonische Bijektion zwischen $\mathrm{Spec}(A)$ und $\mathrm{Spec}(A/\mathrm{Nil}(A))$, und hier gilt $A/\mathrm{Nil}(A) = k$. Als topologische Räume sind $\mathrm{Spec}(k[t]/(t^2))$ und $\mathrm{Spec}(k)$ also homöomorph.
(vi) Sei $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dann gilt $\mathrm{Spec}\, A = \{(2), (3)\}$, und alle Teilmengen sind offen. Wir erhalten also gerade den topologischen Raum X aus Beispiel 6.1.3 (iii).

Bemerkung 6.2.4. (i) Die einelementige Menge $\{\mathfrak{p}\} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist. Für den Abschluss gilt nämlich

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\} = \mathcal{V}(\mathfrak{p}).$$

Insbesondere ist $\mathrm{Spec}(A)$ in den seltensten Fällen hausdorffsch.
(ii) Ist A noethersch, so ist $\mathrm{Spec}(A)$ ebenfalls noethersch. Aus

$$\mathcal{V}(I_1) \supseteq \mathcal{V}(I_2) \supseteq \cdots$$

folgt mit Satz 1.1.4

$$\sqrt{I_1} \subseteq \sqrt{I_2} \subseteq \cdots$$

und diese Kette wird stationär. Wegen $\mathcal{V}(I_i) = \mathcal{V}(\sqrt{I_i})$ wird auch die ursprüngliche Kette stationär.
(iii) Für $a \in A$ setzen wir

$$\mathcal{D}(a) := \mathcal{V}(a)^c = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid a \notin \mathfrak{p}\}.$$

Wegen

$$\mathcal{V}(I)^c = \bigcup_{a\in I} \mathcal{D}(a)$$

bilden diese Mengen also eine Basis offener Mengen der Zariskitopologie auf $\mathrm{Spec}(A)$.
(iv) Alle Mengen $\mathcal{D}(a)$ (und damit auch $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{D}(1)$) sind quasikompakt. Aus

$$\mathcal{V}(a) \supseteq \bigcap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}\left(\sum_\lambda I_\lambda\right)$$

folgt nämlich mit Satz 1.1.4

$$a \in \sqrt{\sum_\lambda I_\lambda}.$$

Also liegt a bereits im Radikal einer endlichen Teilsumme der I_λ, und damit ist der Durchschnitt dieser endlich vielen $\mathcal{V}(I_\lambda)$ bereits in $\mathcal{V}(a)$ enhalten.
(v) Für einen Ring A sind äquivalent (Aufgabe 35):

- $\mathrm{Spec}(A)$ ist ein irreduzibler topologischer Raum.
- A besitzt ein kleinstes Primideal.
- $\mathrm{Spec}(A)$ besitzt einen dichten Punkt.

(vi) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi^*\colon \mathrm{Spec}(B) &\to \mathrm{Spec}(A)\\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\end{aligned}$$

und wegen

$$(\varphi^*)^{-1}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{V}(\varphi(I))$$

ist diese stetig bezüglich der Zariskitopologien.

Nachdem wir $\mathrm{Spec}(A)$ nun als topologischen Raum konstruiert haben, versehen wir ihn mit einer Ringgarbe $\mathcal{O}$. Sei also $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen. Wir definieren $\mathcal{O}(U)$ als die Menge aller Abbildungen

$$s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$

welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(1) $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in U$.

(2) Für jedes $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine offene Umgebung $U_\mathfrak{p} \subseteq U$ von $\mathfrak{p}$, und $a, b \in A$ mit
$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \in A_\mathfrak{q}$$
für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ (insbesondere soll $b \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ gelten).

Obwohl $\bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ kein Ring ist, bilden die betrachteten Funktionen s doch einen Ring. Es gilt ja stets $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$, und also kann man die Funktionen punktweise verknüpfen. Offensichtlich bleiben Eigenschaften (1) und (2) dabei erhalten. Für $U \subseteq V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen sei
$$r_{V,U} \colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$$
die wirkliche Restriktion der Funktionen auf den kleineren Definitionsbereich U, ein wohldefinierter Ringhomomorphismus. Auf diese Weise erhalten wir eine Prägarbe auf $\mathrm{Spec}(A)$. Aufgrund der Lokalität der Eigenschaft (2) ist es sogar eine Garbe.

Definition 6.2.5. Die Garbe $\mathcal{O}$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ heißt **Garbe der regulären Funktionen**.

Satz 6.2.6. *Sei A ein Ring und $\mathcal{O}$ die Garbe der regulären Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$.*

(i) Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ gilt $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$.

