Zusammenfassung wichtiger Rechenregeln

Herbert Stocker

März 2008

1 Funktionen und Geradengleichungen

Eine *Funktion* ist im wesentlichen eine 'Input – Output' Beziehung, sie liefert den Wert einer *abhängigen* Variable (links vom Gleichheitszeichen) für gegebene Werte der unabhängigen Variable(n) (rechts vom Gleichheitszeichen). Die abhängige Variable wird im folgenden oft mit y bezeichnet, die unabhängige Variable mit x, oder im Fall mehrerer unabhängiger Variablen mit $x_1, x_2, \ldots$

$$y = f(x) \qquad \text{oder} \qquad y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

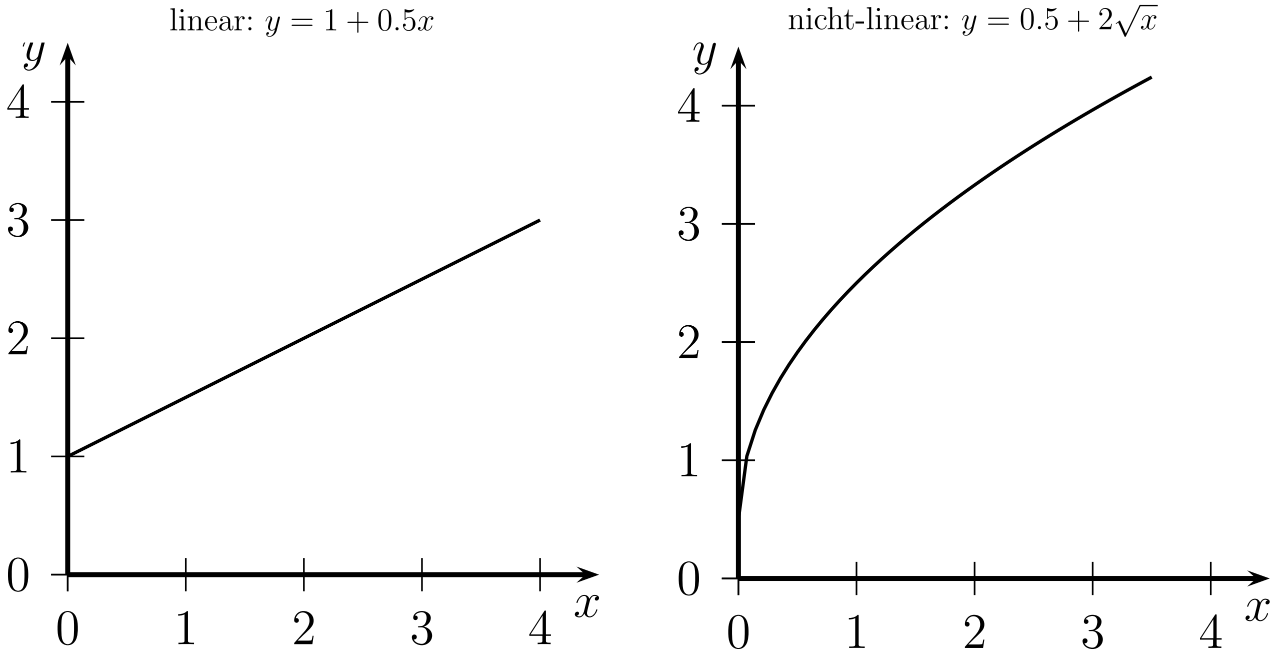
Bei einer *Inverse* Funktion wird die ursprüngliche Funktion umgeschrieben, sodass x die abhängige und y die unabhängige Variable wird. Sie wird häufig als f^{-1} geschrieben, d.h.

$$x = f^{-1}(y) = g(y)$$

Zum Beispiel

$$q = 50 - 0.5p \qquad \Leftrightarrow \qquad p = 100 - 2q$$

Funktionen können entweder linear (d.h. konstante Steigung, z.B. $y = a + bx$) oder nicht-linear (Steigung hängt von x ab) sein.
Beispiel:



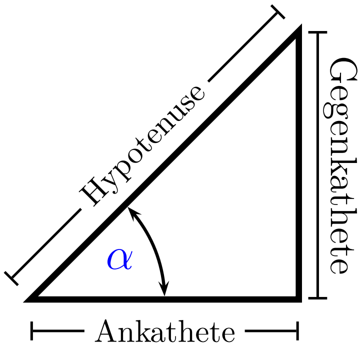
Eine Funktion $y = f(x)$ ist linear, wenn in einer Grafik alle Kombinationen von x und y, die die Gleichung $y = f(x)$ erfüllen, auf einer Geraden liegen. Jede lineare Funktion kann als $y = a+bx$ geschrieben werden, wobei a das *Interzept* und b die Steigung ist.

