Kapitel 10

Endogene Regressoren und Kausalität

"Man is impelled to invent theories to account for what happens in the world. Unfortunately, he is not quite intelligent enough, in most cases, to find correct explanations. So that when he acts on his theories, he behaves very often like a lunatic."
(Aldous Huxley, *Texts and Pretexts*, 1932, p. 270)

"Was also ist die Zeit?" sinnierte Augustinus von Hippo vor mehr als tausend Jahren, *"Wenn mich niemand danach fragt, weiß ich es. Wenn ich es einem erklären will, der danach fragt, weiß ich es nicht"* (Augustinus 1980, Liber XI, Caput XIV). Ähnlich wie dem Kirchenvater Augustinus mit der Zeit geht es manchen Forschern mit der Kausalität.

Wir beobachten, dass reiche Menschen öfter in Luxusrestaurants speisen und teure Urlaube buchen. Sollten wir es uns also gut gehen lassen und in die Karibik reisen *um* reich zu werden?

Oder, angeblich leben regelmäßige Kirchenbesucher länger als ihre weniger frommen Zeitgenossen. Aber leben sie länger, *weil* sie öfter zur Kirche gehen? Ebenso sagt man den Bewohnern von Kreta eine höhere Lebenserwartung nach, und vielfach wird dies mit den dortigen Ernährungsgewohnheiten begründet. Aber können wir tatsächlich davon ausgehen, dass diese 'Kreta-Diät' die *Ursache* für ihre höhere Lebenserwartung ist? Könnte nicht das Klima, ein geruhsamer Lebenswandel oder etwas ähnliches die Ursache sein?

10.1 Kausalität

"The law of causality, I believe, [...] is a relic of a bygone age, surviving, like the monarchy, only because it is erroneously supposed to do no harm."
(Bertrand Russel)
(`http://www.readbookonline.net/readOnLine/22891/`)

Der Titel von Adam Smiths Werk *"An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations"* (1776) war für seine Nachfolger Programm, die bohrende Frage nach den Ursachen – *Causes*, Kausalität – hat die Ökonomen seither nie mehr losgelassen.

Während eine Korrelation nur eine Beschreibung des Zusammenhangs zweier Variablen liefert (Assoziation), sucht die Kausalität nach Ursache und Wirkung, versucht eine Erklärung zu geben. Aber können wir je sicher sein, dass unser Erklärungsversuch auch tatsächlich zutrifft? Was, wenn mehrere Ursachen zusammen wirken um eine Wirkung zu erzeugen? Und steht nicht hinter jeder Ursache eine weitere, dahinter liegende Ursache? Wo aufhören?

Die heute in den Sozialwissenschaften verbreitete Vorstellung von Kausalität wurde wesentlich von David Hume (1711 – 1776) geprägt. Er stellt fest, dass wir Kausalität nicht unmittelbar sinnlich wahrnehmen können, sondern lediglich die Abfolge von Ereignissen beobachten. Er schreibt:

> "Wenn aber viele gleichförmige Beispiele auftreten und demselben Gegenstand immer dasselbe Ereignis folgt, dann beginnen wir den Begriff von Ursache und Verknüpfung zu bilden. Wir empfinden nun ein neues Gefühl [...]; und dieses Gefühl ist das Urbild jener Vorstellung [von notwendiger Verknüpfung], das wir suchen." (Hume, 1993, 95) [zitiert nach `https://de.wikipedia.org/wiki/Kausalit%C3%A4t`].

Wir können zwar beobachten, dass sich ein Stein im Sonnenschein erwärmt, und dass diese Phänomene sehr häufig parallel auftreten. Es erscheint uns offensichtlich, dass die Sonne die Ursache für die Erwärmung des Steins ist, aber dieser Schluss geht über unsere unmittelbare Sinneswahrnehmung hinaus. Nur aufgrund der Sinneswahrnehmung können wir nicht ausschließen, dass die Erwärmung des Steins die Ursache für den Sonnenschein ist, reine Sinneswahrnehmungen erlauben uns noch keine Rückschlüsse auf dahinter liegende Ursachen-Wirkungs Beziehungen (für ein plausibleres Beispiel siehe Seite 3).

Die Verknüpfung von Ursache und Wirkung ist demnach lediglich eine menschliche Gewohnheit und keine Eigenschaft der beobachteten Objekte. Nach Hume können wir lediglich räumlich benachbarte Ereignisse in zeitlicher Abfolge beobachten. Die Erfahrung der Regularität (*'constant conjunction'*) als Ursachen und Wirkung *erleben* wir zwar häufig als kausal, aber wie bei Induktionsschlüssen können aus beobachteten Regelmäßigkeiten nie absolut sichere Schlussfolgerungen über zukünftige Ereignisse ziehen, solche Schlussfolgerungen sind bestenfalls *wahrscheinlich*.

Auf David Hume gehen auch die zwei zentralen Ideen zurück, die insbesondere für empirische Analysen bis heute von zentraler Bedeutung sind, er schreibt:

> *"We may define a cause to be an object followed by another, and where all the objects, similar to the first, are followed by objects similar to the second.*
> *Or, in other words, where, if the first object had not been, the second never had existed."*
> (An Enquiry concerning Human Understanding, Section VII)

