

Die Ergebnisse einer geotechnischen Finite-Elemente Berechnung stehen und fallen mit der Qualität des verwendeten Stoffgesetzes zur Beschreibung des Materialverhaltens des Bodens. Böden sind stark nichtlinear und anelastisch, und zeigen eine ausgeprägte Volumenänderung bei Scherverformungen. Nur wenige Stoffgesetze bilden dies halbwegs brauchbar ab. Hypoplastische Stoffgesetze können alle obigen Eigenschaften sehr gut modellieren. Um sie zu verstehen, muss allerdings die schon lange tradierte und deshalb sehr gewohnte Denkweise der Elastoplastizität verlassen werden.

In diesem Beitrag wird eine Einführung in die Theorie der Hypoplastizität gegeben. Aus den Ergebnissen von Laborversuchen folgern wir grundlegende mechanische Eigenschaften von kohäsionslosen Böden und suchen entsprechende mathematische Eigenschaften eines Stoffgesetzes in Ratenform. Zum mathematischen Verständnis reichen Grundlagen der linearen Algebra wie z.B. die Kenntnis der Matrizenmultiplikation aus.

**Hypoplasticity for intermediate.** *The quality of the constitutive law is, without doubt, of crucial importance for the accuracy of geotechnical finite element calculations. The stress-strain behaviour of soil is strongly non-linear and inelastic. Furthermore, soils show a pronounced volumetric deformation during shear. Only a few constitutive laws are able to describe this. Hypoplastic constitutive laws are able to model all these properties very well. In order to understand hypoplasticity, the traditional and therefore well-known elastoplastic way of thinking has to be thrown overboard.*

*This paper gives an introduction to the theory of hypoplasticity. From the soil behaviour in laboratory tests we conclude the principal mathematical properties of a constitutive law of the rate type. Basics in linear algebra are recommended for understanding the mathematical formulations.*

## 1 Einleitung, Definitionen

Eine Einführung in die Hypoplastizität anhand einer einfachen eindimensionalen Formulierung wurde bereits in dieser Zeitschrift präsentiert [3], welche als Vorlektüre zu diesem Beitrag empfohlen wird. Nun werden wir den Schritt in die dreidimensionale Welt wagen. Natürlich werden die Formulierungen etwas komplizierter als im eindimensionalen Fall, bleiben aber mit generellen Kenntnissen der Vektorrechnung trotzdem leicht nachzuvollziehen. Die vielleicht etwas ungewohnte Schreibweise sollte nicht davon abhalten, in die faszinierende Theorie der Hypoplastizität einzutauchen.

Zunächst rufen wir uns einige Grundbegriffe der Vektorrechnung ins Gedächtnis und führen einige Bezeichnungen ein, welche in der Geotechnik teilweise nicht so üblich sind. Vektoren und Matrizen werden mit fetten Buchstaben geschrieben, skalare Größen in Normalschrift.

### 1.1 Spannung

In der Welt der Stoffgesetzentwickler wird die CAUCHY-Spannung meist mit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

bezeichnet (Bild 1).  $T_{ii}$  sind die Normalspannungen, wobei Zugspannungen positiv sind. Diese Bezeichnung für die Spannungen ist auch deshalb ganz angenehm, weil Geotechniker gewohnt sind, dass Druckspannungen  $\sigma$  positiv sind.  $T_{ij}$  sind die Schubspannungen.

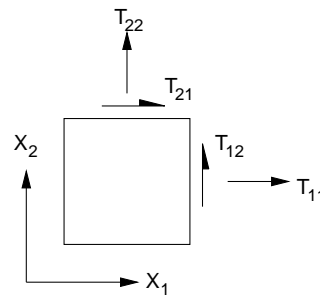


Bild 1. Spannungsdefinition.  
Fig. 1. Definition of stress.

Die erste Invariante der Spannung  $\mathbf{T}$  ist die Spur

$$\text{tr } \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} . \quad (2)$$

Weiters benötigen wir noch die deviatorische Spannung

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \mathbf{T} - \frac{\text{tr } \mathbf{T}}{3} \mathbf{1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2T_{11} - T_{22} - T_{33}) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & \frac{1}{3}(-T_{11} + 2T_{22} - T_{33}) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & \frac{1}{3}(-T_{11} - T_{22} + 2T_{33}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

worin  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Die normierte Deviatorspannung wird mit

$$\hat{\mathbf{T}}^* = \frac{\mathbf{T}^*}{\text{tr } \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\text{tr } \mathbf{T}} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad (4)$$

bezeichnet.

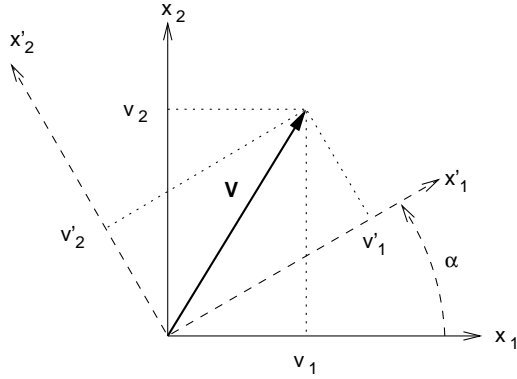


Bild 2. Koordinatentransformation.  
Fig. 2. Rotation of the coordinate system.

### 1.2 Koordinatendrehung

Bei der Koordinatentransformation von  $x_i$  nach  $x'_i$  in Bild 2 ändern sich die Komponenten des Vektors  $\mathbf{v}$ . Dies wird durch eine Multiplikation des Vektors  $\mathbf{v}$  mit einer Matrix  $\mathbf{Q}$  erreicht

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11}v_1 + Q_{12}v_2 + Q_{13}v_3 \\ Q_{21}v_1 + Q_{22}v_2 + Q_{23}v_3 \\ Q_{31}v_1 + Q_{32}v_2 + Q_{33}v_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

worin die Drehmatrix für das Beispiel in Bild 2

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ist.

Spannungen in einem Körper transformieren sich bei Koordinatendrehung zu

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \quad (7)$$

also über Matrizenmultiplikationen.

Durch eine geeignete Koordinatentransformation kann  $\mathbf{T}$  durch die Hauptspannungen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  dargestellt werden

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

### 1.3 Spannungs- und Verzerrungsraten

Bereits in [3] wurde gezeigt, dass anelastische Stoffgesetze sinnvollerweise als Ratengleichung formuliert werden können, welche die Spannungsrate als Funktion der Verzerrungsraten beschreiben. Für reine Starrkörperdrehungen, welche ja definitionsgemäß keine Verzerrungen im Körper verursachen, soll ein Stoffgesetz keine Spannungsänderungen prognostizieren. Deshalb soll

das Stoffgesetz eine sogenannte objektive Spannungsrate  $\dot{\mathbf{T}}$  angegeben, welche bei reiner Starrkörperdrehung verschwindet. Für die im Folgenden betrachteten verdrehungsfreien Verformungen (Quaderverformungen) gilt einfach

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad (9)$$

Als Verzerrungsraten verwenden wir die Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  nach EULER. Diese ist für den Spezialfall der kleinen Verzerrungen einfach die Zeitableitung der linearisierten Verzerrungen

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

worin die Normalverzerrungen, z.B.  $\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ , und die Scherverzerrungen, z.B.  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$ , aus der Verschiebung  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  berechnet werden. Dehnungen sind positiv.