(ii) Für $a \in A$ gilt $\mathcal{O}(\mathcal{D}(a)) \cong A_a$, und insbesondere $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$.

Beweis. (i): Wir betrachten den Morphismus $\varphi\colon \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$, der eine lokal um $\mathfrak{p}$ definierte Funktion s am Punkt $\mathfrak{p}$ auswertet: $\varphi(s) := s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$. Dann ist φ offensichtlich surjektiv, denn jedes Element $\frac{a}{b} \in A_\mathfrak{p}$ definiert auf der offenen Umgebung $\mathcal{D}(b)$ von $\mathfrak{p}$ die Funktion $s(\mathfrak{q}) := \frac{a}{b} \in A_\mathfrak{q}$, die offensichtlich zu $\mathcal{O}(\mathcal{D}(b))$ gehört. Ihr Bild im Halm $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ wird unter φ auf $\frac{a}{b}$ abgebildet.
Für die Injektivität seien s, t zwei lokal um $\mathfrak{p}$ definierte Funktionen mit $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ in $A_\mathfrak{p}$. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass s und t beide auf derselben offenen Umgebung U von $\mathfrak{p}$ jeweils durch die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ definiert sind. Es gibt nun ein $e \notin \mathfrak{p}$ mit $e(ad - bc) = 0$ in A. Für alle $\mathfrak{q}$ mit $e \notin \mathfrak{q}$ gilt dann aber auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ in $A_\mathfrak{q}$, d.h. s und t stimmen auf der offenen Umgebung $U \cap \mathcal{D}(e)$ von $\mathfrak{p}$ überein und definieren im Halm $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ also dasselbe Element.

(ii) Jedes Element $\frac{b}{a^n} \in A_a$ definiert eine kanonische Funktion $s \in \mathcal{O}(\mathcal{D}(a))$ durch die Vorschrift

$$s(\mathfrak{p}) := \frac{b}{a^n} \in A_{\mathfrak{p}}.$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Homomorphismus

$$\psi\colon A_a \to \mathcal{O}(\mathcal{D}(a)).$$

Um die Injektivität von ψ zu zeigen nehmen wir an, dass

$$\frac{b}{a^n} = \frac{c}{a^m} \in A_{\mathfrak{p}}$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}(a)$ gelte. Es gibt also $d_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$ mit $d_{\mathfrak{p}}(ba^m - a^n c) = 0$ in A. Die Menge

$$I := \{d \in A \mid d(ba^m - a^n c) = 0\}$$

ist ein Ideal in A, das also in keinem $\mathfrak{p}$ aus $\mathcal{D}(a)$ enthalten ist. Jedes Primideal über I enthält also a, d.h. $a \in \sqrt{I}$. Also gilt $a^l(ba^m - a^n c) = 0$ in A für ein $l \geq 0$, und also $\frac{b}{a^n} = \frac{c}{a^m}$ in A_a.
Für die Surjektivität von ψ sei $s \in \mathcal{O}(\mathcal{D}(a))$ gegeben. Lokal, und deshalb auf einer Teilmenge der Gestalt $\mathcal{D}(b)$ ist s durch einen Bruch $\frac{c}{d}$ gegeben, mit $\mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(d)$. Wegen $\mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(d) = \mathcal{D}(bd)$ und $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$ können wir also $\mathcal{D}(a)$ überdecken durch Teilmengen $\mathcal{D}(a_i)$, auf denen s jeweils durch $\frac{b_i}{a_i}$ dargestellt ist. Mit Bemerkung 6.2.4 (v) können wir also

$$\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(a_1) \cup \ldots \cup \mathcal{D}(a_r)$$

mit $s = \frac{b_i}{a_i}$ auf $\mathcal{D}(a_i)$ annehmen. Auf $\mathcal{D}(a_i) \cap \mathcal{D}(a_j) = \mathcal{D}(a_i a_j)$ wird s also sowohl durch $\frac{b_i}{a_i}$ als auch durch $\frac{b_j}{a_j}$ repräsentiert, und aus der bereits bewiesenen Injektivität (angewandt auf die Menge $\mathcal{D}(a_i a_j)$) folgt $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j}$ in $A_{a_i a_j}$. Wir erhalten also eine Identität

$$(a_i a_j)^n (b_i a_j - a_i b_j) = 0$$

in A. Hier sind nur endlich viele i, j im Spiel, also können wir immer dasselbe n verwenden. Umgeschrieben erhalten wir