Beispiel: Stellen Sie sich ein Haus mit Zentralheizung vor. Die Temperatur wird durch eine Ölheizung mit Thermostat geregelt, der die Innentemperatur (P) unabhängig von der Außentemperatur (V) konstant hält. Die Hausbesitzerin sammelt Daten über Innen- und Außentemperatur sowie den Ölverbrauch M.
Wenn der Thermostat perfekt funktioniert beobachten wir, dass die Innentemperatur weder mit der Außentemperatur noch mit dem Ölverbrauch korreliert ist, denn die Innentemperatur wird vom Thermostat konstant gehalten.
Wie würde ein außerirdischer Ökonometriker, der die Rolle des Thermostats nicht kennt, die Daten interpretieren? Er würde folgerichtig schließen, dass die Zunahme des Ölverbrauchs zu einem Absinken der Außentemperatur führt, dass aber weder die Außentemperatur noch der Ölverbrauch in irgendeinem Zusammenhang mit der Innentemperatur stehen. Der einzige Effekt des Verbrennens von Öl scheint also darin zu bestehen, dass dies zu einem Absinken der Außentemperatur führt.
Eine Kollegin des außerirdischen Ökonometrikes würde sich vielleicht fragen, ob die Kausalität nicht umgekehrt läuft, das heißt, ob nicht eine Zunahme der Außentemperatur zu einem Rückgang des Ölverbrauchs führt, aber sie würde ihrem Kollegen zustimmen, dass kein Zusammenhang zwischen dem Ölverbrauch und der Innentemperatur besteht. Als *'policy conclusion'* würden also beide einvernehmlich dem Hausherren raten, die Heizung abzustellen und damit Heizkosten zu sparen.
Hier hilft hier auch eine multiple Regression: $P = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 V + \widehat{\beta}_3 M + \hat{\varepsilon}$ nicht weiter, die Außentemperatur V und der Ölverbrauch M sind vermutlich fast perfekt korreliert (multikollinear), aber leisten auch gemeinsam keinen Erklärungsbeitrag für die Innentemperatur P. Mit Beobachtungsdaten alleine ist es offensichtlich nicht möglich die Kausalitätsstruktur zwischen diesen Variablen zu erkennen.

Dieses Beispiel stammt von Milton Friedman (1912 – 2006) und sollte den Zusammenhang zwischen beobachteter Inflationsrate P , Geldmenge M, und Umlaufgeschwindigkeit des Geldes V erklären; die Rolle des Thermostats spielte dabei natürlich die Zentralbank.

Dieses Beispiel hat allerdings eine viel breitere Bedeutung, wann immer Personen ihre Handlungen an die äußeren Bedingungen anpassen haben wir ein sehr ähnliches Problem, sie reagieren ähnlich wie ein Thermostat systematisch auf sich ändernde Bedingungen.
Das grundlegende Problem in diesem Beispiel besteht offensichtlich darin, dass der außerirdische Ökonometriker die Daten mit einem *fehlspezifizierten Modell* analysierte, der Thermostat fand in seinem Modell keine Berücksichtigung.
Aber können wir a priori wissen, wie das 'wahre Modell' aussieht, um es korrekt spezifizieren zu können?

Obwohl Hume die beiden Ideen mit einem *"Or, in other words ..."* verknüpft handelt es sich um zwei unabhängige Ideen, nämlich

1. die zeitliche Anordnung: die Wirkung kann nicht *vor* der Ursache eintreten; Kausalität ist wie die Zeit asymmetrisch.

2. die Vorstellung einer *kontrafaktischen Situation*: was wäre passiert, wenn das verursachende Ereignis *nicht* eingetreten wäre. Wir werden sehen, dass v.a. diese zweite Idee viel später wieder aufgegriffen wurde und großen Bereichen der modernen sozialwissenschaftlichen Ideen von Kausalität zugrunde liegt.

Historisch früher setzte sich die erste Idee der zeitlichen Asymmetrie von Kausalität durch, die z.B. auch in der Redewendung *'post hoc ergo propter hoc'* (lateinisch: *danach, also deswegen*) zum Ausdruck kommt. Die Vorstellung, dass die Wirkung nicht vor der Ursache eintreten kann – und damit einhergehende Probleme – soll hier nur kurz an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Werbeausgaben und Granger Kausalität Offensichtlich tätigen Unternehmen häufig Werbeausgaben (W), und es liegt nahe zu vermuten, dass sie dies tun um höhere Umsätze (U) zu erzielen. Aber *verursachen* höhere Werbeausgaben höhere Umsätze?

Auf den ersten Blick gibt es zumindest vier Möglichkeiten um eine Korrelation zwischen Werbeausgaben und Umsätzen zu erklären

- Werbeausgaben sind die Ursache für höhere Umsätze: dies ist die gängige Argumentation der Marketingabteilungen.

- Höhere Umsätze sind die Ursache für Werbeausgaben (*reverse causality*): dies kann der Fall sein, wenn höhere Umsätze die Finanzierung zusätzlicher Werbeausgaben ermöglichen.

- Ein dritter Faktor (*confounding variable*) ist eine gemeinsame Ursache für Umsätze und Werbeausgaben (Scheinkorrelation): z.B. könnte eine gute Konjunktur zu steigenden Umsätzen *und* zu steigenden Werbeausgaben führen.

- Nicht alle Firmen wurden erfasst, möglicherweise wurden besonderes große oder kleine Firmen nicht erfasst, oder besonders erfolgreiche oder erfolglose Firmen antworteten nicht auf eine Umfrage (Selektionsprobleme). Oder möglicherweise wurden die Ergebnisse durch eine Untergruppe von Firmen (z.B. Branche) getrieben (*'unobserved heterogeneity'*).

- Die Korrelation zwischen Umsätzen und Werbeausgaben könnte in einer Stichprobe zufällig auftreten: dies – und nur dies – sollte durch statistische Tests erkennbar sein.

Eine einfache OLS Regression der Umsätze auf die getätigten Werbeausgaben kann uns aber keinerlei Hinweise auf eine allfällige Kausalitätsrichtung geben!

Ein sehr früher Ansatz zwischen diesen Möglichkeiten zu unterscheiden wurde im Konzept der *Granger Kausalität* gefunden (Granger, 1969). Dieser verwendet Zeitreihenmethoden um die zeitliche Anordnung von Ereignissen zu testen.

Im allereinfachsten Fall werden zwei Gleichungen mit *Time-Lags* geschätzt

$$\begin{aligned} W_t &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j W_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j U_{t-j} + \varepsilon_t \\ U_t &= \alpha_1 + \sum_{j=1}^{p} \delta_j U_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \theta_j W_{t-j} + \upsilon_t \end{aligned}$$

wobei W und U *stationäre* Zeitreihen seien und die Störterme ε und υ alle angenehmen Eigenschaften aufweisen sollen. In diesem Fall können beide Gleichungen einfach mit OLS geschätzt und die gemeinsame Signifikanz von Lags mit einem F-Test getestet werden.

Wenn in der ersten Gleichung die Nullhypothese, dass alle γ_j (für $j = 1, \ldots, p$) simultan gleich Null sind, verworfen wird sagt man, höhere Umsätze U *Granger-verursachen* höhere Werbeausgaben W.

