

# Projektbericht

## Knuth-Bendix Vervollständigung (2010.189)

Harald Zankl

January 19, 2011

### 1 Einleitung

Die Knuth-Bendix Vervollständigung ist ein zentrales Verfahren in der Informatik. Für eine Menge von Gleichungen als Eingabe liefert das Verfahren (sofern erfolgreich) eine Menge von orientierten Gleichungen als Resultat. Somit können Berechnungen durch "Ersetzung gemäß orientierten Gleichungen" erfolgen. Im Zuge des Projektes wurde eine Software erstellt, welche dieses Verfahren halbautomatisch löst. Der Benutzer gibt die gewünschte Orientierung der Gleichung vor und die entwickelte Software führt die nötigen Vereinfachungsschritte automatisch durch. Diese Simplifizierungen sind zwar konzeptionell einfach, aber aufwändig und bei händischer Durchführung zudem fehleranfällig.

### 2 Motivation

Gegeben seien die drei Gleichungen:

$$(G1): (x \circ y) \circ z \approx x \circ (y \circ z) \quad (G2): x \circ e \approx x \quad (G3): x \circ x^{-1} \approx e$$

Die Terme  $(x \circ y) \circ e$  und  $x \circ y$  sind äquivalent, da der erste Term mithilfe der Gleichungen (G1-G3) in den anderen überführt werden kann, z.B.

$$(x \circ y) \circ e \stackrel{(G1)}{\approx} x \circ (y \circ e) \stackrel{(G2)}{\approx} x \circ y$$

Um die Terme  $x \circ x^{-1}$  und  $x^{-1} \circ x$  äquivalent zu zeigen, ist mehr Aufwand notwendig wie die nachstehende Kette von Gleichheiten zeigt.

$$\begin{aligned} x \circ x^{-1} &\stackrel{(G3)}{\approx} e \stackrel{(G3)}{\approx} (x^{-1} \circ e) \circ (x^{-1} \circ e)^{-1} \stackrel{(G1)}{\approx} x^{-1} \circ (e \circ (x^{-1} \circ e)^{-1}) \stackrel{(G2)}{\approx} \\ &\stackrel{(G2)}{\approx} x^{-1} \circ (e \circ x^{-1-1}) \stackrel{(G3)}{\approx} x^{-1} \circ ((x \circ x^{-1}) \circ x^{-1-1}) \stackrel{(G1)}{\approx} \\ &\stackrel{(G1)}{\approx} x^{-1} \circ (x \circ (x^{-1} \circ x^{-1-1})) \stackrel{(G3)}{\approx} x^{-1} \circ (x \circ e) \stackrel{(G2)}{\approx} \\ &\stackrel{(G2)}{\approx} x^{-1} \circ x \end{aligned}$$

Solche Äquivalenzen per Hand zu zeigen ist aus zwei Gründen schwierig. Einerseits ist unklar, ob die zwei untersuchten Terme überhaupt äquivalent sind, dh., ob solch eine Kette von Gleichheiten zwischen den Termen existiert. Falls dem so ist, kann diese Kette aber sehr lang sein und in jedem Schritt besteht eine Wahlmöglichkeit welche Regel angewendet werden soll.

Die Knuth-Bendix Vervollständigung schafft hier Abhilfe. Dieses Verfahren liefert für die Gleichungen (G1-G3) folgende Regeln (R1-R10) (orientierte Gleichungen):

$$\begin{array}{ll}
 (R1): & (x \circ y) \circ z \rightarrow x \circ (y \circ z) \\
 (R3): & x \circ x^{-1} \rightarrow e \\
 (R5): & x^{-1-1} \rightarrow x \\
 (R7): & e \circ x \rightarrow x \\
 (R9): & x^{-1} \circ (x \circ y) \rightarrow y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 (R2): & x \circ e \rightarrow x \\
 (R4): & x \circ (x^{-1} \circ z) \rightarrow z \\
 (R6): & x^{-1} \circ x \rightarrow e \\
 (R8): & e^{-1} \rightarrow e \\
 (R10): & (y \circ x)^{-1} \rightarrow x^{-1} \circ y^{-1}
 \end{array}$$