$$a_j^{n+1}(a_i^n b_i) - a_i^{n+1}(a_j^n b_j) = 0.$$

Wegen

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{a_i^n b_i}{a_i^{n+1}}$$

können wir also o.B.d.A. annehmen, dass $a_i b_j = a_j b_i$ für alle i, j gilt.
Da $\mathcal{D}(a)$ durch die $\mathcal{D}(a_i)$ überdeckt wird, gilt wie früher $a \in \sqrt{(a_1, \ldots, a_r)}$, also

$$a^m = \sum_{j=1}^{r} c_j a_j.$$

Wir setzen $b := \sum_{j=1}^{r} c_j b_j$. Für jedes i gilt dann

$$a_i b = \sum_{j=1}^{r} c_j a_i b_j = \sum_{j=1}^{r} c_j a_j b_i = b_i a^m,$$

und also

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{b}{a^m} \quad \text{in } A_{\mathfrak{p}}$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}(a_i)$. Das zeigt $s = \psi\left(\frac{b}{a^m}\right)$. □

Beispiel 6.2.7. (i) Sei k ein Körper. Der Verband der offenen Mengen von $\operatorname{Spec}(k)$ sowie die Ringgarbe sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd} \{(0)\} \arrow[d, dash] & & k \arrow[d] \\ \emptyset & & (0) \end{tikzcd}$$

(ii) Sei $A = k[t]/(t^2)$. Wir erhalten folgende Garbe

$$\begin{tikzcd} \{(t)\} \arrow[d, dash] & & k[t]/(t^2) \arrow[d] \\ \emptyset & & (0) \end{tikzcd}$$

Es sind also $\operatorname{Spec}(k)$ und $\operatorname{Spec}\left(k[t]/(t^2)\right)$ zwar als topologische Räume homöomorph, nicht jedoch isomorph im garbentheoretischen Sinn.
(iii) Sei $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Wir erhalten den folgenden Verband der offenen Mengen:

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec}(A) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathcal{D}(3) = \{(2)\} \arrow[dr, dash] & & \{(3)\} = \mathcal{D}(2) \arrow[dl, dash] \\ & \emptyset & \end{tikzcd}.$$

Nach Satz 6.2.6 gilt $\mathcal{O}(\mathcal{D}(3)) = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und analog $\mathcal{O}(\mathcal{D}(2)) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wir erhalten also folgende Garbe:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & \{0\} & \end{tikzcd} .$$

Die Tatsache, dass es sich dabei um eine Garbe handelt, entspricht gerade der Aussage des chinesischen Restsatzes. Hier sehen wir, dass man zahlentheoretische Aussagen durchaus mit geometrischen Methoden beweisen kann.
(iv) Für jeden Ring A nennen wir

$$\mathbb{A}_A^n := (\mathrm{Spec}(A[x_1, \dots, x_n]), \mathcal{O})$$

den n-**dimensionalen affinen Raum über** A.

Definition 6.2.8. Ein Raum $(X, \mathcal{F})$ mit Ringgarbe heißt **affines Schema**, falls $(X, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ für einen Ring A. $(X, \mathcal{F})$ heißt **Schema**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U_x besitzt, so dass $(U_x, \mathcal{F}_{|U_x})$ ein affines Schema ist.

Bemerkung 6.2.9. (i) Sei $(X, \mathcal{F})$ ein Schema. Für die Berechnung der Halme $\mathcal{F}_x$ können wir $(X, \mathcal{F})$ dann sogar als affines Schema annehmen. Also sind nach Satz 6.2.6 alle Halme $\mathcal{F}_x$ isomorph zu Ringen der Gestalt $A_\mathfrak{p}$, und damit *lokale Ringe*.
(ii) Sei $(X, \mathcal{F})$ ein affines Schema. Aus $(X, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ folgt

$$\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A.$$

Es gilt dann also stets $(X, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X)), \mathcal{O})$.
(iii) Sei $(X, \mathcal{F})$ ein Raum mit Ringgarbe, dessen Halme $\mathcal{F}_x$ alles lokale Ringe sind. Dann gibt es eine kanonische stetige Abbildung

$$f\colon X \to \mathrm{Spec}\left(\mathcal{F}(X)\right).$$

Dazu betrachten wir für $x \in X$ das eindeutige maximale Ideal $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{F}_x$, und setzen $f(x)$ als das Urbild von $\mathfrak{m}_x$ unter dem Morphismus $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}_x$. Der Beweis der Stetigkeit von f ist Aufgabe 37. Für $(X, \mathcal{F}) = (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ liefert die Konstruktion gerade $\mathrm{id}\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$.