Falls umgekehrt in der zweiten Gleichung die Nullhypothese, dass alle θ_j simultan gleich Null sind, verworfen werden kann, sagt man, höhere Werbeausgaben W *Granger-verursachen* höhere Umsätze U.

Wenn sowohl alle γ_j als auch alle θ_j signifikant von Null verschieden sind spricht man von 'feed-backs'.

Obwohl auf den ersten Blick sehr einleuchtend sollte man mit diesem Konzept vorsichtig umgehen, denn dadurch wird *ausschließlich* die zeitliche Abfolge beurteilt.

Kaum jemand würde die Nacht als die Ursache für den Tag interpretieren, oder noch extremer, die schlechte Wetterprognose eines Metereologen würde wohl niemand als *Ursache* für eine Wetterverschlechterung interpretieren.

In den Sozialwissenschaften werden Handlungen von erwartungsbildenden und vorausschauenden Akteuren untersucht, und es ist offensichtlich, dass in diesen Fällen *Granger-Kausalität* wenig mit dem üblichen Begriff von Kausalität zu tun hat. Deshalb ist für ökonomische Zusammenhänge, in denen gegenwärtige Erwartungen die Zukunft beeinflussen können, ist dieses Kausalitätskonzept weniger gut geeignet.

Dagegen erwies sich Hume's zweite Idee, die Vorstellung einer *kontrafaktischen Situation*, als äußerst fruchtbar.

Kontrafaktische Theorien (*Counterfactual Theories of Causation*) Unter einer *kontrafaktischen Situation* versteht man im wesentlichen einen *'was wäre wenn'* Vergleich, was wäre passiert, wenn das verursachende Ereignis *nicht* eingetreten wäre (für eine genauere Definition und einen Überblick siehe Menzies (2017)).

Ökonomen ist diese Vorstellung vertraut, im Außenhandel vergleichen sie z.B. eine Situation mit Freihandel mit einem kontrafaktischen Modell einer geschlossenen Wirtschaft (Autarkie). Auch das vielleicht wichtigste Konzept der Ökonomik, die Opportunitätskosten (auch *Alternativkosten* genannt), beruhen auf einem Vergleich mit einer nicht realisierten Alternative.

David Hume hat diese Idee selbst nie vertieft, einflussreich wurde sie erst in den 70-iger Jahren des vergangenen Jahrhunderts durch Autoren wie Lewis (1973), für eine Übersicht siehe Menzies (2017). Diese Konzeption ermöglicht eine Unterscheidung von Kausalität von bloßer zeitlicher Abfolge.

Das Kernproblem aller kontrafaktischen Ansätze in der empirischen Forschung ist, dass wir nie beide Situationen (Faktum und Kontrafaktum) gleichzeitig beobachten können. Wir können nur für jeden einzelnen Fall beobachten ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht, und ob darauf B gefolgt ist oder nicht, aber wir können nie die Situation und die kontrafaktische Situation parallel beobachten! Wir können nicht wissen, was mit unserem Kopfweh passiert wäre, wenn wir die Kopfwehtablette nicht genommen hätten; die meisten Kopfschmerzen hören so und anders irgendwann auf. Ebenso wenig wissen wir, wie die Geschichte des 20. Jahrhunderts verlaufen wäre, *wenn* die Kunstakademie Wien den jungen Adolf Hitler aufgenommen hätte.

Der philosophische Versuch die Begriffe Kausalität und Ursache präziser in Form notwendiger und hinreichender Bedingungen zu fassen, führt zur so genannten INUS Konzeption des australischen Philosophen John Mackie, siehe Exkurs (Seite 7).

In der empirischen Forschung wurde die kontrafaktische Theorie der Kausalität v.a. im Zusammenhang mit einer *interventionistischen Theorie der Kausalität* (Gaskin 1955, von Wright 1971) sehr einflussreich. Dabei wird der Begriff der 'Verursachung' mit der Manipulation von Dingen verknüpft, wie dies z.B. in Experimenten passiert. Die dahinter liegende Vorstellung ist, dass die Manipulation einer Ursache eine Wirkung hervorrufen wird, oder in anderen Worten, wenn zwei Ereignisse A und B kausal verknüpft sind, dann kann durch Manipulation von A das Ereignis B beeinflusst werden. Damit wird der Kausalitätsbegriff auf aktive Handlungen zurückgeführt.

Der zentrale Begriff dabei ist der einer *Intervention*, ein gewissermaßen 'chirurgischer' (isolierter) Eingriff auf Ereignis A der derartig gestaltet ist, dass eine Veränderung in B ausschließlich auf die Manipulation von A zurückgeführt werden kann (für eine ausführliche Diskussion siehe Woodward (2016)).

Damit wird auch verständlich, weshalb diese Konzeption v.a. in den Sozialwissenschaften und in der Medizin solche Bedeutung erlangte, es geht um aktive Eingriffe in die Natur oder Gesellschaft um Zustände gezielt zu verändern.

Naturwissenschaftliche Experimente beruhen auf solchen systematischen Interventionen, mit deren Hilfe wir Wissen über kausale Zusammenhänge zu erlangen suchen.

10.1.1 Exkurs: Kausalität in der Philosophie, Biologie und Psychologie*

Vom radikalen Skeptizismus David Humes wurde im fernen Königsberg (dem heutigen Kaliningrad) Immanuel Kant – nach seinen eigenen Worten – aus einem 'dogmatischen Schlummer' geweckt.

Kant stellt sich in seiner 'Kritik der reinen Vernunft' die Frage, inwieweit *'synthetische Urteile a priori'* möglich sind. Damit meint er, vereinfacht ausgedrückt, wie und warum wir allgemeine (gesetzmäßige) Aussagen treffen können, die nicht auf der Erfahrung beruhen.