Für allgemeine Verformungen wird  $\mathbf{D}$  aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnet. Ebenso muss die objektive Spannungsrate  $\dot{\mathbf{T}}$  für nicht verdrehungsfreie Bewegungen anders berechnet werden [9]. Dies ist aber ein rein mechanisches Problem und soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Die Formulierung des Stoffgesetzes bleibt davon unberührt!

Hypoplastizität gilt auch für große Verformungen (bei geeigneter Definition der Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  und der objektiven Spannungsrate  $\dot{\mathbf{T}}$ ).

### 1.4 Hypoplastizität als Ratengleichung

Wir suchen nun eine Funktion

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (11)$$

um das Verformungsverhalten von kohäsionslosen Böden zu beschreiben. Die Matrixschreibweise ist eine abgekürzte Schreibweise für 6 gekoppelten Differentialgleichungen der Komponenten:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} &= h_{11}(T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, \\ &\quad \dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, \dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{23}) \\ \dot{T}_{22} &= h_{22}(T_{11}, \dots, \dot{\epsilon}_{23}) \\ &\vdots \\ \dot{T}_{32} &= h_{32} = h_{23}(T_{11}, \dots, \dot{\epsilon}_{23}) \end{aligned}$$

In einem geeigneten Koordinatensystem, bzw. unter speziellen Bedingungen wie z.B. dem

Triaxialversuch, ist nur die Hauptdiagonale besetzt

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

das sind drei gekoppelte Differentialgleichungen.

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung wird mittels einer Zeitintegration berechnet.

**Beispiel:** Für den Spezialfall der eindimensionalen Kompression bei behinderter Seitendehnung (Ödometer-Versuch) mit konstanter Belastungsgeschwindigkeit gilt

$$\dot{\varepsilon}_1 = \text{konst.}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3 = 0.$$

Die Spannungsrate der ersten Hauptspannung kann aus

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= h_1(T_1, D_1) = C_1 T_1 D_1 + C_2 T_1 |D_1| \\ \dot{T}_1 &= C_1 T_1 \dot{\varepsilon}_1 + C_2 T_1 |\dot{\varepsilon}_1| \end{aligned}$$

berechnet werden [3]. Dies ist das denkbar einfachste hypoplastische Stoffgesetz.

Bei Belastung (Kompression  $\dot{\varepsilon}_1 < 0$ ) folgt die Verzerrung aus der Zeitintegration

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^t D_1(\tau) d\tau = \int_0^t \dot{\varepsilon}_1(\tau) d\tau = \dot{\varepsilon}_1 t - \varepsilon_1(0)$$

und die Spannung wird

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= h_1(T_1, D_1) = (C_1 - C_2) T_1 \dot{\varepsilon}_1 \\ \frac{\dot{T}_1}{T_1} &= (C_1 - C_2) \dot{\varepsilon}_1 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \frac{\dot{T}_1}{T_1} d\tau = \int_0^t (C_1 - C_2) \dot{\varepsilon}_1 d\tau$$

$$T_1(t) = T_1(0) e^{(C_1 - C_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_1(0))}.$$

Für kompliziertere Stoffgesetze kann die Zeitintegration numerisch erfolgen.

## 2 Grundlegende Eigenschaften von kohäsionslosen Böden

Nach allen diesen einführenden Definitionen und Schreibweisen stellen wir uns nun die eigentlich interessante Frage: „Welche mathematischen Eigenschaften soll die Funktion  $\mathbf{h}$  aufweisen?“ Dazu werden wir grundlegende mechanische Eigenschaften von kohäsionslosen Böden in Laborversuchen kennen lernen.

## 2.1 Echter Triaxialversuch

Der Biaxial-Versuch nach dem Prinzip von HAMBLY (Bild 3) erlaubt beliebige Quaderverformungen der Probe, d.h. Bewegungen ohne Rotation der Hauptspannungs- und Verzerrungsrichtungen. Dieses Prinzip kann auch dreidimensional umgesetzt werden. Mit einem solchen *True-triaxial*-Gerät können viele dreidimensionale Spannungspfade von Quaderverformungen untersucht werden. Ein Spannungspfad stellt die Entwicklung der Spannungen während des Versuches im Koordinatensystem der Spannungen dar, welches Spannungsraum genannt wird (Bild 4 rechts und Bild 21).

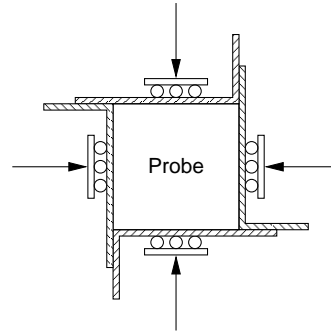


Bild 3. Biaxial-Versuch nach dem Prinzip von HAMBLY.

*Fig. 3. HAMBLY's principle for biaxial test.*

Basierend auf solchen Versuchen formulierte GOLDSCHIEDER folgendes Prinzip für kohäsionslose Böden [4]:

Versuche mit proportionalen (d.h. geradlinigen) Verzerrungspfaden und (nahezu) spannungsfreier Anfangsbedingung führen zu proportionalen Spannungspfaden. Wenn der Anfangszustand nicht spannungsfrei ist, nähert sich der Spannungspfad asymptotisch dem proportionalen Spannungspfad (Bild 4).

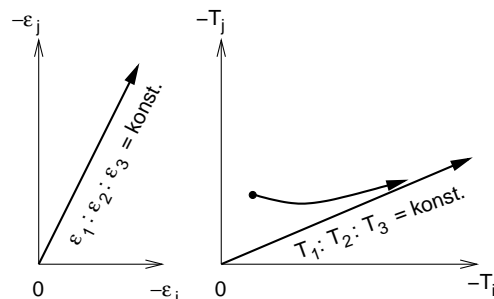


Bild 4. Proportionaler Verzerrungspfad und zugehörige Spannungspfade nach dem Prinzip von GOLDSCHIEDER.

*Fig. 4. Stress and strain paths referring to GOLDSCHIEDER's principle.*

Um dieses Verhalten zu simulieren, muss die gesuchte Funktion  $\mathbf{h}$  homogen in der Spannung

$\mathbf{T}$  sein

$$\mathbf{h}(\lambda\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \lambda^n \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}), \quad (13)$$

d.h. für einen um  $\lambda$  skalierten Spannungszustand wird die Spannungsrate bei gleichbleibender Richtung (im Spannungsraum) um  $\lambda^n$  skaliert.

Warum führt Homogenität in  $\mathbf{T}$  auf das Prinzip von GOLDSCHIEDER? Betrachten wir dazu folgendes zweidimensionales Beispiel.

Wir starten unsere Überlegung bei der Spannung

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} T_{a1} & 0 \\ 0 & T_{a2} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Eine spezielle Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}_p$ , für die ein Spannungszinkrement auf einer Geraden durch den Ursprung und  $\mathbf{T}_a$  liegt, beschreibt jenen proportionalen Verzerrungspfad, welcher im Versuch zu einem proportionalen Spannungspfad durch  $\mathbf{T}_a$  führt. Wir suchen also eine Verzerrungsgeschwindigkeit für die

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{T}_a &= \mathbf{h}(\mathbf{T}_a, \mathbf{D}_p) \cdot \Delta t = \alpha\mathbf{T}_a \\ &= \begin{pmatrix} \alpha T_{a1} & 0 \\ 0 & \alpha T_{a2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

gilt (Bild 5).

