

Konzepte der Barodesie - Ergänzungen

Gertraud Medicus, Wolfgang Fellin und Fabian Schranz

1 Begriffe und Notation

Spannungen und Verzerrungen folgen der mechanischen Vorzeichenkonvention: Druckspannungen und Stauchungen sind negativ definiert. Die Hauptverzerrungen sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Die Hauptspannungen sind $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ mit σ_1 als betragsmäßig größte Hauptspannung. Da hier nur effektive Spannungen betrachtet werden, wird der Einfachheit halber der Strich bei den effektiven Spannungen weggelassen.

Deviatorspannung: Die Deviatorspannung q unter axialsymmetrischen Bedingungen ($\sigma_2 = \sigma_3$) ist $q = -(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Effektiver mittlerer Druck: $p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Porenzahl: Die Porenzahl e ist das Verhältnis von Poren- zu Kornvolumen, d. h. $e = \frac{V_p}{V_s}$.

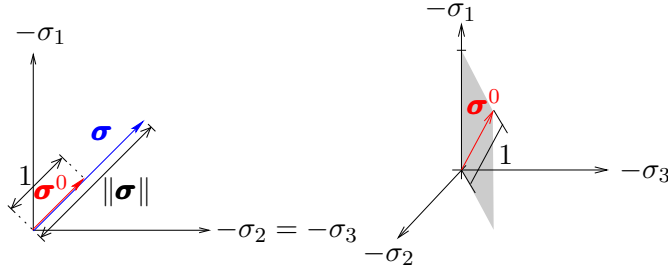
Dilatanz: Unter der Dilatanz versteht man die Volumenvergrößerung des Bodens unter einer Scherdeformation bei konstantem Druck.

Kontraktanz: Unter der Kontraktanz versteht man die Volumenverkleinerung unter einer Scherdeformation.

Norm eines Tensors $\|\mathbf{X}\|$: Die euklidische Norm eines Tensors ist $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{X}^2}$.

Normierter Tensor \mathbf{X}^0 : Der normierte Tensor ist der Tensor dividiert durch seine Norm: $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$. Die normierte Spannung $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}/\|\boldsymbol{\sigma}\|$ kann im Hauptspannungsraum als Vektor dargestellt werden. Dieser Vektor hat die Länge 1 und zeigt von $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$

auf σ^0 . Daher werden (normierte) Tensoren als Richtungsvektoren im Hauptspannungsraum bezeichnet.



Stretchingtensor bzw. Deformationsratentensor \mathbf{D} : Der Stretchingtensor \mathbf{D} ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} = v_{i,j}$.

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Für Quaderverformungen ist die Zeitableitung der Tensoren der logarithmischen Verzerrungen $\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ gleich dem Stretchingtensor \mathbf{D} [5]. Allgemein gilt für kleine Verzerrungen: $\mathbf{D} \approx \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$: Die Zeitableitung der Spannungen $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ kann nach Zaremba/Jaumann wie folgt berechnet werden: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}$. \mathbf{W} ist der antisymmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten. Die sog. objektive¹ Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ beschreibt die vom Bezugssystem unabhängige Antwort des Materials auf Verformungen. Ein Materialmodell muss objektiv sein und liefert daher im Allgemeinen die objektive Spannungsrate. Für Quaderverformungen ist (wegen $\mathbf{W} = \mathbf{0}$) die objektive Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ gleich der Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, cf. [2, 7]. Da in diesem Text nur Quaderverformungen untersucht werden, wird die Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ verwendet.

Dilatanzmaß: In der Bodenmechanik sind verschiedene Maße für die Dilatanz bzw. Kontraktanz üblich. Hier werden $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}^0 = \dot{\epsilon}_1^0 + \dot{\epsilon}_2^0 + \dot{\epsilon}_3^0$ und $\tan \beta$ verwendet. $\tan \beta$ ist das Verhältnis der volumetrischen zur axialen Deformationsrate, d.h. $\tan \beta = -\dot{\epsilon}_{\text{vol}}/\dot{\epsilon}_1$.