Die *Steigung* einer linearen Funktion $y = a + bx$ ist definiert als das Verhältnis der Änderung der abhängigen Variable y zur Änderung der unabhängigen Variable x

$$\text{Steigung einer Geraden} = b = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

wobei Δ eine diskrete Änderung bezeichnet.

Die Steigung einer Geraden kann auch als Tangens des Winkels, der zwischen Hypotenuse und Ankathete eingeschlossen wird, gemessen werden. Für nichtlineare Funktionen wird die Steigung einer Tangente in dem interessierenden Punkt herangezogen.



$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ &= \text{Steigung}\end{aligned}$$

Eingabe für Tests

Sie finden im Folgenden mehrere Wiederholungstests, bei denen Sie aufgefordert werden Formeln oder Zahlen einzugeben. Damit das Programm Ihre Eingabe richtig erkennt müssen Sie sich an ein paar einfache Regeln halten:

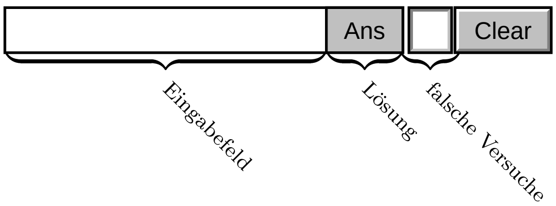
- Verwenden Sie als Dezimaltrennzeichen einen Punkt (.) anstelle eines Beistrichs (,) z.B. $3/2 = 1.5$
- Beachten Sie die Groß- und Kleinschreibung von Variablen, z.B. $x \neq X$.
- Verwenden Sie `*` für Multiplikation, z.B. `4*x` für $4x$; sowie / für Division.
- Verwenden Sie `^` für Potenzen: geben Sie `4*x^3` für $4x^3$ ein, oder `12*x^-6` for $12x^{-6}$.
- Verwenden Sie Klammern um den *Bereich* einer Operation abzugrenzen: z.B. `4*x*(x^2+1)^3` für $4x(x^2+1)^3$; `4^(2*x+1)` für 4^{2x+1}; `(sin(x))^2` für $(\sin(x))^2$ (Sie können auch eckige `[ ]` oder geschwungene Klammern { } verwenden).
- Funktionen: `ln` für den natürlichen Logarithmus; die Exponentialfunktion, e^x kann entweder als `exp(x)` oder als `e^x` eingeben werden; die Absolutfunktion, `abs(·)` kann auch wie üblich `|·|` eingeben werden, also `abs(x)` oder `|x|`; für $\sqrt{x}$ kann entweder `sqrt(x)` oder `x^(1/2)` geschrieben werden.

Beispiel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\left((x^4+1)^{-1/2}\right)4x^3 = 2x^3\left((x^4+1)^{-1/2}\right)$$

Um diese Lösung in den online Test einzugeben müssen Sie die Lösung folgendermaßen in das Eingabefeld unten eingeben: `2*x^3*(x^4+1)^(-1/2)` (versuchen Sie es!).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4+1)^{1/2} =$$



Wenn Sie Ans klicken erfahren Sie, ob Ihre Eingabe richtig war.

Ein weiterer Versuch: Geben Sie den folgenden Ausdruck korrekt ein (achten Sie auf Groß- und Kleinschreibung sowie auf die Klammersetzung!):

$$\frac{X^3}{(1-X^2)^4} =$$ Ans Clear

Kurztest

Um mit dem Test zu beginnen klicken Sie Start, und wenn Sie alle Felder ausgefüllt haben schließen Sie durch Klicken von Fertig ab.