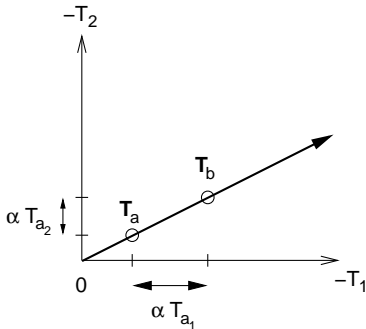


Bild 5. Proportionaler Spannungspfad.  
Fig. 5. Proportional stress path.

Wird diese Verzerrungsgeschwindigkeit konstant weiter aufgebracht, erhalten wir einen proportionalen Verzerrungspfad: für  $\dot{\varepsilon}_i = \text{konst.}$  gilt  $\varepsilon_i = \int \dot{\varepsilon}_i dt = \dot{\varepsilon}_i t$ , und das Verhältnis zwischen den Verzerrungen  $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$  bleibt somit konstant (Bild 4-links). Das nächste Spannungszinkrement wird bei gleichbleibender Verzerrungsgeschwindigkeit zu

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{T}_b &= \mathbf{h}(\mathbf{T}_b, \mathbf{D}_p) \cdot \Delta t \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{T}_a + \alpha\mathbf{T}_a, \mathbf{D}_p) \cdot \Delta t \\ &= \underbrace{(1 + \alpha)^n}_{\beta} \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{T}_a, \mathbf{D}_p)}_{\Delta\mathbf{T}_a} \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (16)$$

hat also die selbe Richtung wie das alte Spannungszinkrement  $\Delta\mathbf{T}_a$  nur eine andere Größe. Die Spannungen bleiben auf dem proportionalen Spannungspfad (Bild 6).

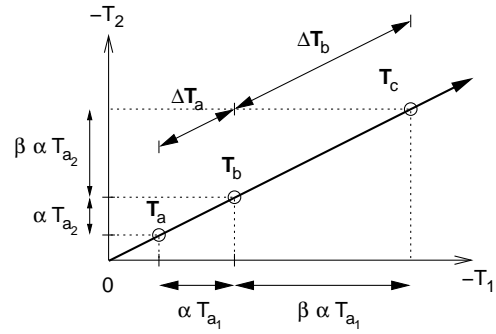


Bild 6. Proportionaler Spannungspfad.  
Fig. 6. Proportional stress path.

Ein hypoplastisches Stoffgesetz  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  muss homogen in der Spannung  $\mathbf{T}$  sein.

## 2.2 Triaxialversuch

Beim Triaxialversuch wird eine zylindrische Bodenprobe bei konstanter horizontaler Spannung  $T_2 = T_3$  in vertikaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit  $D_1 = \dot{\varepsilon}_1$  zusammengedrückt. Dabei entsteht in der Probe die vertikale Spannung  $T_1$  (Bild 7).

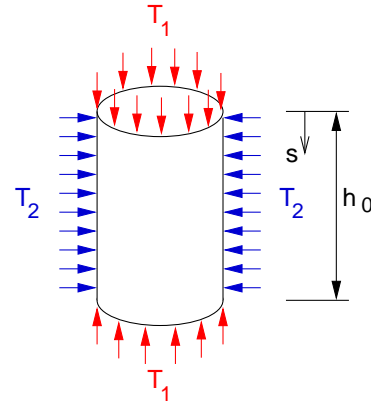


Bild 7. Triaxialversuch schematisch.  
Fig. 7. Triaxial test schematically.

### 2.2.1 Vereinfachte Spannungs-Verzerrungs-Kurven

Der qualitative Verlauf der Vertikalspannung  $T_1$  über die Vertikalstauchung  $\varepsilon_1 = -s/h_0 = \dot{\varepsilon}_1 t$  für zwei bestimmte Horizontalspannungen  $T_{a2}$  und  $T_{b2} = \alpha T_{a2}$  ist in Bild 8 dargestellt. In erster Näherung fallen die normierten Kurven  $T_1/T_2$  zusammen.

Das Zusammenfallen der normierten Kurven bedeutet

$$\frac{T_{a1}}{T_{a2}} = \frac{T_{b1}}{T_{b2}} = \frac{T_{b1}}{\alpha T_{a2}}, \quad (17)$$

und damit

$$T_{b1} = \alpha T_{a1}. \quad (18)$$

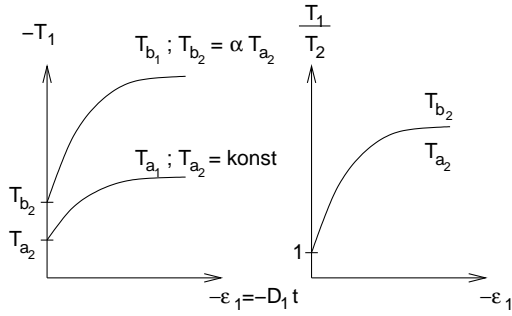


Bild 8. Vertikalspannungsverlauf beim Triaxialversuch, erste Näherung.  
 Fig. 8. First approximation to the stress-strain curve of a triaxial test.

Also ist

$$\mathbf{T}_b = \alpha \mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \alpha T_{a1} & 0 \\ 0 & \alpha T_{a2} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Dies gilt auch für die Zeitableitung

$$\dot{\mathbf{T}}_b = \alpha \dot{\mathbf{T}}_a \quad (20)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}_b, \mathbf{D}) = \alpha \mathbf{h}(\mathbf{T}_a, \mathbf{D}) \quad (21)$$

$$\mathbf{h}(\alpha \mathbf{T}_a, \mathbf{D}) = \alpha \mathbf{h}(\mathbf{T}_a, \mathbf{D}). \quad (22)$$

Das bedeutet, dass die Funktion homogen erster Ordnung in der Spannung  $\mathbf{T}$  ist, wenn normierte Spannungs-Verzerrungs-Kurven zusammenfallen.

Die Homogenität hat eine Auswirkung auf den Tangentenmodul der Spannungs-Verzerrungs-Kurve

$$E = \frac{dT_1}{d\epsilon_1} = \frac{dT_1/dt}{d\epsilon_1/dt} = \frac{\dot{T}_1}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{\dot{T}_1}{D_1} = \frac{h_1(\mathbf{T}, \mathbf{D})}{D_1}, \quad (23)$$

welcher offensichtlich von der Spannung abhängt.

Für ein in  $\mathbf{T}$  homogenes Stoffgesetz gilt

$$\begin{aligned} E(\lambda \mathbf{T}) &= \frac{h_1(\lambda \mathbf{T}, \mathbf{D})}{D_1} \\ &= \lambda^n \frac{h_1(\mathbf{T}, \mathbf{D})}{D_1} = \lambda^n E(\mathbf{T}) \end{aligned} \quad (24)$$

Ist das Stoffgesetz homogen erster Ordnung in  $\mathbf{T}$ , d.h.  $n = 1$ , dann ist die Steifigkeit proportional zur Spannung. Dies ist eine sehr oft verwendete Näherung für Böden.