(iv) Sei $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein affines Schema und $a \in A$. Dann gilt

$$(\mathcal{D}(a), \mathcal{O}_{|\mathcal{D}(a)}) \cong (\operatorname{Spec}(A_a), \mathcal{O})$$

(Aufgabe 38). Insbesondere ist $(\mathcal{D}(a), \mathcal{O}_{|\mathcal{D}(a)})$ wieder affin.
(v) Für $a \in A$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gilt offensichtlich

$$a \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow a \in (A_\mathfrak{p})^\times .$$

Sei nun $(f, f^*)\colon (X, \mathcal{F}) \cong (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein Isomorphismus. Wir sehen also, dass der basisoffenen Menge $\mathcal{D}(a)$ in $\operatorname{Spec}(A)$ in X genau die folgende Menge entspricht:

$$\mathcal{D}(f^*(a)) := \left\{ x \in X \mid f^*(a) \in (\mathcal{F}_x)^\times \right\} .$$

Mit (iv) erhalten wir die Aussage, dass für jedes affine Schema $(X, \mathcal{F})$ und jedes $a \in \mathcal{F}(X)$ auch das offene Teilschema

$$(\mathcal{D}(a), \mathcal{O}_{|\mathcal{D}(a)})$$

wieder affin ist.

Definition 6.2.10. Seien $(A, \mathfrak{m})$ und $(B, \mathfrak{n})$ lokale Ringe, sowie $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann heißt φ **Homomorphismus lokaler Ringe**, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$$

gilt (alternativ kann man auch $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ fordern).

Der folgende Satz kann als eine abstraktere Version von Satz 1.4.8 gelten.

Satz 6.2.11. *Seien A, B Ringe.*

(i) Jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ induziert einen kanonischen Garbenmorphismus $\varphi^*\colon (\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}) \to (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$. Die davon auf den Halmen induzierten Morphismen sind alles Homomorphismen lokaler Ringe.

(ii) Jeder Garbenmorphismus $(\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}) \to (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$, der auf allen Halmen Morphismen lokaler Ringe induziert, kommt wie in (i) von einem Ringhomomorphismus.

Beweis. (i): Aus φ erhalten wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) &\to \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun die Abbildungen

$$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}((\varphi^*)^{-1}(U))$$

wirklich als Zurückziehung der auf U definierten Abbildungen mittels φ^*, hängen aber punktweise noch den von φ induzierten Homomorphismus

$$A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$$

hinter die zurückgezogenen Abbildungen. Auf diese Weise erhalten wir wirklich Elemente von $\mathcal{O}((\varphi^*)^{-1}(U))$, und insgesamt den gewünschten Garbenhomomorphismus.
Man sieht nun leicht, dass die auf den Halmen induzierten Morphismen

$$A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{\varphi^*(\mathfrak{q})} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{q}}$$

gerade die von φ kanonisch induzierten Morphismen sind. Diese sind aber Morphismen lokaler Ringe.
(ii): Sei $(f, f^*)\colon (\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}) \to (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein Garbenhomomorphismus, mit der zusätzlich geforderten lokalen Eigenschaft. Dann ist

$$\varphi := f^*\colon A = \mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) \to \mathcal{O}(\operatorname{Spec}(B)) = B$$

ein Ringhomomorphismus. Desweiteren betrachten wir die auf den Halmen induzierten Morphismen, und folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) = A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B = \mathcal{O}(\operatorname{Spec}(B)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{f(\mathfrak{q})} = A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^*_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

Es gilt nun

$$\varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}\left(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \cap B\right) = (f^*_{\mathfrak{q}})^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}) \cap A = f(\mathfrak{q})A_{f(\mathfrak{q})} \cap A = f(\mathfrak{q}).$$

Für die vorletzte Gleichung haben wir verwendet, dass $f^*_{\mathfrak{q}}$ ein Homomorphismus lokaler Ringe ist. Also induziert φ genau die Abbildung f.
Man sieht nun leicht, dass die von φ wie in (i) induzierten Abbildungen zwischen den Ringen der beiden Garben auch wirklich mit den f^* übereinstimmen. $\square$

Korollar 6.2.12. *Seien $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ affine Schemata. Dann gilt*

(i) $(X, \mathcal{F}) \cong (Y, \mathcal{G})$ genau dann wenn $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{G}(Y)$.

(ii) Jeder Garbenisomorphismus zwischen $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$ kommt von einem Ringisomorphismus zwischen $\mathcal{F}(X)$ und $\mathcal{G}(Y)$.