Mobilisierter Reibungswinkel: $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\right)$

Proportionale Pfade: Proportionale Spannungspfade ($P\sigma P$) sind Spannungspfade bei denen jeweils das Verhältnis der Hauptspannungen konstant bleibt:

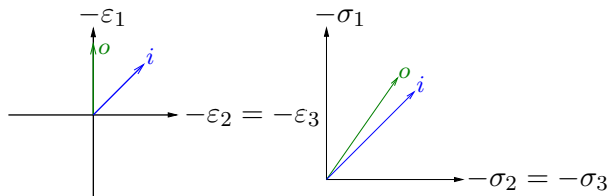
$\sigma_1/\sigma_2 = \text{const}$, $\sigma_2/\sigma_3 = \text{const}$, $\sigma_1/\sigma_3 = \text{const}$. Das wird oft mit $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = \text{const}$ abgekürzt. Proportionale Verzerrungspfade ($P\epsilon P$) sind Verzerrungspfade bei denen das Verhältnis der Hauptverzerrungen konstant bleibt: $\epsilon_1/\epsilon_2 = \text{const}$, $\epsilon_2/\epsilon_3 = \text{const}$ und $\epsilon_1/\epsilon_3 = \text{const}$. Ein Beispiel ist der isotrope Kompressionsversuch (*i*) mit dem proportionalen Verzerrungspfad $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ und damit $\epsilon_1/\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_2/\epsilon_3 = 1$, $\epsilon_1/\epsilon_3 = 1$

¹Der Ausdruck objektiv weist darauf hin, dass das Materialverhalten unabhängig von Bewegungen des Betrachters ist. Bei reiner Starrkörperrotation oder reiner Drehung des Betrachters gilt: $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$.

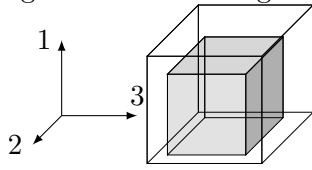
	Proportionale Verzerrungspfade $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Proportionale Spannungspfade $\mathbf{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$
Isotrope Kompression i	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3}$
Ödometrische Kompression o	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \end{pmatrix} \cdot \sigma_1$
Volumentreue Kompression (CU Versuch) c	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 \\ 0 & 0 & K_c \end{pmatrix} \cdot \sigma_1$
Volumentreue Extension $-c$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/K_c & 0 \\ 0 & 0 & 1/K_c \end{pmatrix} \cdot \sigma_1$

Tabelle 1: Beispiele von proportionalen Verzerrungs- und den entsprechenden proportionalen Spannungspfaden, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und $\sigma_2 = \sigma_3$ (axialsymmetrisch)

und $\varepsilon_1/\varepsilon_2/\varepsilon_3 = -1$. Der daraus resultierende proportionale Spannungspfad ist die hydrostatische Achse mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ und damit $\sigma_1/\sigma_2 = 1$, $\sigma_2/\sigma_3 = 1$, $\sigma_1/\sigma_3 = 1$ und $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = -1$. Ein anderes Beispiel für einen proportionalen Verzerrungspfad ist die ödometrische Kompression (o) mit verhinderter Querdehnung $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Der resultierende proportionale Spannungspfad ist der sog. K_0 -Pfad, der proportionale Spannungspfad der ödometrischen Kompression. In Tabelle 1 sind weitere proportionale Pfade zusammengefasst und mit Bildern veranschaulicht.