Einfache hypoplastische Stoffgesetze  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  sind homogen erster Ordnung in der Spannung  $\mathbf{T}$  (Steifigkeit ist proportional zum Spannungsniveau).

## 2.2.2 Geschwindigkeitsunabhängigkeit

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung eines Bodens ist in erster Näherung von der Belastungsgeschwindigkeit unabhängig. Dies sollte auch vom Stoffgesetz beschrieben werden. Wird ein Triaxialversuch mit zwei Geschwindigkeiten  $D_1 = \dot{\epsilon}_1$  und  $\lambda D_1 = \lambda \dot{\epsilon}_1$  gefahren, soll die selbe Spannungs-Verzerrungs-Kurve resultieren. Das heißt der Tangentenmodul darf nicht von der Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  abhängen. Deshalb muss für die zwei verschiedenen Geschwindigkeiten im Triaxialversuch

$$\frac{h_1(\mathbf{T}, \mathbf{D})}{D_1} = \frac{h_1(\mathbf{T}, \lambda \mathbf{D})}{\lambda D_1} \quad (25)$$

gelten. Dies ist nur erfüllt wenn das Stoffgesetz homogen erster Ordnung in  $\mathbf{D}$  ist.

## 2.2.3 Be- und Entlasten

Wird im Triaxialversuch die Belastungsrichtung geändert, z.B. von Be- auf Entlasten, bedeutet das einen Vorzeichenwechsel in der Verzerrungsgeschwindigkeit. Hierbei muss sich die Steifigkeit ändern (Bild 9).

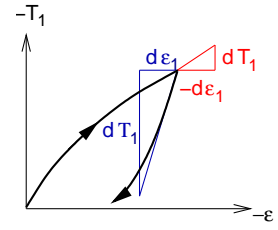


Bild 9. Wechsel der Steifigkeit bei Be- und Entlasten

Fig. 9. Difference between loading and unloading stiffness.

Es ist also

$$\frac{h_1(\mathbf{T}, \mathbf{D})}{D_1} \neq \frac{h_1(\mathbf{T}, -\mathbf{D})}{-D_1}, \quad (26)$$

d.h. die Funktion ist nur für positive  $\lambda$  homogen in  $\mathbf{D}$ .

In der Hypoplastizität wird die Norm

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\text{tr} \mathbf{D}^2} = \sqrt{\text{tr} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})} \quad (27)$$

verwendet, um den Wechsel der Steifigkeit bei Belastungswechsel zu modellieren. Die Norm ist wie der Absolutbetrag  $|x|$  positiv homogen erster Ordnung.

Ein hypoplastisches Stoffgesetz  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  ist positiv homogen erster Ordnung und nichtlinear in der Verzerrungsgeschwindigkeit.

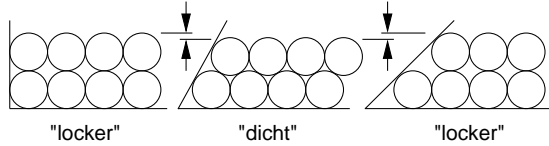


Bild 10. Scherbeanspruchung eines Bodens (granulares Material).

Fig. 10. Shearing in soil (granular material).

### 2.2.4 Volumenänderung

Boden besteht aus Feststoff (den sogenannten Körnern) und Porenraum (welcher mit Luft und Wasser gefüllt sein kann). Aus dieser granularen Struktur folgt seine sehr spezielle Volumenänderung bei Scherverformungen. Dies ist schematisch in Bild 10 dargestellt.

Eine Scherbeanspruchung verursacht eine Verschiebung der Körner. Wird eine lockere Probe (Bild 10-links) abgeschert, können sich die Körner in einen dichteren Zustand (weniger Porenraum) umlagern (Bild 10-Mitte). Wird die nun dichte Probe weitergeschert, müssen sich die Körner wieder umlagern (sozusagen aufgleiten). Der Boden wird wieder lockerer (Bild 10-rechts).

Die Volumenabnahme bei Scherbeanspruchung (vgl. geringere Probenhöhe in Bild 10-Mitte) wird Kontraktanz genannt, die Volumenzunahme wird Dilatanz genannt. Dieses Verhalten bedingt die Volumen-Verzerrungs-Kurve (Bild 11-unten) in einem Triaxialversuch.

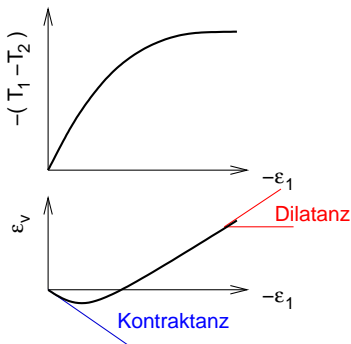


Bild 11. Triaxialversuch an einer mitteldichten Probe

Fig. 11. Triaxial test with a medium dense sample.

Die Modellierung der Kontraktanz und der Dilatanz wird von der Hypoplastizität gratis mitgeliefert. Die Konstanten können am volumetrischen Verhalten geeicht werden.

### 2.3 Objektivität

Wenn zwei Beobachter einen Triaxialversuch unter verschiedenen Winkeln beobachten, werden sie natürlich das gleiche Materialverhalten beobachten. Stellen wir uns vor, die Beobachter betrachten den Versuch um den Winkel  $\alpha$  verdreht (vgl. Bild 2), dann entspricht ihr verschiedener Blickwinkel mathematisch einer Koordi-

natentransformation mit der Matrix  $\mathbf{Q}$ , siehe Gl. (6). Der erste Beobachter sieht die Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  und misst die Spannung  $\mathbf{T}$  und der zweite die Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}' = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$  sowie die Spannung  $\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ . Die vom zweiten Beobachter gemessene Spannungsänderung muss die um  $\mathbf{Q}$  verdrehte vom ersten Beobachter gemessene Spannungsänderung sein

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{h}(\mathbf{T}', \mathbf{D}') = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{T}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mathbf{Q}^T \quad (28)$$

Daraus folgt die Bedingung für die Objektivität

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{T}', \mathbf{D}') &= \mathbf{Q} \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{h}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q} \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (29)$$

die Matrix  $\mathbf{Q}$  muss also aus der Funktion  $\mathbf{h}$  herausgehoben werden können.

Alle Stoffgesetze  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  müssen objektiv sein.

## 3 Hypoplastizität

Bis jetzt haben wir allgemeine Eigenschaften der Hypoplastizität gesammelt, ohne auf eine spezielle Formulierung einzugehen. Nun werden wir genau untersuchen, wie die Funktion  $\mathbf{h}$  aussehen muss, d.h. welche Terme sie beinhaltet.

### 3.1 Darstellungstheorem

Eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  kann nach dem Theorem von CAYLEY-HAMILTON durch eine Summe von Potenzen von  $\mathbf{X}$  bis zur zweiten Potenz exakt dargestellt werden

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{X} + a_2 \mathbf{X}^2, \quad (30)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  sind Funktionen von Invarianten von  $\mathbf{X}$ , z.B.  $\text{tr } \mathbf{X}$ ,  $\text{tr } \mathbf{X}^2$ , ...

