# Grundzüge der eindimensionalen Elastizitätstheorie

Dipl.-Ing. Ansgar Kirsch[1]

Mit der Elastizitätstheorie kann das mechanische Verhalten vieler Materialien, wie z.B. Stahl, Beton oder Holz für kleine Dehnungen beschrieben werden. Diese Theorie hat eine große Bedeutung, da viele analytische Berechnungsverfahren im Bauingenieurwesens auf ihr basieren. Zudem ist sie ein beliebtes Materialmodell für moderne numerische Berechnungen.

In dieser Einführung erfahren Sie, wie die mechanischen Gesetzmäßigkeiten eines linear-elastischen Materials beschrieben werden können. Dazu wird der einfachste Fall betrachtet: die eindimensionale Formulierung der linearen Elastizitätstheorie.

**Ausgangsbeispiel: einaxialer Zugversuch**

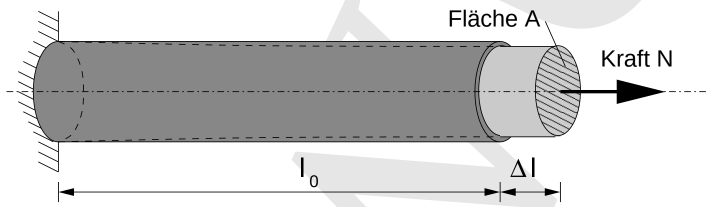


Abbildung 1: Zugstab aus linear elastischem Material

Ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung der Elastizitätstheorie ist der einaxiale Zugversuch an einem Probestab, wie er in Abb. 1 dargestellt ist (vgl. MANG/HOFSTETTER [1]). Er hat im Ausgangszustand die Länge $l_0$. Wirkt eine Zugkraft $N$ in Richtung der Stabachse, verlängert er sich um den Betrag $\Delta l$.

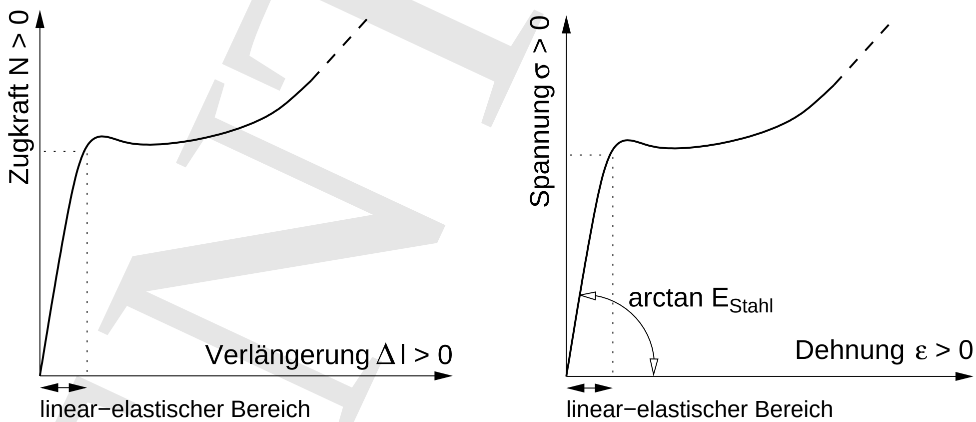


Abbildung 2: Qualitatives Kraft-Verformungsdiagramm (links) und Spannung-Dehnungsdiagramm (rechts) für Stahl

Abb. 2 (links) zeigt ein typisches Verhalten von Stahl im Zugversuch. Darin ist zu erkennen, dass die Kraft-Verformungslinie für kleine $\Delta l$ einem linearen Verlauf folgt. Ab einer gewissen Verformung wird die Beziehung zwischen Kraft und resultierender Verformung nicht-linear.

[1]Arbeitsbereich Geotechnik und Tunnelbau, Institut für Infrastruktur, Universität Innsbruck, E-Mail: ansgar.kirsch@uibk.ac.at

### Hooke'sches Gesetz

Um die Auswertung des Versuchs von der Querschnittsfläche $A$ und der Ursprungslänge $l_0$ des betrachteten Körpers unabhängig zu machen, werden die Begriffe *Dehnung* und *Spannung* eingeführt.

Die *Dehnung* $\varepsilon$ des Stabes ist definiert als:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{1}$$

Die auf das Stabende wirkende *Spannung* $\sigma$ berechnet sich aus der Kraft $N$ und der Fläche $A$ zu

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{2}$$

Abb. 2 (rechts) zeigt die Darstellung des eindimensionalen Zugversuchs in einem Spannungs-Dehnungsdiagramm. Im linear-elastischen Bereich, der in der Abbildung durch die punktierten Linien angedeutet ist, gilt folgende Beziehung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3}$$

Formel (3) ist das sog. *Hooke'sche Gesetz* in einer Dimension. Es ist nach ROBERT HOOKE, einem englischen Naturwissenschaftler, benannt und wurde bereits zu Beginn des 18. Jahrhunderts formuliert [1]. Der Proportionalitätsfaktor $E$ wird als Elastizitätsmodul bezeichnet. Wie Abb. 2 (rechts) veranschaulicht, lässt er sich als Steigung der Spannungs-Dehnungslinie interpretieren (im linear-elastischen Bereich). Er hat die Dimension einer Spannung.

Im Labor lassen sich für unterschiedliche Materialien die eindimensionalen Spannungs-Dehnungsbeziehungen ermitteln. Die resultierenden Arbeitslinien[2] unterscheiden sich dabei in der Größe des elastischen Bereiches und im Elastizitätsmodul. Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die Elastizitätsmodule von Werkstoffen, die im Bauingenieurwesen Verwendung finden.

| | Elastizitätsmodul (MPa) | |
|---|---|---|
| Stahl | 206.000 | |
| Aluminium | 65.000 - 73.000 | |
| Beton | 20.000 - 40.000 | |
| Holz | 10.000 - 12.000 | (längs zur Faser) |
| | 300 - 700 | (quer zur Faser) |

Tabelle 1: Elastizitätsmodule verschiedener Werkstoffe [1]

### Erweiterung des Hooke'schen Gesetzes

Die eindimensionale lineare Elastizitätstheorie kann auf eine dreidimensionale Formulierung erweitert werden, um baupraktische Probleme mit komplizierten Randbedingungen lösen zu können. Eine ausführliche Darstellung der Erweiterung findet sich in MANG/HOFSTETTER [1].

### Literatur

[1] Mang, H. und Hofstetter, G. (2000): Festigkeitslehre, Springer Verlag, Wien

[2] So werden Spannungs-Dehnungskurven auch genannt.