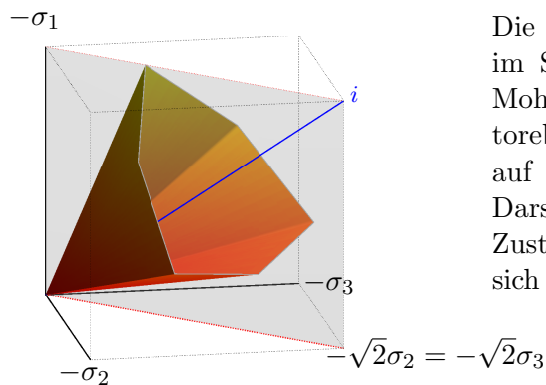


Quaderverformungen: Quaderverformungen sind Verformungen, bei welchen eine Quaderform erhalten bleibt. Bei solchen Deformationen bleiben die Hauptrichtungen der Spannungen und Verzerrungen unverändert:

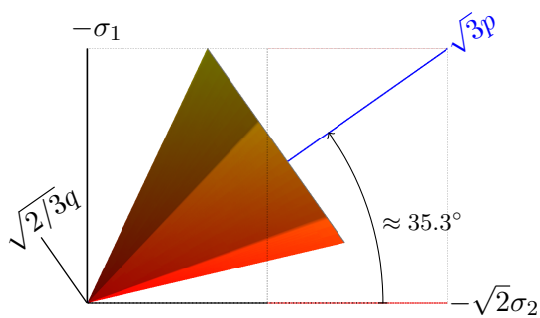


2 Darstellung von Spannungen

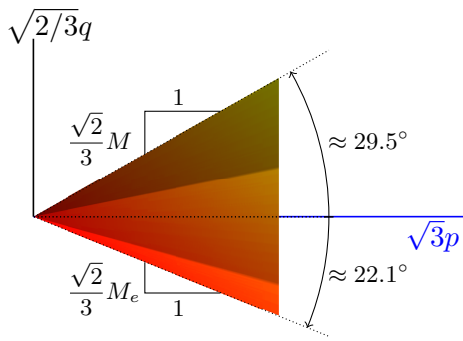
Die folgenden Abbildungen zeigen Diagramme, in denen Spannungen üblicherweise dargestellt werden. Die Mohr-Coulomb'sche Bruchbedingung (mit $\varphi = 30^\circ$ und $c = 0$) und die hydrostatische Achse ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) werden zur Veranschaulichung eingetragen.



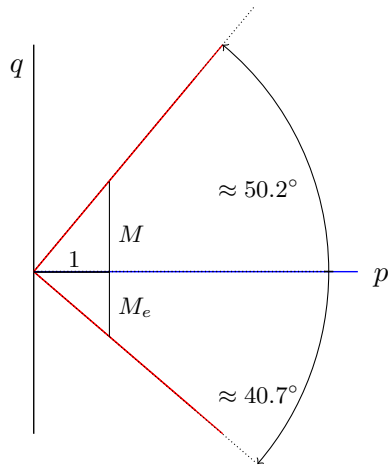
Die Abbildung zeigt eine 3D Darstellung im Spannungsraum. Die Grenzfläche nach Mohr-Coulomb ist, in einer sog. Deviatorenebene ($p = \text{const}$) geschnitten, normal auf die hydrostatische Achse (i). Für Darstellungen von axialsymmetrischen Zuständen (d. h. $\sigma_2 = \sigma_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) eignet sich sog. *Rendulic-Ebene* (graue Ebene).



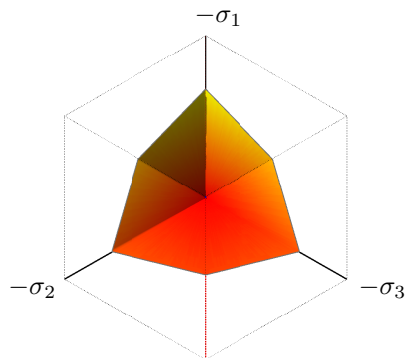
Die Abbildung zeigt eine Projektion der Mohr-Coulomb'schen Grenzfläche in die Rendulic-Ebene $\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2$. Die hydrostatische Achse ist zur $\sqrt{2}\sigma_2$ -Achse um $\arctan(1/\sqrt{2}) \approx 35.3^\circ$ geneigt. In der Rendulic Ebene können der mittlere Druck p und normal dazu die Deviatorspannung q als $\sqrt{3}p$ und $\sqrt{2/3}q$ gezeigt werden. Deviatorenebenen werden durch die Projektion als Geraden dargestellt.