In Erweiterung kann eine vektorwertige Funktion mit zwei Argumenten dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) &= a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{D} + a_3 \mathbf{T}^2 \\ &+ a_4 \mathbf{D}^2 + a_5 \cdot (\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) \\ &+ a_6 \cdot (\mathbf{T}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{T}) \\ &+ a_7 \cdot (\mathbf{T}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}^2) \\ &+ a_8 \cdot (\mathbf{T}^2\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{T}^2) \end{aligned} \quad (31)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  sind Funktionen von gemischten Invarianten der Argumente, z.B.  $\text{tr } \mathbf{D}$ ,  $\text{tr } \mathbf{T}$ ,  $\text{tr } \mathbf{D}^2$ ,  $\text{tr } \mathbf{T}^2$ ,  $\text{tr } \mathbf{T}\mathbf{D}$ ,  $\text{tr } (\mathbf{T}^2\mathbf{D})$ ,  $\text{tr } (\mathbf{T}\mathbf{D}^2)$ , ...

### 3.2 Wahl der Terme

Die Kunst der Stoffgesetzentwickler und Entwicklerinnen ist nun, die richtigen Terme auszuwählen. Dies wurde erstmalig von KOLYMBAS erfolgreich unternommen [7].

Die Wahl der *richtigen* Terme ist im Prinzip mit der Wahl der *richtigen* Fließfläche und Fließregel von elastoplastischen Stoffgesetzen vergleichbar. Physikalische und mechanische Argumente reduzieren die unendliche Anzahl von möglichen Termen, ebenso wie die unendliche Anzahl von möglichen Fließflächen sowie Fließregeln.

Aus dem Materialverhalten von kohäsionslosen Böden in Laborversuchen und allgemeinen mechanischen Anforderungen an Stoffgesetze folgen vier grundlegende mathematischen Eigenschaften welche die Hypoplastizität  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  erfüllen muss:

1. homogen in  $\mathbf{T}$  (für einfache Versionen sogar homogen erster Ordnung)
2. positiv homogen erster Ordnung in  $\mathbf{D}$  (Geschwindigkeitsunabhängigkeit)
3. nichtlinear in  $\mathbf{D}$  (Terme mit  $\|\mathbf{D}\|$  für wechselnde Be- und Entlastungssteifigkeit)
4. Objektivität

Diese Eigenschaften reduzieren die Anzahl der möglichen Terme beträchtlich.

Die meisten hypoplastischen Stoffgesetze bestehen aus vier Termen. Eine der ersten Versionen von WU und KOLYMBAS [12] hat vier Materialkonstanten  $C_1$  bis  $C_4$ :

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = C_1(\text{tr } \mathbf{T})\mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D})}{\text{tr } \mathbf{T}} \mathbf{T} + C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr } \mathbf{T}} \sqrt{\text{tr } \mathbf{D}^2} + C_4 \frac{\mathbf{T}^{*2}}{\text{tr } \mathbf{T}} \sqrt{\text{tr } \mathbf{D}^2} \quad (32)$$

Wir finden hier z.B. den Koeffizienten  $a_2 = C_1(\text{tr } \mathbf{T})$  des allgemeinen Darstellungstheorems (31) wieder.

Die Gleichung wirkt zwar im ersten Moment kompliziert, kann aber mit einfacher Matrizenrechnung ausgewertet werden, und ist deshalb leicht implementierbar.

### 3.3 Kalibrierung

Ein Stoffgesetz ist nur dann wirklich von praktischem Nutzen, wenn die Materialkonstanten auch bestimmbar sind. Aufgrund der einfachen Struktur hypoplastischer Stoffgesetze kann dies direkt durch eine Anpassung an Versuchsergebnisse geschehen. Im Folgenden wird eine Kalibrierungsmöglichkeit für das hypoplastische Stoffgesetz Gl. (32) mit Hilfe des Triaxialversuches skizziert.

Im Triaxialversuch treten nur Hauptspannungen auf. Die Horizontalspannung  $T_2 = T_3$  wird konstant gehalten

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

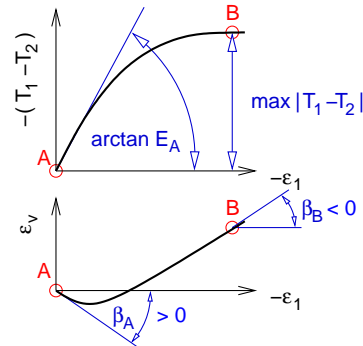


Bild 12. Kalibrierung an Triaxialversuchsergebnissen.

*Fig. 12. Calibration of the hypolastic law with triaxial test results.*

Die Verzerrungsgeschwindigkeit ist

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

worin  $\dot{\epsilon}_1$  vom Versuchsgerät vorgegeben wird. Weil das Stoffgesetz geschwindigkeitsunabhängig ist, kann  $\dot{\epsilon}_1 = -1$  gesetzt werden. Die volumetrische Dehnung der Probe ist  $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$ . Damit kann die Querdehnung  $\epsilon_2$  aus der Neigung  $\beta$  der Volumen-Verzerrungs-Kurve (Bild 12-unten) bestimmt werden

$$\beta = \arctan \frac{\epsilon_v}{\epsilon_1} = \arctan \left( 1 + 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right), \quad (35)$$

woraus

$$\epsilon_2 = -\frac{\epsilon_1}{2}(1 - \tan \beta) \quad (36)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = -\frac{\dot{\epsilon}_1}{2}(1 - \tan \beta) \quad (37)$$

folgen. Damit ist  $\mathbf{D}$  in jeder Versuchsphase bestimmt:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \tan \beta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \tan \beta) \end{pmatrix} \quad (38)$$

Darin sind die Vorzeichen für den Winkel  $\beta$  nach Bild 12 zu berücksichtigen.

Speziell betrachten wir nun den Beginn (Punkt A in Bild 12) und das Ende des Versuches bei erreichter Materialfestigkeit (Punkt B in Bild 12). Zu Versuchsbeginn sind alle Spannungen gleich

$$\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} T_2 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

und die Steigung der Spannungs-Verzerrungs-Kurve ist gleich dem Anfangsmodul  $E_A$ . Damit muss für die Vertikalspannung  $\dot{T}_1 = E_A \dot{\epsilon}_1$  gelten. Die Horizontalspannung wird konstant gehalten, ihre Rate ist deswegen Null:

$$\dot{\mathbf{T}}_A = \begin{pmatrix} E_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Am Ende des Versuches kann die Spannung  $T_1$  nicht weiter gesteigert werden. Die Spannungs-Verzerrungs-Kurve wird für diese maximale Vertikalspannung  $T_{B1}$  horizontal.

$$\mathbf{T}_B = \begin{pmatrix} T_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Die Spannungsrate wird zu Null

$$\dot{\mathbf{T}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Damit sind die Spannung  $\mathbf{T}$ , die Spannungsrate  $\dot{\mathbf{T}}$  und die Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  der Gleichung  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  für die beiden Punkte A und B bekannt. Für den Triaxialversuch kann  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  als zwei gekoppelte skalare Differentialgleichungen für die Spannungsraten  $\dot{T}_1$  und  $\dot{T}_2$  geschrieben werden. Das ergibt zwei Gleichungen für jeden Punkt A und B

$$\dot{T}_{A1} = h_1(T_{A1}, T_2, D_1, D_{A2}) = E_A D_1 = -E_A \quad (43)$$

$$\dot{T}_{A2} = h_2(T_{A1}, T_2, D_1, D_{A2}) = 0 \quad (44)$$

$$\dot{T}_{B1} = h_1(T_{B1}, T_2, D_1, D_{B2}) = 0 \quad (45)$$

$$\dot{T}_{B2} = h_2(T_{B1}, T_2, D_1, D_{B2}) = 0 \quad (46)$$

Das sind 4 skalare Gleichungen für die Konstanten  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$ , die in der Funktionsbezeichnung  $\mathbf{h}$  versteckt sind, vgl. Gl. (32).