Die Äquivalenz der Terme  $x \circ x^{-1}$  und  $x^{-1} \circ x$  ist jetzt einfacher zu zeigen, da die Regeln nur mehr in eine Richtung angewendet werden können, z.B.,

$$x \circ x^{-1} \xrightarrow{(R3)} e \xleftarrow{(R6)} x^{-1} \circ x$$

Zudem können Terme jetzt auch als nicht äquivalent gezeigt werden, indem beide Terme so weit als möglich mit den Regeln (R1-R10) vereinfacht werden. Sind die Resultate unterschiedlich, so sind die Ausgangsterme nicht äquivalent wie nachstehende Kette zeigt:

$$x \circ x^{-1} \xrightarrow{(R3)} e \not\approx x \xleftarrow{(R2)} x \circ e \xleftarrow{(R6)} x \circ (x^{-1} \circ x)$$

### 3 Projektverlauf

Von Mai bis Juni 2010 wurde ein Prototyp erstellt, welcher die Knuth-Bendix Vervollständigung halbautomatisch durchführt. Dieses Verfahren erhält z.B. die Gleichungen (G1-G3) als Eingabe und liefert die Regeln (R1-R10) als Resultat.

Im Oktober 2010 wurde der Prototyp zu einem Kommandozeilenprogramm ausgebaut, welches bereits die gewünschte Funktionalität bot. Eine grafische Oberfläche sowie eine Java Applet Version (letztere war ursprünglich nicht vorgesehen) wurden im November sowie Dezember hinzugefügt. Das Programm trägt den Namen *Knuth-Bendix Completion Visualizer*, kurz KBCV.

Im Wintersemester 2010/2011 wurde diese Software bereits in der Vorlesung Termersetzungssysteme (VO3, 703209) eingesetzt. Nachfolgend ein paar Rückmeldungen zu dem Programm im O-Ton. Das Feedback ist in Englisch, da die Lehrveranstaltung in Englisch gehalten wird.

- Univ.-Prof. Dr. Aart Middeldorp (Lehrveranstaltungsleiter)  
*I found the tool very useful to prepare exercises and exam questions for the bachelor course Term Rewriting in WS 2010/2011.*

- Sarah Winkler, MSc (Lehrveranstaltungsleiter)  
*when applied in this year's TRS course, I think students could greatly benefit from the use of KBCV. The tool allows to gain experience with completion without having to bother with the tedious bookkeeping details. The interface is very clear and usable for both basic completion and its advanced version using interreduction. In particular, KBCV impressively illustrates the influence of the reduction order used.*
- Paul Borek (Studierender)  
*The Knuth-Bendix-Completion-Visualizer supported me not only by completing and verify my solutions of practical examples of term rewriting systems, but also to understand the (by the way intuitively not so trivially) procedure of Knuth-Bendix-Completion. Moreover, the well-arranged design of the graphical user interface assists me understanding the algorithm.*

Da sich sowohl Studierende als auch Lehrveranstaltungsleiter bereit erklärt haben die erstellte Software zu testen, wurde vom ursprünglichen Plan (10 Stunden für eine Evaluierung durch Studierende aufzuwenden) abgewichen und die studentische Hilfskraft anstatt der geplanten 300h für 310h angestellt. Da die Java-Applet Version des Programms ursprünglich nicht vorgesehen war, diese aber die Verwendbarkeit des Tools wesentlich erleichtert, ist die Abweichung vom ursprünglichen Projektplan aus Sicht der Projektleitung mehr als vertretbar.

Somit wurde die gesamte genehmigte Projektsumme (entspricht 310h) verbraucht.

## 4 Schlussbemerkungen

Die Gleichungen (G1-G3) wurden mithilfe der erstellten Software in die Regeln (R1-R10) übergeführt. Im Zuge des Prozesses müssen vom Benutzer circa 10 Entscheidungen getroffen werden während das Programm hingegen mehr als 100 Gleichungen berechnet, was eine Durchführung von Hand unmöglich erscheinen lässt. Ausgehend von den Regeln (R1-R10) konnte (per Hand) relativ einfach die längere Kette in Sektion 2 berechnet werden. Eine mögliche Erweiterung des Programms wäre die automatische Erstellung solcher Ketten.

Die erstellte Software wird unter der *GNU Lesser General Public License*<sup>1</sup> frei verfügbar gemacht. Ein entsprechender Antrag wurde bereits beim ProjektServiceBüro der Universität Innsbruck eingebracht.

Das Programm ist samt Dokumentation unter folgendem Link verfügbar:

<http://cl-informatik.uibk.ac.at/software/kbcv>

Auf dieser Adresse ist auch die Applet Version verlinkt.

---

<sup>1</sup><http://www.gnu.org/licenses/lgpl.html>