Beweis. (i): Jeder Isomorphismus von Garben induziert insbesondere einen Isomorphimus $\mathcal{G}(Y) \to \mathcal{F}(X)$. Umgekehrt ist die in Satz 6.2.11 (i) beschriebene Konstruktion funktoriell, aus $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{G}(Y)$ folgt also $(\mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X)), \mathcal{O}) \cong (\mathrm{Spec}(\mathcal{G}(Y)), \mathcal{O})$. Desweiteren gilt $(X, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X)), \mathcal{O})$ sowie $(Y, \mathcal{G}) \cong (\mathrm{Spec}(\mathcal{G}(Y)), \mathcal{O})$.
(ii): Jeder Garbenisomorphismus induziert Isomorphismen auf den Halmen. Isomorphismen zwischen lokalen Ringen sind aber automatisch Morphismen lokaler Ringe. □

Beispiel 6.2.13. Sei k ein Körper, und $A \subseteq k$ ein Teilring mit $\mathrm{Spec}(A) = \{(0), \mathfrak{m}\}$, wobei $\mathfrak{m} \neq (0)$. Solche Ringe gibt es: man wähle beispielsweise $k = \mathbb{Q}$ und $A = \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ mit $(0) \neq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
In $\mathrm{Spec}(k)$ gilt $\mathcal{O}_{(0)} = k$, und in $\mathrm{Spec}(A)$ gilt $\mathcal{O}_{(0)} = \mathrm{Quot}(A)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} = A$.
(i) Die Inklusion $\iota\colon A \subseteq k$ induziert einen Morphismus $\iota^*\colon (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ mit $\iota^*((0)) = (0)$. Auf dem Halm liefert das die Einbettung $\mathrm{Quot}(A) \hookrightarrow k$, ein Morphismus lokaler Ringe.
(ii) Andererseits gibt es die stetige Abbildung $f\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(A)$ mit $f((0)) = \mathfrak{m}$. Wir machen Sie zu einem Morphismus von Garben durch das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
k = \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(k)) \arrow[dd] & \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) = A \arrow[l, "f^* := \iota"'] \arrow[d] \\
& \mathcal{O}(\{(0)\}) \arrow[d] \arrow[dl] \\
(0) & (0) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Auf dem Halm induziert das gerade wieder die Einbettung

$$\iota\colon \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} = A \to k = \mathcal{O}_{(0)},$$

und das ist kein Morphismus lokaler Ringe. Also kommt (f, f^*) nicht von einem Ringhomomorphismus.

Definition 6.2.14. Ein **Schemamorphismus** ist ein Garbenhomomorphismus zwischen Schemata, der zusätzlich auf allen Halmen Homomorphismen von lokalen Ringen induziert.

Bemerkung 6.2.15. (i) Die Schemamorphismen zwischen affinen Schemata entsprechen also genau den Ringhomomorphismen der zugrundeliegenden Ringe.
(ii) Ein Garbenisomorphismus zwischen Schemata ist automatisch ein Schemaisomorphismus.

Wir haben nun affine Schemata und allgemeine Schemata eingeführt. Nun konstruieren wir noch sogenannte *projektive Schemata*, als Unterklasse der allgemeinen Schemata. Die Konstruktion geht ganz analog zu der von affinen Schemata, nur dass wir nun alles *graduiert* betrachten.
Sei also $R = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, wobei wir stets $R_d = \{0\}$ für $d < 0$ voraussetzen. Wie üblich bezeichnen wir mit $R_+ = \bigoplus_{d\geq 1} R_d$ das irrelevante Ideal.

Definition 6.2.16. Die Menge

$$\mathrm{Proj}(R) := \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}\,, R_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

heißt **projektives Spektrum von** R.

Wir versehen $\mathrm{Proj}(R)$ wie zu erwarten mit der Topologie, die die Mengen

$$\mathcal{V}_+(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

als abgeschlossene Mengen hat. Man kann sich dabei auf homogene Radikal-ideale I beschränken, und erhält wirklich eine Topologie, die **Zariskitopologie**. Für homogenes $r \in R$ sei

$$\mathcal{D}_+(r) := \mathcal{V}_+(r)^c = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(R) \mid r \notin \mathfrak{p}\}\,,$$

und diese Mengen liefern eine Basis offener Mengen der Zariskitopologie. Analog zum affinen Fall überlegt man sich leicht, dass alle $\mathcal{D}_+(r)$ quasikompakt sind.
Nun versehen wir $\mathrm{Proj}(R)$ mit einer Ringgarbe $\mathcal{O}$. Für eine offene Menge $U \subseteq \mathrm{Proj}(R)$ sei $\mathcal{O}(U)$ die Menge aller Abbildungen

$$s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} R_{(\mathfrak{p})}$$

mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(1) $s(\mathfrak{p}) \in R_{(\mathfrak{p})}$ für alle $\mathfrak{p} \in U$.