Die maximale Spannung  $T_{B1}$  im Triaxialversuche kann durch den Reibungswinkel des kohäsionslosen Materials ausgedrückt werden

$$\frac{T_{B1}}{T_2} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (47)$$

Die Materialparameter  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  können somit aus dem Reibungswinkel  $\varphi$ , dem Anfangsmodul  $E_A$  sowie dem Dilatanzwinkel  $\beta$  zu Versuchsbeginn und -ende bestimmt werden. Sie hängen also direkt mit geläufigen Kennwerten aus der Bodenmechanik zusammen.

#### 4 Ein genauerer Blick auf die Experimente

Leider sind kohäsionslose Böden doch etwas komplizierter als bis jetzt vorgestellt. Zwei weitere Eigenschaften sollten von guten Stoffgesetzen berücksichtigt werden.

#### 4.1 Barotropie

Barotropie ist die Druckabhängigkeit der Bodeneigenschaften, wobei mit Druck die Summe der Hauptspannungen gemeint ist. So ist zum Beispiel der Reibungswinkel eines Bodens spannungsabhängig, also keine Bodenkonstante! Die Druckabhängigkeit zeigt sich im Triaxialversuch dadurch, dass normierte Spannungs-Verzerrungs-Kurven nicht zusammen fallen (Bild 13).

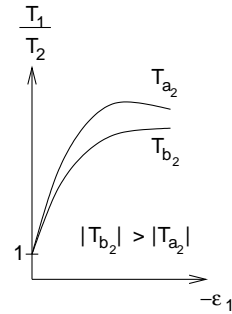


Bild 13. Triaxialversuche mit unterschiedlichen Seitenspannungen.

Fig. 13. Triaxial tests with different lateral stresses.

Das bedeutet, dass die Steifigkeit nicht proportional zum Spannungsniveau ist, und der Reibungswinkel spannungsabhängig ist. Dies ist in neueren hypoplastischen Stoffgesetzen durch die Homogenität  $n$ -ter Ordnung in der Spannung

$$\mathbf{h}(\lambda \mathbf{T}, \mathbf{D}) = \lambda^n \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \quad (48)$$

mit  $0 < n < 1$  berücksichtigt.

#### 4.2 Pyknotropie

Pyknotropie ist der Einfluss der Lagerungsdichte auf die Bodeneigenschaften. Dichte Böden sind steifer und haben eine höhere Festigkeit als lockere Proben. Dichte Proben zeigen eine ausgeprägte Dilatanz, wohingegen lockere Proben eine ausgeprägte Kontraktanz aufweisen. Stellvertretend kann dies in Triaxialversuchen an Proben mit verschiedener Porenzahl  $e$  beobachtet werden, siehe Bild 14. (Die Porenzahl ist das Verhältnis des Volumenanteiles der Poren zum Volumenanteil des Feststoffes in einer Bodenprobe.)

Um dies zu modellieren, muss die Porenzahl als weitere Zustandsvariable aufgenommen werden

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e). \quad (49)$$

#### 4.3 Isotrope Kompression

Wird kohäsionsloser Boden isotrop zusammengedrückt, d.h. bei einer Spannung  $T_1 = T_2 = T_3$  so verringert sich sein Volumen und damit seine Porenzahl (Bild 15)

$$\dot{e} = (1 + e) \cdot \text{tr} \mathbf{D} = (1 + e) \cdot (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3). \quad (50)$$



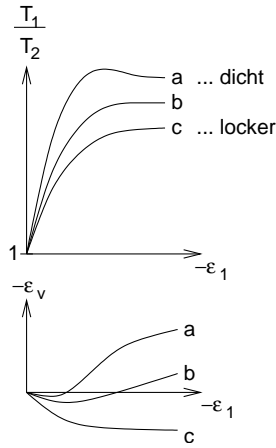


Bild 14. Triaxialversuche mit gleicher Seitenspannung  $T_2$  und verschiedenen Anfangsporenzahlen  $e_0^a < e_0^b < e_0^c$ .  
*Fig. 14. Triaxial test with the same lateral stress  $T_2$  and different initial void ratio  $e_0^a < e_0^b < e_0^c$ .*

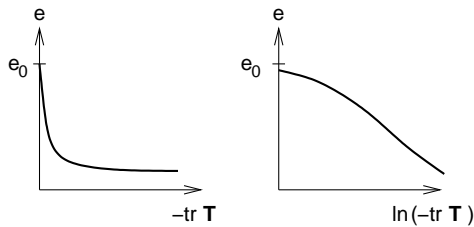


Bild 15. Porenzahlentwicklung bei idealer Kompression  $T_1 = T_2 = T_3$ .  
*Fig. 15. Evolution of the void ratio in ideal compression  $T_1 = T_2 = T_3$ .*

Für die Anfangslagerungsdichte  $e_0$  bei  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  kann die Porenzahlentwicklung mit einem exponentiellen Kompressionsgesetz beschrieben werden [2, 5]

$$\frac{e}{e_0} = \exp \left[ - \left( \frac{-\text{tr } \mathbf{T}}{h_s} \right)^n \right], \quad (51)$$

worin  $h_s$  die sogenannte Granulathärte ist. Sie kann wie der Exponent  $n$  aus dem Ödometerversuch bestimmt werden.

#### 4.4 Kritische Porenzahl

Wird ein Boden in zwei verschiedenen Lagerungsdichten im Triaxialversuch bei gleicher Seitenspannung  $T_2$  abgeschert, ändert sich die Porenzahl während des Versuchs wie in Bild 16. Nach einem langen Scherweg erreichen beide Proben die gleiche kritische Porenzahl  $e_c$ .

Dies kritische Porenzahl hängt vom Druckniveau  $-\text{tr } \mathbf{T} = -(T_{11} + T_{22} + T_{33})$  ab. Werden zwei Proben eines Bodens gleicher Anfangsporenzahl  $e_0$  mit verschiedenen Seitenspannungen  $T_2$ , also unter verschiedenem Druckniveau, abgeschert,

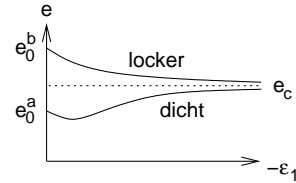


Bild 16. Porenzahlentwicklung in Triaxialversuchen mit gleicher Seitenspannung  $T_2$  und verschiedenen Anfangsporenzahlen  $e_0^a < e_0^b$ .  
*Fig. 16. Evolution of the void ratio in triaxial tests with different initial void ratios  $e_0^a < e_0^b$  and the same lateral stress  $T_2$ .*

dann erreichen die Proben verschiedene kritische Porenzahlen  $e_c^a > e_c^b$ , für  $-\text{tr } \mathbf{T}_a < -\text{tr } \mathbf{T}_b$  (Bild 17).