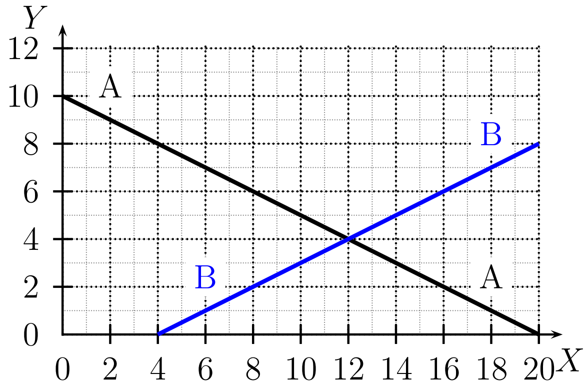
Start

1. (2^{Pkt}) Geben Sie die Funktion der Geraden A in der Form `Y = k + d*X` ein:
   $Y =$

2. (1^{Pkt}) Die Steigung der Geraden A ist

3. (2^{Pkt}) Geben Sie die Funktion der Geraden B ein:
   $Y =$

4. (2^{Pkt}) Geben Sie die Inverse $X = f(Y)$ der Geraden B ein:
   $X =$



Fertig | Punkte: | Korrigiere

Korrekturfeld:

Ergebnis: Prozent:

Note:

2 Rechenregeln für Potenzen

$$\begin{aligned}
a^n &= a \times a \times a \times \cdots \times a \qquad (a\ n\text{-mal als Faktor}) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^{\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^n}
\end{aligned}$$

Rechenregeln für rationale n und m:

$$\begin{aligned}
a^n\, a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} \\
(a^n)^m &= a^{nm}
\end{aligned}$$

Quick-Test: Klicken Sie "Start" um mit dem Test zu beginnen. Wenn Sie fertig sind erhalten Sie nach klicken von "Fertig" die Auswertung.

Start

1. Kürzen Sie den folgenden Bruch:

$$\frac{x^3}{x^4}$$

☐ $x^{3/4}$ ☐ x^{12} ☐ x^{-1} ☐ x^7

2. $(x^2)^3 =$

☐ $\sqrt[3]{x^2}$ ☐ $\sqrt[2]{x^3}$ ☐ x^5 ☐ x^6

3. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 =$

☐ $\sqrt{x}$ ☐ $\sqrt{1/x}$ ☐ x^{-2} ☐ $x^{-1/2}$

4. Kürzen Sie den folgenden Bruch:

$$y = \frac{x}{x^{-2}}$$

☐ $y = x^3$ ☐ $y = x^{-3}$ ☐ $y = 1/(x^{-1})$ ☐ $y = 1/x$

5. Kürzen Sie den folgenden Bruch:

$$y = \frac{x^2}{x^{a+2}}$$

☐ $y = x^{a+2}$ ☐ $y = x^a$ ☐ $y = x^{a-2}$ ☐ $y = x^{-a}$

6. Kürzen Sie den folgenden Bruch:

$$y = \frac{x^{1-\alpha}}{x^{\alpha}}$$

☐ $y = x$ ☐ $y = x^{\alpha}$ ☐ $y = x^{1-2\alpha}$ ☐ $y = x^{2\alpha-1}$

7. (2^{Pkt})

$$\left(\frac{(1+x^2)}{x}\right)^{-5}$$

☐ $x^5/(1+x^2)^5$ ☐ $(1+x)^5$ ☐ $(1+x^2)^{-4}$ ☐ $1+x^5$

Fertig Korrigiere

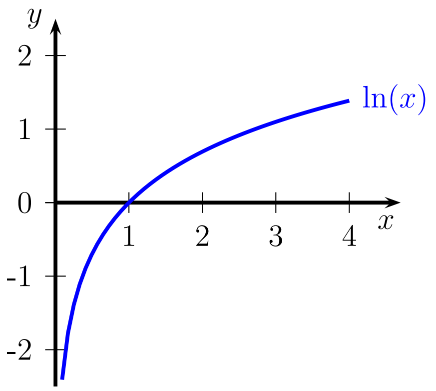
Ergebnis: Prozent: **Note:**

Hinweis: Dieser und alle folgenden Tests wurden mit Hilfe des AcroTeX Bundles von D.P. Story (`http://www.math.uakron.edu/~dpstory/`) erstellt.