Die Antwort von Kant ist auf den ersten Blick verblüffend, er kommt zum Schluss, dass Kausalität nicht ein aus Wahrnehmungen gebildeter Denkinhalt ist, sondern

Exkurs: Die INUS Konzeption von Kausalität

Der Versuch, *Kausalität* in den Begriffen notwendiger und hinreichender Bedingungen zu erfassen, führt zur sogenannten INUS Konzeption von Kausalität (*"Insufficient, but Necessary part of an Unnecessary but Sufficient condition"*).
Ein Beispiel soll die Idee veranschaulichen: Angenommen ein spezielles Nahrungsmittel führe bei Menschen mit einer speziellen genetischen Prädisposition immer zu Krebs. Nach der INUS Konzeption gilt

- die Einnahme des Nahrungsmittels ist kein hinreichender Teil der Bedingung "Nahrungsmittel plus genetische Disposition", weil die Einnahme alleine nicht zwangsläufig zu Krebs führt;
- die Einnahme des Nahrungsmittels ist aber ein notwendiger Teil der Bedingung, weil sonst die Bedingung "Nahrungsmittel plus genetische Disposition" nicht erfüllt wäre;
- "Nahrungsmittel plus genetische Disposition" ist eine hinreichende Bedingung für die Krebserkrankung, weil sie zwangsläufig zur Krebserkrankung führt (bzw. den Erwartungswert erhöht);
- aber "Nahrungsmittel plus genetische Disposition" ist keine notwendige Bedingung für die Krebserkrankung, weil die Krebserkrankung auch durch andere Bedingungen verursacht werden kann.

Das Nahrungsmittel kann genau dann als Ursache von Krebs betrachtet werden, wenn die Einnahme des Nahrungsmittels allein kein hinreichender, aber dennoch notwendiger Teil einer Bedingung ist, die selbst hinreichend, aber nicht notwendig für die Krebserkrankung ist.
(*Keine Sorge, in den Sozialwissenschaften spielt diese Konzeption keine große Rolle.*)

¶

wie Raum und Zeit eine a priori gegebene Kategorie bildet, die notwendig ist um Erfahrung überhaupt erst machen zu können. Kausalität existiert demnach nicht unabhängig von unserer Wahrnehmung, sondern wird gewissermaßen 'in die Realität hineinprojeziert' und ist in diesem Sinne eine Vorbedingung für unsere Wahrnehmung. In dieser Hinsicht war Kant noch radikaler als Hume, für ihn gehört Kausalität gewissermaßen zur inneren Struktur der Erkenntnis.

Diese Ideen wurden später von verschiedenen Richtungen des Konstruktivismus aufgegriffen, die davon ausgehen, dass die empfundene Realität von den Individuen selbst durch den Vorgang des Erkennens konstruiert wird.

Dies kann anhand von Abbildung 10.1 verdeutlicht werden. Die Quadrate A und B erscheinen uns ungleich hell, obwohl man einfach zeigen kann, dass sie exakt die gleiche Helligkeit aufweisen (siehe Appendix).

Unser Gehirn analysiert scheinbar ohne unserem aktiven Zutun die Zusammenhänge und schließt aus der Anordnung und der unscharfen Kontur, dass B im Schatten liegt, also dunkler sein sollte. Um diesen Effekt zu korrigieren und die Kontraste

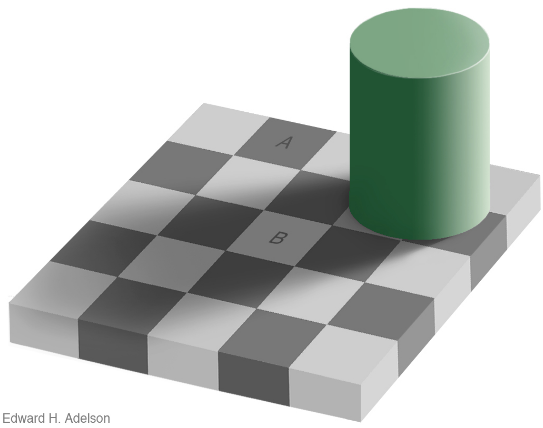


Abbildung 10.1: Optische Täuschung; Quelle: Adelson, Edward H. (1995)
`http://web.mit.edu/persci/people/adelson/checkershadow_illusion.html`

auszugleichen 'rechnet' unser Gehirn diesen Effekt heraus, weshalb uns B heller als A erscheint.

Wie jeder Fotograf weiß ist unsere Wahrnehmung nicht 'objektiv', sondern das Resultat einer Interpretation, bzw. 'Konstruktion' durch den Wahrnehmenden.

Ein interessanter Erklärungsversuch für diese erstaunliche Fähigkeit unserer Sinne geht auf den Biologen und zeitweiligen Inhaber des Immanuel Kant Lehrstuhls, Konrad Lorenz, zurück, der in der *"Die Rückseite des Spiegels"* (1973) das individuelle *a priori* als *posteriori* unserer Evolutionsgeschichte erklärte (siehe z.B. Riedl and Kaspar, 1981). Es erscheint uns als plausibel, dass es in der Evolution vorteilhaft war, sich im Schatten versteckende Gefahren (wie z.B. Raubkatzen) rechtzeitig zu erkennen, denn wer eine solche Gefahr übersah hatte keine Gelegenheit mehr sich um Nachwuchs zu kümmern. In unserem Gehirn scheint jedenfalls ein "Schattenaufheller" ziemlich fest "verdrahtet" zu sein.

Möglicherweise ist auch unsere Wahrnehmung von Kausalität ein biologisches Erbe unserer Evolution. Ähnlich wie bei der optischen Täuschung neigen wir auch bei Assoziationen dazu, diese unwillkürlich als kausal zu interpretieren. Der Psychologe und Wirtschaftsnobelpreisträger Kahneman (2013, 85) beschreibt unser schnelles, intuitives Denken (bei ihm System 1 genannt) als eine *"machine for jumping to conclusions"*. Aberglaube, Verschwörungstheorien etc. legen ein beredtes Zeugnis davon ab.

Ähnlich wie Fotografen lernen müssen ihre Kontrastwahrnehmung richtig einzuschätzen um ein Foto richtig zu belichten, müssen Forscherinnen lernen skeptisch mit voreiligen Schlussfolgerungen umzugehen.