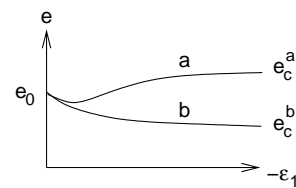


Bild 17. Porenzahlentwicklung in Triaxialversuchen mit gleicher Anfangsporenzahl  $e_0$  und verschiedenem Druckniveau  $-\text{tr } \mathbf{T}_a < -\text{tr } \mathbf{T}_b$ .  
*Fig. 17. Evolution of the void ratio in triaxial tests with the same initial void ratio  $e_0$  and different pressure levels  $-\text{tr } \mathbf{T}_a < -\text{tr } \mathbf{T}_b$ .*

Die Druckabhängigkeit der kritischen Porenzahl kann ebenfalls durch das Kompressionsgesetz beschrieben werden [5]

$$\frac{e_c}{e_{c0}} = \exp \left[ - \left( \frac{-\text{tr } \mathbf{T}}{h_s} \right)^n \right], \quad (52)$$

worin  $e_{c0}$  die kritische Porenzahl beim Druckniveau Null ist. Sie ist ungefähr gleich der im Labor ermittelbaren maximalen Porenzahl  $e_{c0} \approx e_{max}$ .

#### 4.5 Grenzen der Porenzahl

Boden kann nicht mit beliebigen Porenzahlen vorliegen (Bild 18).

Der Bereich der möglichen Porenzahl ist nach oben durch  $e_i$  und nach unten durch  $e_d$  beschränkt. Diese beiden Grenzen sind ebenfalls druckabhängig [5]

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[ - \left( \frac{-\text{tr } \mathbf{T}}{h_s} \right)^n \right], \quad (53)$$

worin  $e_{d0}$  ungefähr gleich der im Labor ermittelbaren minimalen Porenzahl  $e_{d0} \approx e_{min}$  ist. Die Obergrenze ist  $e_{i0} \approx 1,2e_{max}$ .

Diese Beziehungen sind in moderne Versionen der Hypoplastizität implementiert. Ist der Exponent  $n < 1$ , ist das Stoffgesetz nicht mehr homogen erster Ordnung in der Spannung. Dadurch

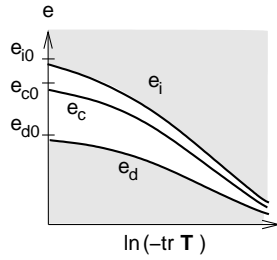


Bild 18. Möglicher Bereich der Porenzahl bei verschiedenem Druckniveau:  $e_d < e < e_i$ .  
 Fig. 18. Pressure-level-dependent admissible range of void ratio  $e_d < e < e_i$ .

wird die Barotropie berücksichtigt. Pyknotropie wird über die Einführung von  $e$  als zusätzliche Zustandsvariable, welche in physikalischen Grenzen liegen muss, modelliert.

Barotropie und Pyknotropie werden über die Einführung der Porenzahl als Zustandsvariable mit spannungsabhängigen physikalischen Grenzen modelliert.

#### 4.6 Grenzbedingung aus Experimenten

Im kritischen Zustand kann der Boden für reine Scherungen  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$  (Volumen bleibt konstant) keine weiteren Spannungen aufnehmen  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  (vgl. horizontales Plateau der Spannungs-Verzerrungs-Kurve im Triaxialversuch Bild 8).

Wir zeichnen alle Punkte im Spannungsraum für die gilt:  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  für beliebige  $\mathbf{D}$  mit  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$ . Diese Punkte liegen auf einer Fläche (Bild 19).

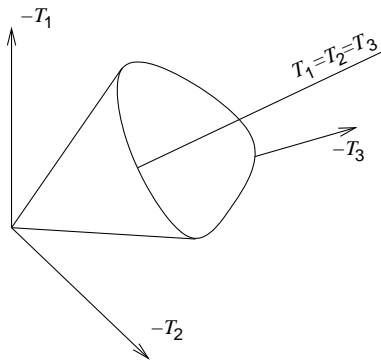


Bild 19. Grenzbedingung für kritische Zustände:  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  und  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$ .  
 Fig. 19. Critical state surface:  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  and  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$ .

Der Schnitt dieser Fläche mit einer Deviatorenebene, das ist eine Ebene senkrecht zur hydrostatischen Achse  $T_1 = T_2 = T_3$ , ergibt eine geschlossene Kurve für die Grenzbedingung. Für Sand ist die Grenzbedingung nach MATSUOKA-NAKAI (Bild 20) experimentell gut belegt.

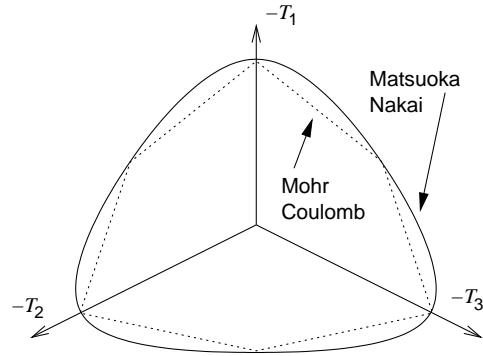


Bild 20. Grenzbedingung nach MATSUOKA-NAKAI für kritische Zustände.  
 Fig. 20. MATSUOKA-NAKAI critical state surface.

Diese Grenzbedingung kann mit der normierten Deviatorspannung  $\hat{\mathbf{T}}^* = \mathbf{T}^*/\text{tr } \mathbf{T}$  ausgedrückt werden

$$f = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\mathbf{T}}^* \cdot \hat{\mathbf{T}}^*) - F \frac{4 \sin \varphi_c}{3(3 - \sin \varphi_c)^2} = 0, \quad (54)$$

worin  $\varphi_c$  der kritische Reibungswinkel des Materials ist, welcher dem Böschungswinkel eines Schüttkegels entspricht. Er ist in etwa gleich dem COULOMB'schen Reibungswinkel. Die Form der Grenzbedingung wird über den Faktor

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \psi + \frac{2 - \tan^2 \psi}{2 + \sqrt{2} \tan \psi \cos 3\vartheta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \psi \quad (55)$$

mit den Winkeln nach Bild 21

$$\tan \psi := \sqrt{3} \|\hat{\mathbf{T}}^*\| \quad (56)$$

und

$$\cos 3\vartheta := -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}^* \cdot \hat{\mathbf{T}}^* \cdot \hat{\mathbf{T}}^*)}{[\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}^* \cdot \hat{\mathbf{T}}^*)]^{3/2}} \quad (57)$$

beschrieben [10].

Nun kann ein hypoplastisches Stoffgesetz aus 4 Termen gefunden werden, sowie dessen 4 Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  so bestimmt werden, dass die Grenzbedingung nach MATSUOKA-NAKAI eingehalten wird [1, 2, 10].

