

# Die Elastizitätstheorie

von Ansgar Kirsch, Universität Innsbruck, Raum 321

16. März 2007

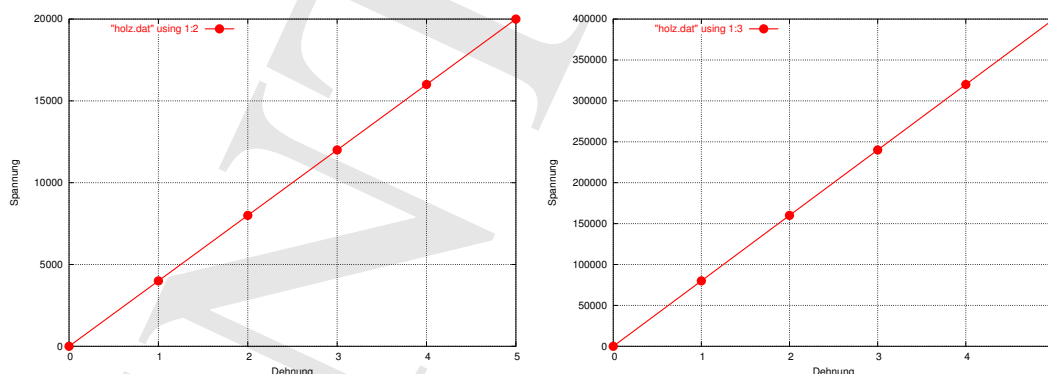
Die Elastizitätstheorie ist eine enorm wichtige Theorie zur Beschreibung von elastischen Materialien. Es gibt sie in einer und in drei Dimensionen.

## Gedankenexperiment

In einem kleinen Gedankenexperiment zur Demonstration der linearen Elastizitätstheorie nehme ich einen polygonalen Holzstab mit der Ursprungslänge  $h_0$ . Man kann messen, dass sich dieser Holzstab verlängert, und zwar wenn man eine Kraft auf ihn aufbringt, die in axialer Richtung des Stabes zieht. Nach dieser Verlängerung hat er die Länge  $h_1$ . Der Stab verlängert sich infolgedessen um  $\Delta h = h_1 - h_0$ . Nun hat er bestimmte Materialeigenschaften, wie z.B. die Wichte  $\gamma$  oder die Fläche  $A$ .

## Theorie

Die Dehnung folgt aus  $\Delta h$  und  $h_0$  zu  $\varepsilon = \Delta h/h_0$ . Jetzt hat Robert Hooke (1635-1703), der unter anderem die Zellen in Pflanzen durch mikroskopische Forschung entdeckt hat damals herausgefunden, dass sich folgendes Verhalten zeigt, wenn man  $F$  variiert, und zwar auch, wenn man die Krafrichtung ändert. In diesem Fall wird die Verformung von Holz betrachtet und zwar einmal in Richtung der Fasern und einmal dazu orthogonal.



Man kann aus beiden Abbildungen sehen, dass der Verlauf relativ ähnlich ist. Er kam dann auf die tolle Idee, die Spannung  $\sigma$  mit  $E$  in Beziehung zu setzen:

$$\frac{E}{\sigma} = \epsilon$$

Trotzdem wird der „E-Modul“ im englischen auch als *Young's modulus* nach dem englischen Wissenschaftler *Thomas Young*, bezeichnet. Interessanterweise lässt sich die Elastizitätstheorie auch auf 3 Dimensionen ausdehnen:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

wobei  $\sigma_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij}$  die Spannungs- und Verzerrungstensoren (Dimensionen  $3 \times 3$ ) zur Beschreibung des 3-dimensionalen Spannungs- und Dehnungszustandes im dreidimensionalen Euklidischen Kontinuum sind.  $C$  (in Indexschreibweise  $C_{ijkl}$ ) ist der vierdimensionale Elastizitätstensor [1], der für allgemeine isotrope Elastizität die im folgenden aufgeschriebene Form annimmt:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

In der Gleichung hier oben sind  $\lambda$  und der Schubmodul  $G$  die Materialparameter. Es gibt alternativ  $\nu$ , die Poisson's ratio (dt. Querdehnzahl), die die Dehnungen in einer Richtung senkrecht zur Normalspannung mit denen senkrecht dazu verbindet. Den E-Modul für verschiedene Materialien kann man z.B. von Wikipedia runterladen:

| Material                  | E-Modul                          |
|---------------------------|----------------------------------|
| Stahl                     | 210.000 MPa                      |
| Alu                       | $70 \cdot 10^3$ MPa              |
| Titan                     | 210 kN/mm <sup>2</sup>           |
| Holz (   zur Faser)       | 7 ... 20 kN/mm <sup>2</sup>      |
| Holz ( $\perp$ zur Faser) | 0.23 ... 1,33 kN/mm <sup>2</sup> |
| Beton                     | 22 bis 45 N/mm <sup>2</sup>      |

Das Stoffgesetz  $\sigma = \mathbf{C} \varepsilon$  wird für viele FE-Berechnungen verwendet, weil es so einfach ist.

## Literatur

- [1] Mang, H. (Universität Wien) und Hofstetter, G. (Universität Innsbruck): Festigkeitslehre, Springer Verlag, Wien, New York
- [2] *Schneider-Bautabellen* Bautabellen für Ingenieure, Herausgeber: Klaus-Jürgen Schneider, 13. Auflage 1998, Werner

### Arbeitsanweisung:

In der hier vorgestellten „wissenschaftlichen“ Abhandlung sind einige Verstöße gegen verständliches, wissenschaftliches Schreiben „versteckt“. Einige davon fallen sofort ins Auge, andere sind nicht so offensichtlich.

Nehmen Sie sich ein Blatt Papier und teilen Sie es in zwei vertikale Spalten:

| Verstöße gegen gutes Schreiben | Verbesserungsvorschläge |
|--------------------------------|-------------------------|
| ⊖ ...                          | ⊕ ...                   |

1. Notieren Sie in die linke Spalte bitte alle Punkte, in denen dieser Text Ihrer Meinung nach gegen gutes und verständliches wissenschaftliches Schreiben verstößt.
2. In die rechte Spalte schreiben Sie, wie Sie es besser machen könnten.