Dem Ökonomen von Hayek (1972), mit Lorenz befreundet, waren diese Gedanken vertraut. Er schreibt

> "Viele Muster der Natur können wir erst entdecken, *nachdem* wir sie gedanklich konstruiert haben. [...]
>
> Der irrtümliche Glaube, dass sich ein Muster immer von selbst enthüllt, wenn wir nur lange genug beobachten oder wenn natürliche Ereignisse in einer hinreichenden Anzahl von Fällen auftreten, ist wahrscheinlich

> durch die Fähigkeit unserer Sinne entstanden, gewisse Arten von Mustern spontan zu erkennen. Zwar trifft dies oft zu, es bedeutet jedoch nur, dass in diesen Fällen die theoretische Arbeit von unseren Sinnen bereits vorweg getan worden ist. Wo wir es jedoch mit Mustern zu tun haben, deren Erfassung zu lernen in unserer Entwicklung keine biologische Notwendigkeit bestand, müssen wir das Muster erst erfinden, ehe wir in den Phänomenen dessen Vorhandensein entdecken können – oder, ehe wir überprüfen können, ob es auf das, was wir beobachten, anwendbar ist."

Ende Exkurs □

Interventionistische Theorien der Kausalität sind vielleicht Ausdruck einer viel älteren Methode, nämlich naturwissenschaftlicher Experimente. Ein Verständnis experimenteller Methoden ist für das Folgende jedenfalls hilfreich.

10.1.2 Experimente

> *"...no one believes an hypothesis except its originator but everyone believes an experiment except the experimenter."*
>
> (W.I.B. Beveridge, 1950, p65)

Experimente gelten gemeinhin als der Goldstandard bei Kausalanalysen (für eine ausführliche Diskussion und Kritik siehe u.a. Deaton and Cartwright (2016)). Der Grund dafür kann einfach anhand eines der ersten naturwissenschaftlichen Experimente erklärt werden, nämlich den Versuchen auf der schiefen Ebene von Galileo Galilei (1564 – 1642), der gemeinhin als einer der bedeutendsten Begründer naturwissenschaftlicher Experimente gilt.

Mit Hilfe seiner Experimente auf der schiefen Ebene (siehe Abbildung 10.2) gelang es Galilei eine mathematische Beschreibung[1] der Fallgesetze finden, wobei er mit äußerst ungenauen Instrumenten zur Zeitmessung sein Auslangen finden musste, wie z.B. Wasseruhren oder seinem eigenen Puls.

Ein Experiment ist im allgemeinen durch die zwei folgenden wesentlichen Elemente gekennzeichnet:

---

[1] Galileo Galilei war auch einer der ersten, der die Bedeutung einer mathematische Formulierung der Gesetzmäßigkeiten erkannte, er schreibt:

> "Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, dem Universum, das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum." (Galileo Galilei: Il Saggiatore, zitiert aus `https://de.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei`)


Abbildung 10.2: Galileo Galilei: Versuche auf der schiefen Ebene, historische Darstellung und Nachbau.

1. *Kontrolle:* eine perfekte Kontrolle sollte durch die Herstellung von *Laborbedingungen* gewährleistet werden; alle möglichen Einflussfaktoren sollten unter Kontrolle des Experimentators stehen (und in den meisten Fällen konstant gehalten werden).

2. *Intervention:* Der Experimentator greift gezielt ein und manipuliert (üblicherweise) einen einzelnen Einflussfaktor. Da dabei alle anderen möglichen Einflussfaktoren unverändert bleiben kann die beobachtete Wirkung unmittelbar auf die Intervention des Experimentators zurückgeführt werden; kontrafaktisch ausgedrückt: hätte die Intervention des Experimentators nicht stattgefunden, hätte die Wirkung nicht beobachtet werden können.

Man beachte, dass die Gültigkeit des Experiments – d.h. die Kausalinterpretation – unmittelbar davon abhängt, dass die Intervention keine unbeabsichtigte (und unbeobachtete) Auswirkungen hat.

Jede einzelne Durchführung gleicht einem induktiven Schluss, aber wenn das Experiment von vielen Personen wiederholt werden kann steigt – nach Popper – der Grad der Bewährung.

Außerhalb der Naturwissenschaften ist eine perfekte Kontrolle selten möglich.

Im wesentlichen bieten sich in diesen Fällen zwei Alternativen an:

1. 'Nachbau' der Realität in Form eines mathematischen Modells und hypothetische Interventionen unter ceteris paribus Annahme (z.B. komparative Statik). Auf diesem Ansatz beruhte ganz grob der 'Cowles Commission Approach';

2. Experimente mit Randomisierung: *Randomized Controlled Trials* (RCT): wenn nicht alle relevanten Faktoren 'kontrolliert' werden können (bzw. nicht a priori bekannt ist, welche Faktoren relevant sind), sorgt Randomisierung dafür, dass keine *systematischen* Unterschiede zwischen den Gruppen (Interventions- und Kontrollgruppe) auftreten. Das heißt, bei einer perfekten Randomisierung dürfen keine *systematischen* Unterschiede zwischen Interventions- und Kontrollgruppe bestehen!

> In der Sprache der Ökonometrie: bei wiederholter Durchführung des Experiments sollte sich eine zufällige Korrelation zwischen Störtermen und Regressoren 'wegmitteln' (für eine einzelne Durchführung kann allerdings nicht damit gerechnet werden, dass die Stichprobenkorrelation exakt Null ist!).

In die Statistik fand die Randomisierung erst mit R.A. Fishers Feldversuchen in Rothamsted breiten Einzug, er gilt gemeinhin als erster, der randomisierte Experimente mit statistischen Methoden auswertete (vgl. Imbens and Rubin, 2015, 26).

Wenn die Zuteilung zu Interventions- bzw. Kontrollgruppe rein zufällig erfolgt (*random assignment*), sollten diese sich auch nicht in Bezug auf *unbeobachtete Faktoren* unterscheiden, deshalb sollten die Ergebnisse kausal interpretiert werden können.

In den Sozialwissenschaften ist Randomisierung allerdings häufig schwieriger durchzuführen, wie in Abbildung 10.3 veranschaulicht wird. Eine Übertragung der ursprünglich für Experimente entwickelten Methoden der *'Potential Outcomes'* auf *Beobachtungsdaten* erfolgte erst viel später vor allem durch Rubin (1974), mehr dazu später.