3 Rechenregeln für Logarithmen

Für $e = 2.718281828459045235360287471352 7\ldots$

$$\begin{aligned}
\ln(e) &= 1\\
\ln(1) &= 0\\
\ln(e^a) &= a\\
\ln(a\cdot b) &= \ln(a)+\ln(b)\\
\ln(a/b) &= \ln(a)-\ln(b)\\
\ln(a^b) &= b\ln(a)\\
\ln\sqrt[b]{a} &= (1/b)\ln(a)
\end{aligned}$$

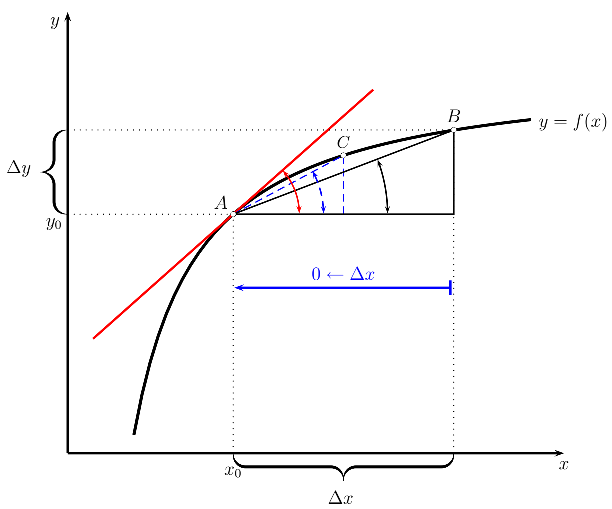


4 Differentialrechnung

Wenn $y = f(x)$, dann ist der Differentialquotient (bzw. die Ableitung) definiert als

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

und entspricht graphisch dem Anstieg einer Tangente im Punkt (x_0, y_0).



Ableitungsregeln:

1. **Konstante Funktion:**

$$y = a; \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(für } a \text{ konstant)}$$

Beispiel: $y = 10$, $\frac{dy}{dx} = 0$

2. **Potenzfunktion:**

$$y = x^a; \qquad \frac{dy}{dx} = ax^{a-1}$$

Beispiel:

$$y = x^3; \qquad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

3. **Summenregel:**

$$y = f(x) + g(x); \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel:

$$y = a + 3x + 4x^2; \qquad \frac{dy}{dx} = 0 + 3 + 8x$$

4. **Produktregel:**

$$y = f(x)\,g(x); \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Beispiel:

$$y = (16x - 1)(2x^2 - 1); \qquad \frac{dy}{dx} = 16(2x^2 - 1) + (16x - 1)(4x)$$

5. **Quotientenregel:**

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Beispiel:

$$y = \frac{(16x - 1)}{(2x^2 - 1)}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{16(2x^2 - 1) - (16x - 1)4x}{(2x^2 - 1)^2}$$

6. **Kettenregel:** $y = f(Z)$ und $Z = g(x)$

$$y = f\left(g(x)\right); \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ}\,\frac{dZ}{dx}$$

Beispiel: $y = Z^4$, $Z = (x^3 + 2x^2 - 1)$

$$y = \left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^4; \qquad \frac{dy}{dx} = 4\left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^3\left(3x^2 + 4x\right)$$

7. **Exponentialfunktion:**

$$y = e^{ax}; \qquad \frac{dy}{dx} = ae^{ax} \qquad (e = 2.718\ldots)$$

8. **Logarithmische Funktion:**

$$y = a\ln(x); \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$$

Beispiel:

$$y = 2\ln(x) + e^{2x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + 2e^{2x}$$

Quick-Test: Drücken Sie Start um mit dem Test zu beginnen!

Start

1. (1^{Pkt}) $y = x^{-0.5}$, $\frac{dy}{dx} =$

2. (1^{Pkt}) $y = 0.5x^{-2}$, $\frac{dy}{dx} =$

3. (1^{Pkt}) $y = \ln(x^2)$, $\frac{dy}{dx} =$

4. (1^{Pkt}) $y = x(2+x)$, $\frac{dy}{dx} =$

5. (1^{Pkt}) $y = (a+2x)^2$, $\frac{dy}{dx} =$

6. (2^{Pkt}) $y = (1+2x)^4$, $\frac{dy}{dx} =$

7. (2^{Pkt}) $y = x/(1+x)$, $\frac{dy}{dx} =$

Fertig Punkte: Korrigiere

Richtige Antworten:

Ergebnis: Prozent: **Note:**

4.1 Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

Wir betrachten im Folgenden nur Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

$$y = f(x_1, x_2)$$

die Verallgemeinerung auf mehrere unabhängige Variablen ist *'straight forward'*.