(2) Für jedes $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine offene Umgebung $U_\mathfrak{p} \subseteq U$ vn $\mathfrak{p}$, und $a, b \in R$, homogen vom selben Grad, mit

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \in R_{(\mathfrak{q})}$$

für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ (insbesondere soll $b \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ gelten).

Mit punktweise definierten Verknüpfungen und den Einschränkungen auf kleinere Definitionsbereiche erhalten wir eine Garbe auf $\operatorname{Proj}(R)$, genannt die **Garbe der regulären Funktionen**.

Satz 6.2.17. *Sei R ein graduierter Ring.*

(i) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R)$ gilt $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong R_{(\mathfrak{p})}$.

(ii) Für homogenes $r \in R_+$ gilt

$$\left(\mathcal{D}_+(r), \mathcal{O}_{|\mathcal{D}_+(r)}\right) \cong (\operatorname{Spec}(R_{(r)}), \mathcal{O}).$$

Insbesondere gilt damit $\mathcal{O}(\mathcal{D}_+(r)) \cong R_{(r)}$.

(iii) $(\operatorname{Proj}(R), \mathcal{O})$ ist ein Schema.

Beweis. (i) geht praktisch identisch zum Beweis von (i) in Satz 6.2.6. Für (ii) definieren wir zunächst eine Abbildung $f\colon \mathcal{D}_+(r) \to \operatorname{Spec}(R_{(r)})$ folgendermaßen. Jedes homogene Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ mit $r \notin \mathfrak{p}$ erzeugt in Primideal $\mathfrak{p}R_r$ in der vollen Lokalisierung R_r. Es ist aber $R_{(r)}$ ein Teilring von R_r, und wir definieren $f(\mathfrak{p}) := \mathfrak{p}R_r \cap R_{(r)}$. Dann liefert f eine Bijektion zwischen $\mathcal{D}_+(r)$ und $\operatorname{Spec}(R_{(r)})$, die ein Homöomorphismus ist (Aufgabe 38). Hierbei benötigen wir $r \in R_+$!
Es gibt nun einen natürlichen Isomorphismus $(R_{(r)})_{f(\mathfrak{p})} \to R_{(\mathfrak{p})}$, und so definieren sich die Abbildungen f^* als Zurückziehung mittels f, und Komposition mit diesen Isomorphismen. Auch hier sieht man leicht, dass alle f^* Isomorphismen sind. Das beweist die Isomorphie. Insbesondere gilt

$$\mathcal{O}(\mathcal{D}_+(r)) \cong \mathcal{O}(\operatorname{Spec}(R_{(r)}) \cong R_{(r)}.$$

(iii) Da die $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R)$ nach Definition nie R_+ enthalten, wird $\operatorname{Proj}(R)$ von Mengen $\mathcal{D}_+(r)$ mit homogenen $r \in R_+$ überdeckt. Mit (ii) ist $(\operatorname{Proj}(R), \mathcal{O})$ also ein Schema. □

Definition 6.2.18. Ein Schema $(X, \mathcal{F})$ heißt **projektiv**, falls

$$(X, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Proj}(R), \mathcal{O})$$

für einen graduierten Ring gilt.

Definition 6.2.19. Sei A ein Ring und $A[x_0, \ldots, x_n]$ mit der Standardgraduierung versehen. Dann heißt

$$\mathbb{P}^n_A := (\mathrm{Proj}(A[x_0, \ldots, x_n]), \mathcal{O})$$

der n**-dimensionale projektive Raum über** A.

Beispiel 6.2.20. (i) Sei A ein faktorieller Ring. Wir beschreiben $\mathcal{O}(\mathrm{Proj}(A[\underline{x}]))$. Dafür beobachten wir $\mathrm{Proj}(A[\underline{x}]) = \mathcal{D}_+(x_0) \cup \ldots \cup \mathcal{D}_+(x_n)$, und also können wir die Garbeneigenschaft für diese Überdeckung verwenden:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(\mathrm{Proj}(A[\underline{x}])) =? \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A[\underline{x}]_{(x_i)} \arrow[dr] & & A[\underline{x}]_{(x_j)} \arrow[dl] \\ & A[\underline{x}]_{(x_i x_j)} & \end{tikzcd}.$$