Wie für alle empirischen Methoden stellt sich auch bei Experimenten die Frage, inwieweit sie ihren eigentlichen Zweck erfüllen, inwieweit sie *valide* Schlussfolgerungen ermöglichen.

10.1.3 Validität

Im Zusammenhang mit Kausalanalysen bezieht sich der Begriff der Validität (*'validity'*) auf die Gültigkeit und Übertragbarkeit von Schlussfolgerungen. Da induktive Schlüsse nie bewiesen werden können, kann auch Validität nicht im strengen Sinne bewiesen werden, sie muss jeweils argumentativ begründet werden. Deshalb spricht man besser vom *Validitätsgrad* einer Schlussfolgerung oder Methode.

Generell unterscheidet man zwischen interner und externer Validität. Eine empirische Analyse ist *intern valid*, wenn die Schlussfolgerungen aus der Stichprobe für die untersuchte Grundgesamtheit gültig sind, und wenn alternative Erklärungsmöglichkeiten weitestgehend ausgeschlossen werden können. Eine Analyse ist *extern valid*, wenn die Schlussfolgerungen auf andere Grundgesamtheiten oder Umstände übertragen lassen.

Wird zum Beispiel eine Absolventenbefragung an einer Universität durchgeführt, so geht es bei der internen Validität darum, wie gut mit den zur Verfügung stehenden Methoden aus den beantworteten Fragebögen auf die Grundgesamtheit aller Studierenden dieser Universität geschlossen werden kann, und inwieweit damit die eigentlich interessierende Frage beantwortet werden kann. Bei der externen Validität geht es im nächsten Schritt darum, inwieweit die Ergebnisse auf Studierende anderer Universitäten übertragbar sind.

Interne Validität

Im wesentlichen geht es bei der internen Validität darum, ob wir tatsächlich das messen, was wir messen wollen (bzw. zu messen vermeinen).

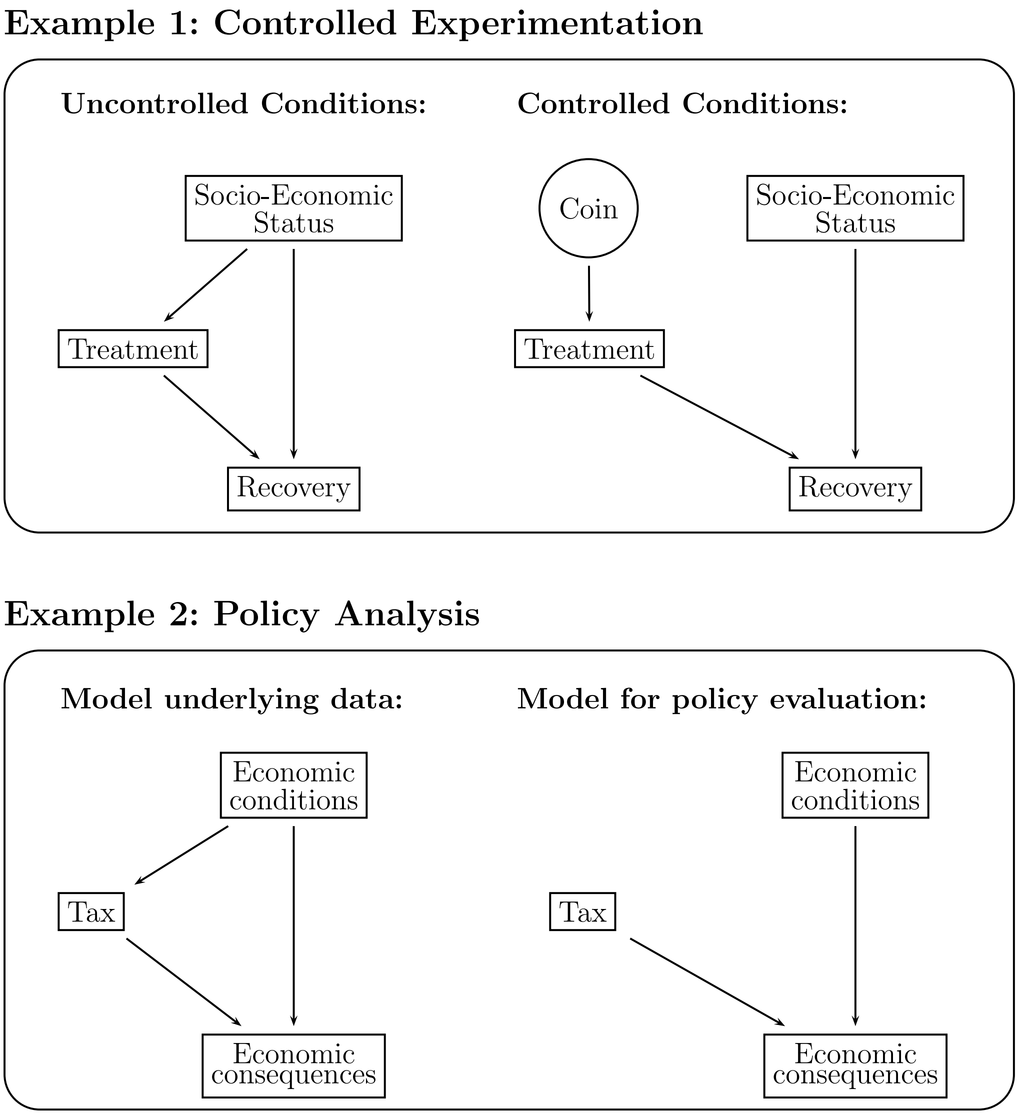


Abbildung 10.3: Kontrollierte und nicht kontrollierte Experimente (entnommen aus: Pearl (2000, 347f).

Interne Validität hat zumindest zwei Komponenten, erstens, inwieweit der Schätzer für den kausalen Effekt unverzerrt und konsistent ist, und zweitens, inwieweit Hypothesentests zuverlässige Ergebnisse liefern, das heißt, inwieweit die Standardfehler richtig geschätzt wurden und die Verteilungsannahmen zutreffend sind.