4.1.1 Partielle Ableitung:

Für die *partielle Ableitung* von y nach x_i (geschrieben $\partial y/\partial x_i$) werden alle anderen Variablen konstant gehalten.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{dx_2=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \equiv \left.\frac{dy}{dx_2}\right|_{dx_1=0} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_1, x_2+k) - f(x_1, x_2)}{k}$$

Da mit dem Symbol d eine infinitesimal kleine Änderung bezeichnet wird bedeutet $dx_1 = 0$, dass x_1 konstant gehalten wird (d.h. die Veränderung von x_1 ist gleich Null). Für die partielle Ableitung bedeutet dies, dass wir alle anderen Variablen als Konstante betrachten können.
Manchmal wird die partielle Ableitung auch einfach mit Hilfe eines Subindex geschrieben, z.B. $\partial y/\partial x_1 \equiv y_{x_1}$ oder noch einfacher y_1.
Zum Beispiel:

- Die partiellen Ableitungen der Funktion $y = x_1^{0.5} x_2^3$ sind

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0.5 x_1^{-0.5} x_2^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 3 x_1^{0.5} x_2^2$$

- Ein weiteres Beispiel:

$$Y = AX_1^\alpha X_2^\beta; \quad \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \alpha A X_1^{\alpha-1} X_2^\beta; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} \equiv \frac{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)}{\partial X_1} = \alpha(\alpha-1) A X_1^{\alpha-2} X_2^\beta$$

- und noch ein Beispiel:

$$Y = [X_1^\rho + X_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}; \quad \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{\rho} [X_1^\rho + X_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \left(\rho X_1^{\rho-1}\right)$$

4.1.2 Totales Differential

Zur Vereinfachung beginnen wir mit einer Funktion mit nur einer unabhängigen Variablen x, d.h. $y = f(x)$. Wir möchten wissen, wie stark sich y verändert (d.h. wie groß Δy ist), wenn sich x um Δx Einheiten verändert. Abbildung 1 verdeutlicht, daß die Veränderung von y (d.h. Δy) näherungsweise gleich der Steigung der Tangente ($= \partial y/\partial x$) mal der Veränderung von x (d.h. Δx) ist, d.h.

