# Empirische Wirtschaftsforschung I

Herbert Stocker

# Übungsblatt 4:

1. Seien $y_1$, $y_2$ und $y_3$ drei Zufallsvariablen für die gilt $y_i \sim$ i.i.d.$(\mu, \sigma^2)$ mit $i = 1, 2, 3$ (d.h. alle $y_i$ sind *identical and independently distributed* mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$).

   (a) i. Ist der gewichtete Schätzer $\hat{\mu}^w = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{6}y_3$ erwartungstreu?

   ii. Ist der gewichtete Schätzer $\hat{\mu}^o = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ erwartungstreu?

   (b) Berechnen Sie die Varianz von $\hat{\mu}^w$ und $\hat{\mu}^o$.

   (c) Vergleichen Sie die Varianzen der beiden Schätzer. Kann der gewichtete Schätzer $\hat{\mu}^w$ effizient sein?

2. Angenommen ein DGP liefert eine Stichprobe mit $n$ Zufallsvariablen $y_i$ (mit $i = 1, \ldots, n$) für die gilt $y_i \sim$ i.i.d.$(\mu, \sigma^2)$, d.h. die $n$ Zufallsvariablen seien identisch und unabhängig verteilt mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$.

   Überprüfen Sie, ob der Stichprobenmittelwert $\hat{\mu} = 1/n \sum_i y_i$ ein erwartungstreuer und unverzerrter Schätzer für $\mu$ ist, d.h. ob der Stichprobenmittelwert $\hat{\mu}$ ein BLUE ('*best linear unbiased estimator*') ist.

   Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

   (a) Starten Sie mit einer beliebigen linearen Schätzfunktion.

   (b) Ermitteln Sie die notwendigen Bedingungen, unter denen diese lineare Schätzfunktion erwartungstreu ist.

   (c) Minimieren Sie die Varianz dieser beliebigen lineare Schätzfunktion unter der Nebenbedingung, dass diese lineare Schätzfunktion erwartungstreu ist.

   (d) Zeigen Sie, dass diese aus der Minimierung resultierende – also varianzminimale – Schätzfunktion genau der OLS-Schätzer ist.

   (e) Verwenden Sie dieses Ergebnis auch um zu zeigen, dass

   $$\text{var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

   Im Kern ist nur das, was im Skript für den bivariaten Fall gezeigt wurde, für den univariaten Fall zu wiederholen.

3. *Nur falls Sie noch ein bisschen spielen möchten, hier noch eine kleine Nuss zum knacken ☺:*

   Eine Zufallsvariable sei gleichverteilt im Intervall $[0,1] : X \sim \mathrm{U}(0,1)$, d.h. die Dichtefunktion lautet $f(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und Null sonst.

   (a) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion? Skizzieren Sie die Dichte- und Verteilungsfunktion.

   (b) Berechnen Sie $\Pr(0.3 \leq X \leq 0.6)$

   (c) Berechnen Sie $\mathrm{E}[X]$.

   (d) Berechnen Sie $\mathrm{var}[X]$.

   (e) Berechnen Sie $\mathrm{E}[a + bX]$ ($a$ und $b$ sind Konstante).

   (f) Berechnen Sie $\mathrm{var}[a + bX]$.