Man überlegt sich leicht, dass Elemente aus $A[\underline{x}]_{(x_i)}$ und $A[\underline{x}]_{(x_j)}$ genau dann in $A[\underline{x}]_{(x_i x_j)}$ übereinstimmen, wenn beide identisch und aus A sind (dabei verwendet man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $A[\underline{x}]$). Aus der Eindeutigkeit im Garbenaxiom erhalten wir

$$\mathcal{O}(\mathrm{Proj}(A[\underline{x}])) \cong A.$$

Damit sehen wir unmittelbar, dass $\mathbb{P}^n_k$ *nicht affin* ist (k ein Körper). Es wäre sonst nämlich $\mathbb{P}^n_k \cong (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O})$ und $\mathrm{Spec}(k)$ hat nur ein Element, $\mathrm{Proj}(k[\underline{x}])$ hingegen mehr.
(ii) Genauso sieht man, dass für einen faktoriellen graduierten Ring R stets $\mathcal{O}(\mathrm{Proj}(R)) \cong R_0$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[2] T. Becker and V. Weispfenning. *Gröbner bases*, vol. 141 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993. A computational approach to commutative algebra, In cooperation with Heinz Kredel.

[3] D. Eisenbud. *Commutative algebra*, vol. 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[4] D. Eisenbud and J. Harris. *The geometry of schemes*, vol. 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] W. Fulton. *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. An introduction to algebraic geometry, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.

[6] J. Harris. *Algebraic geometry*, vol. 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[7] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[8] K. Hulek. *Elementare algebraische Geometrie*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. [Basic concepts and techniques with various examples and applications].

[9] S. Lang. *Algebra*, vol. 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edn., 2002.

[10] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, russian edn., 2013. Varieties in projective space.

[11] ———. *Basic algebraic geometry. 2*. Springer, Heidelberg, 2013. Schemes and complex manifolds, Translated from the 2007 third Russian edition by Miles Reid.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass für jedes Ideal I ein einem kommutativen Ring das Radikal $\sqrt{I}$ (vgl. Def 1.1.1) wieder ein Ideal ist.
(ii) Beweisen Sie Lemma 1.1.3.

Aufgabe 2. Sei R ein faktorieller Integritätsbereich und K sein Quotientenkörper. Zeigen Sie, dass die einzigen Elemente von K, die ganz über R sind, die Elemente von R selbst sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(i) $k[x,y]/(x^2-y)$ ist isomorph zum Polynomring $k[t]$ in einer Variablen.

(ii) $k[x,y]/(xy-1)$ ist nicht isomorph zu $k[t]$.

(iii) Falls k algebraisch abgeschlossen ist, ist für jedes quadratische irreduzible Polynom $p \in k[x,y]$ die Algebra $k[x,y]/(p)$ isomorph zu $k[x,y]/(x^2-y)$ oder zu $k[x,y]/(xy-1)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ nicht mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Aufgabe 5. Beweisen Sie Lemma 1.3.6.

Aufgabe 6. Beweisen Sie Lemma 1.3.11.

Aufgabe 7. Zeigen Sie dass $\mathrm{GL}_n(K)$ eine irreduzible affine k-Varietät ist.

Aufgabe 8. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^3$ die durch die folgenden Gleichungen definierte affine Varietät:

$$x^2 - yz = 0 \quad \text{und} \quad xz - x.$$

Zeigen Sie dass V 3 irreduzible Komponenten hat, und finden Sie deren Primideale.

Aufgabe 9. Beweisen Sie Korollar 1.3.17 für Ideale I in beliebigen noetherschen Ringen A.

Aufgabe 10. Zeigen Sie dass die Abbildungen $p \mapsto p^*$ und $\varphi \mapsto p_\varphi$ aus dem Beweis von Satz 1.4.8 invers zueinander sind.

Aufgabe 11. Beweisen Sie Satz 1.4.11.

Aufgabe 12. Zeigen Sie dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 &\to \mathcal{V}(x_1^3 - x_2^2) \subseteq \mathbb{A}^2 \\ r &\mapsto (r^2, r^3) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus bezüglich der Zariskitopologie ist.

Aufgabe 13. Zeigen Sie dass $\mathbb{A}^1$ und $\mathcal{V}(x_1x_2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 14. Seien A, B, C k-Algebren und C sei nullteilerfrei. Zeigen Sie dass es eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_k(A \times B, C)$ und

$$\mathrm{Hom}_k(A, C) \cup \mathrm{Hom}_k(B, C)$$

gibt (vergleiche Beweis von Satz 1.4.17).

Aufgabe 15. Zeigen Sie, dass es $\binom{n+d}{n}$ viele Monome vom Grad d in den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ gibt.

Aufgabe 16. Beweisen Sie die Aussage aus Bemerkung 2.3.17(ii).

Aufgabe 17. Zeigen Sie, wie sich $p \in \sqrt{(p_1, \ldots, p_s)}$ mit Gröbnerbasen testen lässt (siehe Anwendung 2.4.3).