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$$

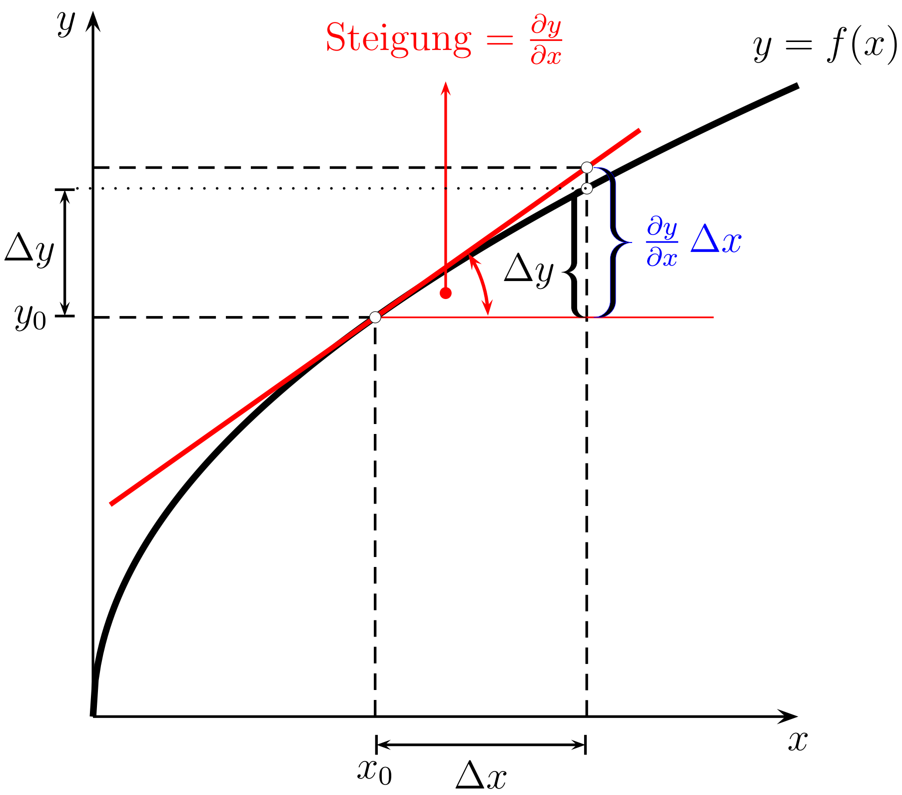


Abbildung 1: Die Veränderung von y (d.h. Δy) ist näherungsweise gleich der Steigung der Tangente ($= \partial y/\partial x$) mal der Veränderung von x (d.h. Δx), also $\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$.

Beim Totalen Differential fragen wir uns z.B., wie sich y ändert, wenn sich sowohl x_1 als auch x_2 ändern.
Anstelle einer Tangente legen wir nun eine Tangentialebene an den interessierenden Punkt. Abbildung 2 veranschaulicht die Vorgangsweise: wir gehen Δx_1 Einheiten in Richtung x_1, wodurch