Wie bereits früher gezeigt führt eine Korrelation der Störterme mit den unabhängigen x Variable(n) zu verzerrten und nicht konsistenten OLS Schätzfunktionen für die Parameter. Solche Fälle, in denen die interne Validität verletzt ist, treten z.B. auf bei

- Fehlende relevante Variablen (*'omitted variables'*); mit den Spezialfällen Selektionsprobleme (*'selection bias'*) und Unbeobachtete Heterogenität (*unobserved heterogeneity'*)
  mögliche Maßnahmen: z.B. Instrumentvariablen, Randomisierte Experimente (*Randomized Controlled Trials*, RCT). Proxy Variablen können die Probleme möglicherweise etwas mildern, meist aber nicht komplett beseitigen.
- Simultane Kausalität (*'simultaneous causality bias'*);
  mögliche Maßnahmen: z.B. Instrumentvariablen, Experimente (RCT).
- Messfehler in den x Variablen (*'errors-in-variables bias'*);
  mögliche Maßnahmen: z.B. Instrumentvariablen, Modellierung des Messfehlers
- Fehlspezifikation in Bezug auf die Funktionsform;
  mögliche Maßnahmen: Transformation der Variablen, nicht-lineare Schätzmethoden

Heteroskedastizität und Autokorrelation führen zu verzerrten und nicht konsistenten Standardfehlern, und gefährden damit die interne Validität von Hypothesentests.

Mögliche Probleme für die interne Validität

- *Mangel- oder fehlerhafte Randomisierung:* Wenn zum Beispiel eine Telefonumfrage untertags im Festnetz durchgeführt wird sind vermutlich Nicht-Berufstätige überrepräsentiert.
- *Mangelhafte Mitwirkung der Versuchspersonen* (*'failure to follow treatment protocol'*, *'partial compliance'*): Versuchspersonen können nicht gezwungen werden alle Anordnungen exakt zu erfüllen (ein Acker kann sich gegen den Dünger nicht wehren, Versuchspersonen können ein Treatment häufig verweigern).
- *Natürlicher Abgang* (*attrition*): nach Randomisierung können Versuchspersonen ausfallen, insbesondere bei länger dauernden Experimenten (z.B. Arbeitsmarktmaßnahmen), und dieser Abgang erfolgt meist nicht zufällig.
- *Hawthorne und John Henry Effekte:* Personen, die sich beobachtet fühlen, ändern manchmal ihr Verhalten. Die Bezeichnung leitet sich von den Hawthorne Werken (General Electric Company, in der Nähe von Chicago) her, in denen

von 1924 – 1932 Produktivitätsstudien durchgeführt wurden. Da die Teilnehmer in der *treatment* Gruppe wussten, dass sie beobachtet werden, lag die Vermutung nahe, dass sie dies zu vermehrter Arbeit anspornen würde.[2] Während sich der Hawthorne Effekt auf Verhaltensänderungen der *treatment* Gruppe bezieht, versteht man unter John Henry Effekten Verhaltensänderungen bei der Kontrollgruppe (z.B. aus Frustration nicht in den Genuss einer Maßnahme zu kommen).

- *Kleine Stichproben:* Experimente sind häufig teuer, und deshalb sind die Stichproben manchmal klein.

Externe Validität

Die externe Validität ist z.B. gefährdet wenn Unterschiede in der Grundgesamtheit, oder Unterschiede in den Rahmenbedingungen bestehen. Probleme mit der externen Validität können z.B. aufgrund theoretischer Überlegungen vermutet werden, oder aufgrund eines Vergleichs von Studien für verschiedene relevante Grundgesamtheiten erkannt werden.

Für Galileo Galileis Versuche auf der schiefen Bahn stellt sich z.B. die Frage, inwieweit die Ergebnisse auch in Rom, Peking oder auf Alpha Centauri Gültigkeit haben.

Mögliche Probleme für die externe Validität

- *Nicht repräsentative Stichprobe:* wenn zum Beispiel Freiwillige Teilnehmer für ein Experiment ausgewählt werden werden ist fraglich, ob dies nicht eine Stichprobenverzerrung nach sich zieht.
- *Ungeeignete experimentelle Maßnahmen:* zum Beispiel Dauer eines Experiments kann zu kurz sein, am langfristige Verhaltensänderungen zu messen; auch Größeneffekte können eine Rolle spielen.
- *Gleichgewichtseffekte:* Experimente werden fast immer in einem kleinen Rahmen durchgeführt. Wird zum Beispiel ein Arbeitsmarktprogramm, dessen Auswirkungen vorher im kleinen Rahmen getestet wurden, flächendeckend eingeführt, kann dies Auswirkungen auf das allgemeine Gleichgewicht haben und *feed-backs* bewirken, die experimentell nicht vorhersehbar waren.

10.1.4 Beobachtungsstudien

Experimente sind oft nicht oder nur schwer durchführbar, und häufig auch ethisch nicht vertretbar. In solchen Fällen muss notwendigerweise auf Beobachtungsdaten zurück gegriffen werden, deren (kausale) Interpretation ungleich schwieriger ist als von experimentellen Studien.

Alte Debatte: *Verursacht Rauchen Krebs?* (→ Epidemiologie)

[2] Eine nachträgliche genauere Auswertung der Hawthorne Daten ergab, dass in diesen Experimenten vermutlich *kein* Hawthorne Effekt vorlag, vgl. Stock and Watson (2006, S. 474).

Offensichtlich ist Rauchen keine notwendige Bedingung für die Entstehung der Krankheit, denn es erkranken auch viele Nichtraucher; Krebs kann viele Ursachen haben. Andererseits ist Rauchen auch keine hinreichende Bedingung, denn nicht alle Raucher erkranken tatsächlich; oft sind bestimmte Kofaktoren erforderlich, damit die Wirkung eintritt, z.B. eine genetische Disposition.

Tatsächlich publizierte R.A. Fisher in seinen letzten Lebensjahren mehrere Papers (u.a. im 'Nature'), in denen er bezweifelte, dass die bis dahin vorliegende empirische Evidenz den Schluss zulasse, dass eine kausaler Zusammenhang zwischen Rauchen und Lungenkrebs bestehe (für eine ausführliche Darstellung siehe Salsburg (2002, 181ff)).