Aufgabe 18. Sei I ein Ideal im Ring A, und $g_1, \ldots, g_s \in A$. Zeigen Sie

$$(I : (g_1, \ldots, g_s)^\infty) = \bigcap_{j=1}^{s} (I \cap g_i^\infty).$$

Aufgabe 19. Beweisen Sie Lemma 3.2.5.

Aufgabe 20. Beweisen Sie direkt, dass das Radikal eines homogenen Ideals wieder homogen ist (bei angeordneter Indexgruppe G).

Aufgabe 21. Beweisen Sie Lemma 3.2.13.

Aufgabe 22. Zeigen Sie $\sqrt{I}^h = \sqrt{I^h}$ für Ideale $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ (vergleiche Lemma 3.3.16).

Aufgabe 23. Die affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$ habe keine Punkte im Unendlichen. Zeigen Sie, dass V dann endlich ist.

Aufgabe 24. Zeigen Sie, dass ein Hausdorffraum X genau dann kompakt ist, wenn für alle Hausdorffräume Y die Projektion

$$\pi\colon X \times Y \to Y$$

abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet (vergleiche Bemerkung 3.4.3).

Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass die Varietät $V := \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht affin ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\mathcal{O}(V)$. Wenn V affine wäre, zu welcher einfachen affinen Varietät wäre V dann isomorph? Warum kann das nicht sein?

Aufgabe 26. Sei $Q = \mathcal{V}_+(c_0 x_0^2 + \cdots + c_r x_r^2) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Quadrik, wobei alle $c_i \neq 0$. Zeigen Sie, dass Q für $r \geq 2$ irreduzibel ist. Was gilt für $r < 2$?

Aufgabe 27. Zeigen Sie dass ein Körper K genau dann endlich erzeugt über k ist, wenn $K = k(V)$ für eine irreduzible k-Varietät gilt.

Aufgabe 28. Beweisen Sie Lemma 5.1.2.

Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass für eine endliche/ganze A-Algebra B, und eine weitere A-Algebra C stets $B \otimes_A C$ eine endliche/ganze C-Algebra ist.

Aufgabe 30. Beweisen Sie Lemma 5.3.5. Gilt (iii) auch für unendliche Überdeckungen?

Aufgabe 31. Seien $L_1 = \mathcal{V}_+(x_0, x_1)$ und $L_2 = \mathcal{V}_+(x_2, x_3)$ zwei windschiefe Geraden in $\mathbb{P}^3$. Zeigen Sie, dass man $L_1 \cup L_2$ nicht mit 2 homogenen Gleichungen definieren kann. Geht es mit 3? Wie viele Polynome braucht man zur Erzeugung von $\mathcal{I}(L_1 \cup L_2)$?

Aufgabe 32. (i) Zeigen Sie, dass eine Lokalisierung eines noetherschen Ringes wieder noethersch ist.
(ii) Sei A ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Dann besitzt die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ genau ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Es gilt

$$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cong \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}).$$

Aufgabe 33. Sei $J = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| = d\}$, $N = |J|$ und $Z \subseteq \mathbb{P}^N$ die von den Gleichungen

$$z_\alpha z_\beta = z_\delta z_\gamma$$

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in J$ mit $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ definierte projektive Varietät. Seien nun $\xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_r \in J$ mit

$$\sum_i \xi_i = \sum_i \eta_i.$$

Zeigen Sie dass für $b = (b_\alpha)_{\alpha \in J} \in Z$ dann gilt

$$b_{\xi_1} \cdots b_{\xi_r} = z_{\eta_1} \cdots z_{\eta_r}.$$

Aufgabe 34. Beweisen Sie die universelle Eigenschaft der Garbifizierung im Beweis von Satz 6.1.12.

Aufgabe 35. Beweisen Sie die Aussage aus Bemerkung 6.2.4 (v).

Aufgabe 36. Sei $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein affines Schema und $a \in A$. Zeigen Sie, dass

$$(\mathcal{D}(a), \mathcal{O}_{|\mathcal{D}(a)}) \cong (\mathrm{Spec}(A_a), \mathcal{O})$$

gilt.

Aufgabe 37. Zeigen Sie, dass die in Bemerkung 6.2.9 (iii) konstruierte Abbildung

$$X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{F}(X))$$

stetig ist.

Aufgabe 38. Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz 6.2.17 konstruierte Abbildung $f\colon \mathcal{D}_+(r) \to \mathrm{Spec}(R_{(r)})$ ein Homöomorphismus ist. Konstruieren Sie weiter den natürlichen Isomorphismus $(R_{(r)})_{f(\mathfrak{p})} \to R_{(\mathfrak{p})}$.