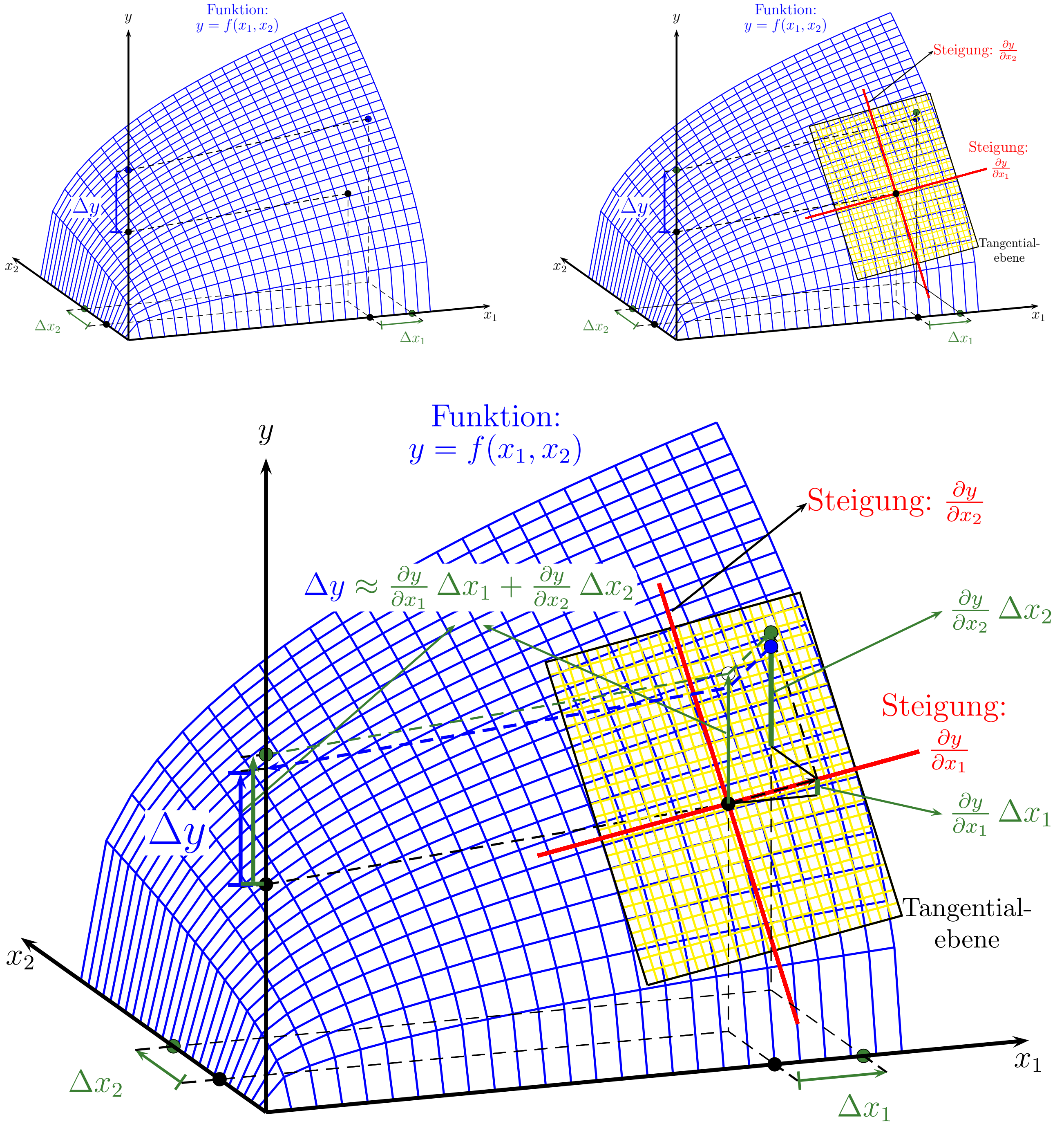


Abbildung 2: Das Totale Differential: Die Veränderung von y (d.h. Δy) ist näherungsweise gleich der mit den Steigungen der Tangenten gewichtete Summe der Veränderungen von x_1 und x_2, d.h. $\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,\Delta x_2$

y näherungsweise um $\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\Delta x_1$ Einheiten zunimmt. Anschließend gehen wir Δx_2 Einheiten in Richtung x_2, wodurch y näherungsweise um weitere $\frac{\partial y}{\partial x_2}\,\Delta x_2$ zunimmt.
Die gesamte Änderung von y ist also

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,\Delta x_2$$

bzw. für infinitesimal kleine Änderungen von x_1 und x_2

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,dx_2$$

Dies gilt natürlich auch für mehrere Variablen, allerdings kann dies grafisch nicht mehr dargestellt werden. Wenn $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist das totale Differential

$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\,dx_n}$$

4.1.3 Beispiele:

- $Y = 3X_1 - 5X_2 \quad \Rightarrow \quad dY = 3dX_1 - 5dX_2$
- $Y = 3X_1^2 - \ln(X_2) \quad \Rightarrow \quad dY = 6X_1\,dX_1 - (1/X_2)\,dX_2$
- $Y = AX_1^\alpha X_2^\beta \;\Rightarrow\; dY = \left(\alpha A X_1^{\alpha-1} X_2^\beta\right) dX_1 + \left(\beta A X_1^\alpha X_2^{\beta-1}\right) dX_2$
- Eine etwas komplexere Funktion:

  $$Y = AX_1^\alpha X_2^{1-\alpha}$$

  Partielle Ableitungen:

  $$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial X_2} &= A(1-\alpha)X_1^\alpha X_2^{-\alpha} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2 \partial X_1} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)}{\partial X_1} = A(1-\alpha)\alpha X_1^{\alpha-1} X_2^{-\alpha} \end{aligned}$$

  Totales Differential:

  $$\begin{aligned} Y &= AX_1^\alpha X_2^{1-\alpha} \\ dY &= \frac{\partial Y}{\partial X_1}\,dX_1 + \frac{\partial Y}{\partial X_2}\,dX_2 \\ &= \left[A\alpha X_1^{\alpha-1} X_2^{1-\alpha}\right] dX_1 + \left[A(1-\alpha)X_1^\alpha X_2^{-\alpha}\right] dX_2 \\ &= \left[A\alpha \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{1-\alpha}\right] dX_1 + \left[A(1-\alpha)\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\alpha}\right] dX_2 \end{aligned}$$

Start

1. (1^{Pkt}) $Y = X^{0.8}$,
   $dY/dX =$ ______

2. (1^{Pkt}) $Y = X^{0.8}$,
   $d^2Y/dX^2 =$ ______

3. (1^{Pkt}) $d(e^{X^2})/dX =$ ______

4. (1^{Pkt}) $Z = X^{0.8}Y^{0.2}$,
$\partial Z/\partial X =$ [ ]

5. (1^{Pkt}) $Z = X^{0.8}Y^{0.2}$,
$\partial Z/\partial Y =$ [ ]

Fertig | Punkte: | Korrigiere

Richtige Antworten:

Ergebnis: Prozent: **Note:**

5 Integrale

Das Integrieren ist die inverse Operation (d.h. Gegenteil) zur Differentiation.
Wenn man durch Differentiation einer Stammfunktion $F(x)$ die Ableitung $f(x)$ erhält, so kann man durch integrieren von $f(x)$ wieder die Stammfunktion $F(x)$ berechnen, allerdings ohne einer Konstanten C, da beim Differenzieren die Konstanten wegfallen.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

5.1 Rechenregeln für einfachste Integrale

$$\begin{aligned}
\int 0\,dx &= C \\
\int a\,dx &= ax + C \\
\int x^a\,dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(x) + C
\end{aligned}$$

Integral einer Summe:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int \left[x^3 + x^2 + 1\right]\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + C$$

Wenn k eine Konstante ist gilt

$$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$$

Beispiel:

$$\int 3x^2\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) = x^3 + C$$

5.2 Bestimmte Integrale

Bestimmte Integrale können im zweidimensionalen Koordinatensystem als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse interpretiert werden (bei Funktionen mehrerer Veränderlicher entspricht es einem Volumen).

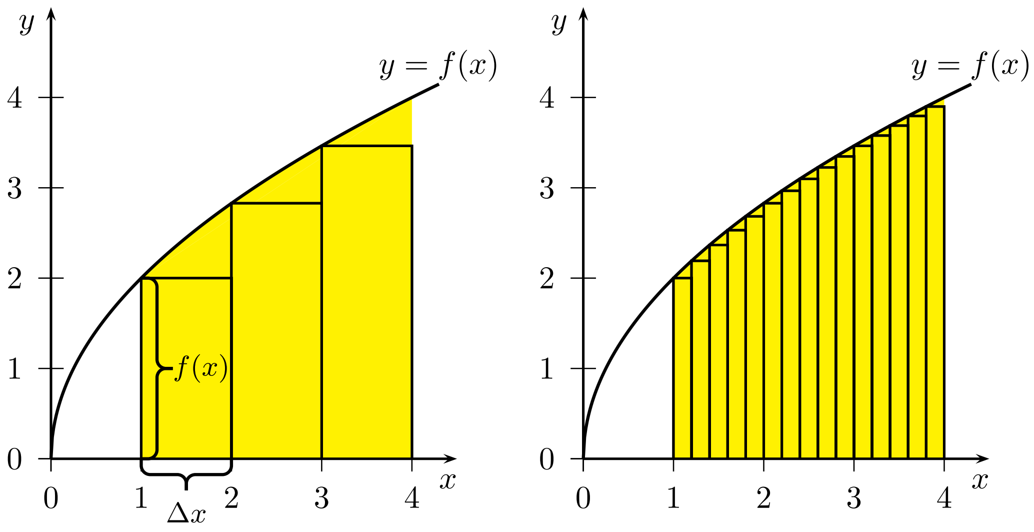


Abbildung 3: Integral als Fläche zwischen x-Achse und Funktion $y = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Beispiel: Abbildung 3 zeigt die Funktion $y = f(x) = 2\sqrt{x}$. Das unbestimmte Integral ist

$$\int 2x^{0.5}\,dx = \frac{4x^{1.5}}{3} + C$$

Die Fläche zwischen Funktion und x-Achse im Bereich $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ ist

$$\int_1^4 2x^{0.5}\,dx = \left.\frac{4x^{1.5}}{3}\right]_1^4 = 9.333$$

Quick-Test: Drücken Sie Start um mit dem Test zu beginnen!

Start

1. (1^{Pkt}) $\int x\,dx =$

2. (1^{Pkt}) $\int 1\,dx =$

3. (1^{Pkt}) $\int 3x^2\,dx =$

4. (1^{Pkt}) $\int 1/x^4\,dx =$

5. (1^{Pkt}) $\int \sqrt{x^3}\,dx =$

6. (2^{Pkt}) $\int (x^3 + x + 2)\,dx =$

7. (2^{Pkt}) $\int_1^5 3x^2\,dx =$

8. (2^{Pkt}) $\int_0^3 (1/9)x^2\,dx =$

9. (2^{Pkt}) $\int_0^4 (0.5 - 0.125 * x)\,dx =$

10. (2^{Pkt}) $\int_1^2 (0.5 - 0.125 * x)\,dx =$

Fertig Punkte: Korrigiere

Richtige Antworten:

Ergebnis: Prozent: **Note:**