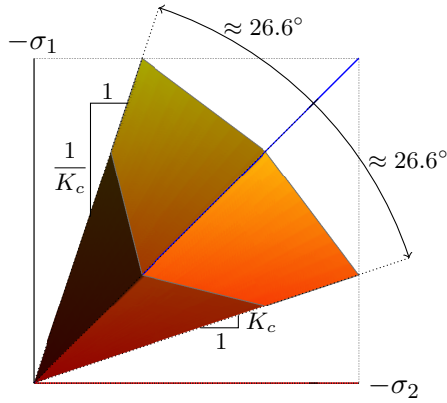
Nun wird die Rendulic Ebene um 35.3° im Uhrzeigersinn gedreht, sodass die hydrostatische Achse zur Abszisse wird. Die Grenzfläche für triaxiale Kompression stellt sich als Gerade mit der Neigung $\sqrt{2}/3 \cdot M$ dar, mit $M = 6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi)$. Für triaxiale Extension ist die Neigung $\sqrt{2}/3 \cdot M_e$ mit $M_e = -6 \sin \varphi / (3 + \sin \varphi)$. Für $\varphi = 30^\circ$ ergeben sich die Öffnungswinkel der Grenzfläche von $\approx 29.5^\circ$ für Kompressions- und von $\approx -22.1^\circ$ für Extensionsversuche.



Eine Skalierung der Abszisse um den Faktor $1/\sqrt{3}$ und der Ordinate um den Faktor $\sqrt{3}/2$ schafft die gewohnte Darstellung der Grenzfläche im p - q Diagramm als Geraden mit den Neigungen M und M_e . Für $\varphi = 30^\circ$ ist $M = 1.2$ und $M_e \approx -0.86$. Damit ergeben sich die Öffnungswinkel $\arctan M \approx 50.2^\circ$ und $\arctan M_e \approx -40.7^\circ$.



Projektion der Grenzfläche in eine Deviatorebene ($p = \text{const}$). Die hydrostatische Achse wird als Punkt dargestellt.



Hier wird die Projektion der Grenzfläche in die σ_1 - σ_2 Ebene gezeigt. Die hydrostatische Achse ist um 45° zur σ_2 -Achse geneigt. Für triaxiale Kompression ist die Grenzgerade um $1/K_c$ geneigt, unter triaxialer Extension ist die Neigung K_c mit $K_c = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$. Für $\varphi = 30^\circ$ ist $K_c = 1/3$. Der Öffnungswinkel der Grenzfläche ist in der Projektion in die σ_1 - σ_2 Ebene um die hydrostatische Achse für triaxiale Kompression und Extension rund $\pm 26.6^\circ$. Die Deviatorebene wird hier nicht als Gerade dargestellt! Man sieht in den geschnittenen Kegel hinein.

3 Zeitintegration

Ist keine analytische Integration der Spannungsrate $\dot{\sigma}$ möglich, muss numerisch integriert werden. Die numerische Integration wird hier eindimensional am Beispiel des expliziten Euler Verfahren (*forward Euler*) erklärt. Das Spannungsinkrement $\Delta\sigma^t$ zum Zeitpunkt t berechnet sich aus der Spannungsrate $\dot{\sigma}^t$

$$\dot{\sigma}^t = \chi \cdot \sigma^* \cdot \left(\frac{\sigma^t}{\sigma^*} \right)^\alpha \cdot \dot{\varepsilon}^t \quad (1)$$

multipliziert mit einem Zeitschritt Δt wie folgt:

$$\Delta\sigma^t = \dot{\sigma}^t \cdot \Delta t \quad (2)$$

Für den isotropen Kompressionsversuch folgt mit Gl. (1):

$$\dot{\sigma}^t \cdot \Delta t = \chi \cdot \sigma^t \cdot \underbrace{\dot{\varepsilon}^t \cdot \Delta t}_{\Delta\varepsilon^t} \quad (3)$$