Moderne hypoplastische Stoffgesetze sind an experimentelle Grenzbedingungen angepasst.

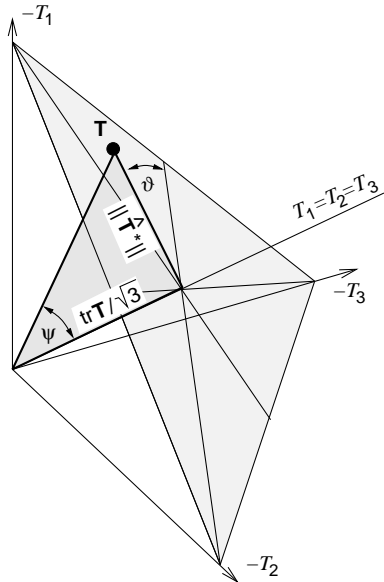


Bild 21. Spannungspunkt auf einer Deviatorenebene des Spannungsraumes.

Fig. 21. Stress point on a deviatoric plane of the stress space.

## 5 Eine vollständige Version der Hypoplastizität

Es gibt mehrere Versionen der Hypoplastizität, ebenso wie es mehrere elastoplastische Stoffgesetze gibt. Es hängt von den in der jeweiligen Aufgabenstellung maßgebenden Bodeneigenschaften ab, welche Version geeignet ist. Die einfache Version Gl. (32) von WU [11] vernachlässigt Barotropie und Pyknotropie. Die weiterentwickelte Version von VON WOLFFERSDORFF [10] berücksichtigt dies, und liefert deswegen schon sehr gute Ergebnisse. Sie eignet sich aber leider nur bedingt für Berechnungen mit zyklischer Belastung. Dieses Probleme sind in der neuesten Version von NIEMUNIS und HERLE [8] weitgehend behoben.

Hier wird die Version von VON WOLFFERSDORFF vorgestellt, weil viele Probleme in der Geotechnik nicht zyklisch sind. Diese Version ist noch halbwegs einfach zu lesen, und vor allem sind die Materialparameter sehr gut und sehr einfach bestimmbar.

In Berechnungen mit dem hypoplastischen Stoffgesetz müssen die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e) \quad (58)$$

$$\dot{e} = (1 + e) \cdot \text{tr } \mathbf{D} \quad (59)$$

simultan über die Zeit integriert werden (Wir erinnern uns daran, dass Gl. (58) für 6 skalare gekoppelte Differentialgleichungen steht).

Die Spannungsrate wird berechnet [10]:

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}, e) = f_b f_e \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} \left[ F^2 \mathbf{D} + a^2 \hat{\mathbf{T}} \text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}) + f_d a F(\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^*) \|\mathbf{D}\| \right], \quad (60)$$

mit

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\text{tr } \mathbf{T}}, \quad \hat{\mathbf{T}}^* = \hat{\mathbf{T}} - \frac{1}{3} \mathbf{1}, \quad (61)$$

und

$$a := \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c} \quad (62)$$

Der Faktor  $F$  stellt die Kalibrierung an die MATSUOKA-NAKAI Grenzbedingung dar, siehe Gl. (55). Mit den Faktoren  $f_d$ ,  $f_e$  und  $f_b$  werden Barotropie und Pyknotropie modelliert:

$$f_d = \left( \frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad (63)$$

$$f_e = \left( \frac{e_c}{e} \right)^\beta \quad (64)$$

$$f_b = \frac{h_s}{n} \left( \frac{e_{i0}}{e_{c0}} \right)^\beta \frac{1 + e_i}{e_i} \left( \frac{-\text{tr } \mathbf{T}}{h_s} \right)^{1-n} \times \left[ 3 + a^2 - a\sqrt{3} \left( \frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \right]^{-1}, \quad (65)$$

worin  $e_i$ ,  $e_c$  und  $e_d$  die druckabhängigen Grenzen der möglichen Porenzahlen nach Gl. (53) sind, und  $e_c$  die druckabhängige kritische Porenzahl nach Gl. (52) ist.

Dieses Stoffgesetz hat 8 Stoffparameter: den kritischen Reibungswinkel  $\varphi_c$ , die Granulathärte  $h_s$ , die Grenzporozahlen  $e_{i0}$ ,  $e_{c0}$  und  $e_{d0}$ , sowie die Exponenten  $n$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ . Diese Konstanten können mit einfachen Index- und Elementversuchen bestimmt werden [6].

## 6 Zusammenfassung

Hypoplastische Stoffgesetze wirken auf den ersten Blick kompliziert. In ihrer Anwendung reduzieren sich die Berechnungen auf einfache Vektorrechnungen und numerische Zeitintegration. Aufgrund der geschlossenen Formulierung können hypoplastische Stoffgesetze sehr leicht in bestehende Computercodes implementiert werden.

Ein Vorteil ist, dass der Zustand des Bodens nur durch die Spannung und die Porenzahl beschrieben wird. Diese Werte sind gut definiert und lassen sich für den Beginn der Berechnung einigermaßen vernünftig ermitteln. Es werden keine weiteren inneren Variablen verwendet, deren Anfangswerte sehr schwer festzulegen wären.

Eine besondere Stärke ist, dass die Materialparameter aus einfachen Laborversuchen sehr robust bestimmt werden können. Die Anzahl der

Parameter ist auch verhältnismäßig gering, im Vergleich zu den vielen komplizierten mechanischen Eigenschaften, die mit der Hypoplastizität modelliert werden:

- volle Nichtlinearität
- Anelastizität
- volumetrisches Verhalten
- Barotropie
- Pyknotropie
- Entfestigung

## Literatur

- [1] E. Bauer. Constitutive modelling of critical states in hypoplasticity. In *Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V*, Davos, Switzerland, 1995. Balkema.
- [2] E. Bauer. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils and Foundations*, 36(1):13–26, 1996.
- [3] W. Fellin. Hypoplastizität für Einsteiger. *Bautechnik*, 77(1):10–14, 2000.
- [4] M. Goldscheider. Grenzbedingung und Fließregel von Sand. *Mechanics Research Communications*, 3:463–468, 1976.
- [5] G. Gudehus. A comprehensive constitutive equation for granular material. *Soils and Foundation*, 36(1):1–12, 1996.
- [6] I. Herle. Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste. Heft 151, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Universität Karlsruhe, 2000.
- [7] D. Kolymbas. A rate-dependent constitutive equation for soils. *Mechanics Research Communications*, 4:367–372, 1977.
- [8] A. Niemunis and I. Herle. Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Frictional and Cohesive Materials*, 2:279–299, 1997.
- [9] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 1965.
- [10] P.-A. von Wolffersdorff. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1:251–271, 1996.
- [11] W. Wu. Hypoplastizität als mathematisches Modell zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe. Veröffentlichung des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 129, 1992.

- [12] W. Wu and D. Kolymbas. Numerical testing of the stability criterion for hypoplastic constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 9:245–253, 1990.

## Autoren dieses Beitrages:

Dr. Wolfgang Fellin, Prof. Dr. Dimitrios Kolymbas: Universität Innsbruck, Institut für Geotechnik und Tunnelbau, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck, Österreich