Aus einem expliziten Eulerschritt folgt die Axialstauchung ε^{t+1} und eine Approximation für die Spannung zum Zeitpunkt $t+1$, vgl. Abbildung 3:

$$\varepsilon^{t+1} = \varepsilon^t + \Delta\varepsilon^t \quad (4)$$

$$\sigma^{t+1} = \sigma^t + \Delta\sigma^t \quad (5)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Zeitschritt Δt *hinreichend klein*² ist. Abbildung 3 zeigt

²Wie in Abbildung 3 zu sehen ist, resultieren aus zu großen Zeitschritten große Fehler in der Genauigkeit der Berechnung. Welcher Zeitschritt "klein genug" ist, ist abhängig von der Integrationsmethode und der Problemstellung. Bei der expliziten Euler Integration wird empfohlen, das Ergebnis mit dem aktuellen Zeitschritt Δt mit einem weiteren Ergebnis mit dem Zeitschritt $\Delta t/2$ zu vergleichen. Ist der Unterschied zwischen den Lösungen kleiner als der tolerierbare Fehler, ist der gewählte Zeitschritt ausreichend klein gewählt worden. Ist der Unterschied größer, muss der Zeitschritt weiter verkleinert werden. Bessere Integrationsmethoden beinhalten eine Fehlerschätzung [3, 4] und sind daher bevorzugt anzuwenden.

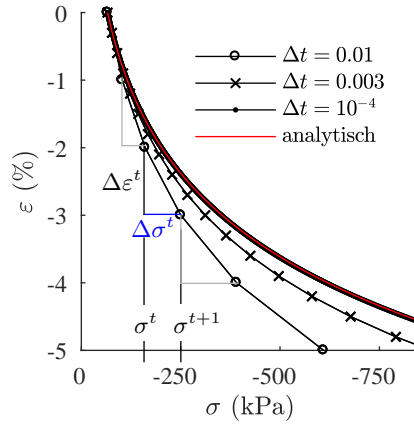


Abbildung 1: Isotroper Kompressionsversuch: Einfluss des Zeitschrittes $\Delta t = 0.01$, $\Delta t = 0.003$, $\Delta t = 10^{-4}$ und analytische Lösung (rote Linie, Gl. (6))

die analytische Lösung (rote Linie)

$$\ln \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \chi \cdot (\epsilon(t) - \epsilon_0) \quad (6)$$

nach Gl. (6) und die Integration von Gl. (1) mit verschiedenen großen Zeitschritten.

4 Anelastisches Bodenverhalten

Auf eine Umkehr der Belastungsrichtung reagiert der Boden anelastisch, d.h. die Steifigkeiten für Be- und Entlastung unterscheiden sich, vgl. isotroper Kompressionsversuch von Weald Ton (●) in Abbildung 2.³ Ändert man nun Gl. (1) wie folgt, ändert sich die Steifigkeit bei Entlastung (Änderung von $\dot{\epsilon} < 0$ und $\|\dot{\epsilon}\| = -\dot{\epsilon}$ zu $\dot{\epsilon} > 0$ und $\|\dot{\epsilon}\| = \dot{\epsilon}$), vgl. dazu auch [1]:

$$\dot{\sigma} = A \cdot \chi \cdot \sigma \cdot \dot{\epsilon} + (A - 1) \cdot \chi \cdot \sigma \cdot \|\dot{\epsilon}\| \quad (7)$$

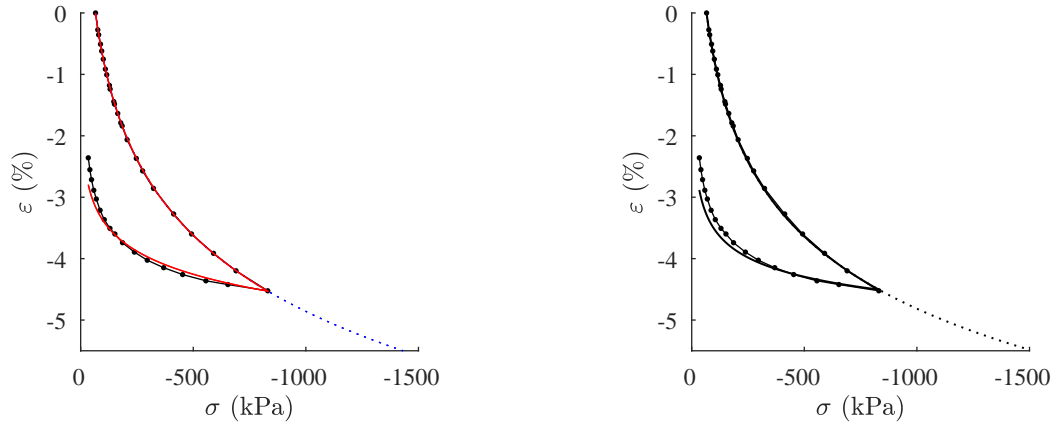
$$\text{bzw. } \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = A \cdot \chi \cdot \sigma + \text{sign}(\dot{\epsilon}) \cdot (A - 1) \cdot \chi \cdot \sigma \quad (8)$$

Für die Belastung ($\dot{\epsilon} < 0$ und $\|\dot{\epsilon}\| = -\dot{\epsilon}$) vereinfacht sich Gl. (7) zu Gl. (1). Für die Entlastung ($\dot{\epsilon} > 0$ und $\|\dot{\epsilon}\| = \dot{\epsilon}$) wird Gl. (7) zu:

$$\dot{\sigma} = (2A - 1) \cdot \chi \cdot \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (9)$$

³Es treten bleibende Verformungen auf, die im Rahmen der Plastizitätstheorie als plastische Verzerrungen interpretiert werden.

Mit $A = 2.1$ in Gl. (7) erhält man die gute Approximation an die Versuchsergebnisse in Abbildung 2(a). Berechnungen mit der vollständigen Version der Barodesie liefern die Ergebnisse in Abbildung 2(b).



(a) Unterschiedliche Steifigkeiten für Be- und Entlastung über die Betragsfunktion in Gl. (7) bzw. Gl. (8)

(b) Die vollständige Version der Barodesie für Ton [8] (durchgezogene schwarze Linie) liefert ähnliche Ergebnisse wie Gl. (7) in Abbildung (a).

Abbildung 2: Isotroper Kompressionsversuch: mathematische Umsetzung für unterschiedliche Steifigkeiten für Be- und Entlastung; Experimentelle Daten (.) von Weald Ton [6]

Danksagung

Dieser Text wurde durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung an Gertraud Medicus finanziert (Austrian Science Fund (FWF): P 28934-N32).

Literatur

- [1] W. Fellin. Hypoplastizität für Einsteiger. *Bautechnik*, 77(1):10–14, 2000. ISSN 1437-0999. doi: 10.1002/bate.200000030.
- [2] W. Fellin und D. Kolymbas. Hypoplastizität für leicht Fortgeschrittene. *Bautechnik*, 79(12):830–841, 2002. ISSN 1437-0999. doi: 10.1002/bate.200205940.
- [3] W. Fellin und A. Ostermann. Consistent tangent operators for constitutive rate-equations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26/12:1213–1233, 2002.

-
- [4] W. Fellin und A. Ostermann. Using constitutive models of the rate type in implicit finite-element calculations: error-controlled stress update and consistent tangent operator. In D. Kolymbas, editor, *Advanced Mathematical and Computational Geomechanics*. Springer, Berlin, 2003.
- [5] M. Gurtin und K. Spear. On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor. *International Journal of Solids and Structures*, 19:437–444, 1983.
- [6] D. Henkel. The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear. *Géotechnique*, 6:139–150, 1956.
- [7] D. Kolymbas. *Introduction to Hypoplasticity*. Number 1 in Advances in Geotechnical Engineering and Tunnelling. Balkema, Rotterdam, 2000.
- [8] G. Medicus und W. Fellin. An improved version of barodesy for clay. *Acta Geotechnica*, 12(2):365–376, 2017. ISSN 1861-1133. doi: 10.1007/s11440-016-0458-4. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11440-016-0458-4>.