Retrospektive Studien: Bereits Erkrankte werden nach Lebensgewohnheiten befragt.

Probleme: Omitted Variables (Confounding; z.B. sozio-ökonomischer Status); beruhen häufig auf subjektiven Erinnerungen (Meßfehler).

Prospektive Studien: Personen werden nach Rauchgewohnheiten befragt und dementsprechend in Gruppen eingeteilt. Nach entsprechender Zeit werden die Gruppen untersucht.

Probleme: Omitted Variables (Confounding), Selektive Stichproben (opportunity samples; externe Validität); manchmal kleine Stichproben.

Weder retro- noch prospektive Studien erlauben für sich alleine genommen eine kausale Interpretation!

10.2 Eine erste Intuition: Die Methode der Zweistufigen Kleinsten Quadrate

Stellen Sie sich vor, Sie sollten die Auswirkungen der Lernzeit (LZ) auf ein Prüfungsresultat untersuchen. Sie befragen dazu sechzig Studierende nach den Stunden, die sie für die Prüfungsvorbereitung verwendeten, und nach den Punkten, die sie schließlich bei der Prüfung erzielten (Pkt). Angenommen, Sie erhalten bei der Befragung die Daten, die im Scatter-Diagramm in Abbildung 10.4 dargestellt sind.

Eine Regression der Punkte auf die Lernzeit gibt folgendes Ergebnis, welches als strichlierte Linie in Abbildung 10.4 eingezeichnet ist.

$$\begin{array}{rcccc} \text{Pkt} & = & 157.404 & - & 1.701 \text{ LZ} \\ & & (6.004)^{***} & & (0.807)^{**} \end{array}$$
$$R^2 = 0.071, \qquad n = 60$$

Das Ergebnis scheint nahezulegen, dass es einen negativen Zusammenhang zwischen Lernzeit und Prüfungserfolg gibt. Die Lernzeit scheint zwar nur einen relativ kleinen Anteil der Streuung zu erklären ($R^2 = 0.07$), aber der Zusammenhang ist auf dem 5%-Niveau signifikant von Null verschieden.

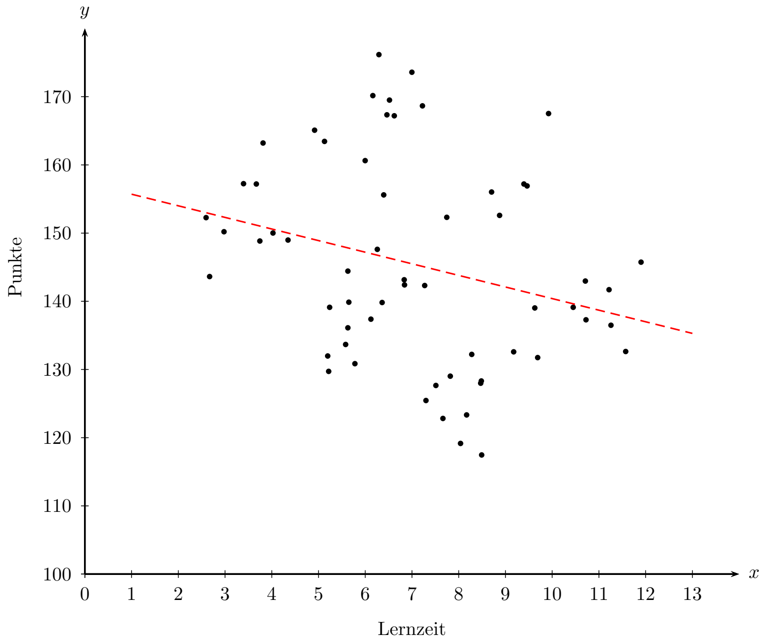


Abbildung 10.4: Zusammenhang zwischen Prüfungserfolg (Y) und Lernzeit (LZ)

Bedeutet dies, dass fleißige Studierende bei der Prüfung mit einer schlechteren Note rechnen müssen???

Nicht unbedingt, möglicherweise hängt das Prüfungsergebnis auch von unbeobachteten Fähigkeiten wie z.B. der Intelligenz ab, und möglicherweise bereiten sich klügere Studierende im Durchschnitt weniger lange auf die Prüfung vor.

Tatsächlich wurden die Daten mit dem Computer erzeugt, und es wurde angenommen, dass der Prüfungserfolg auch von anderen Fähigkeiten (F) abhängt. Der Einfachheit halber wurden drei Gruppen von Studierenden mit unterschiedlichen Fähigkeiten (d.h. für $\mathrm{F} = 75, 100$ und 125) angenommen.

Wenn wir diesen Indikator für Fähigkeiten in der Regression berücksichtigen erhalten wir ein völlig anderes Ergebnis

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Pkt} & = & 8.278 & + & 5.052\ \text{LZ} & + & 1.014\ \text{F} \\ & & (7.351) & & (0.421)^{***} & & (0.048)^{***} \end{array}$$

$$R^2 = 0.895, \qquad n = 60$$

Dieses Ergebnis ist deutlich weniger überraschend, alle Koeffizienten weisen nun das erwartete Vorzeichen auf und sind hochsignifikant von Null verschieden.

Was ist passiert?

Das ‘wahre’ Modell dieses synthetischen Beispiels ist

$$\text{Pkt}_i = 10 + 5\text{LZ}_i + 1\,\text{F}_i + \varepsilon_i \qquad \text{mit } \varepsilon_i \sim \text{N}(0, 25)$$

Zusätzlich wurde ein negativer Zusammenhang zwischen Lernzeit und den Fähigkeiten F der folgenden Art unterstellt, d.h. es wurde angenommen, dass fähigere Studierende weniger Zeit in die Prüfungsvorbereitung investieren

$$\text{LZ}_i = 12 - 0.1\,\text{F}_i + \upsilon_i$$

Der datengenerierende Prozess sieht also tatsächlich anders aus als in der 'kurzen' Regression auf die Lernzeit unterstellt, das 'kurze' Modell ist fehlspezifiziert. Da wir lediglich drei unterschiedliche Fähigkeitsniveaus unterstellt haben kann das 'wahre' Modell einfach grafisch dargestellt werden, siehe Abbildung 10.5.[3]

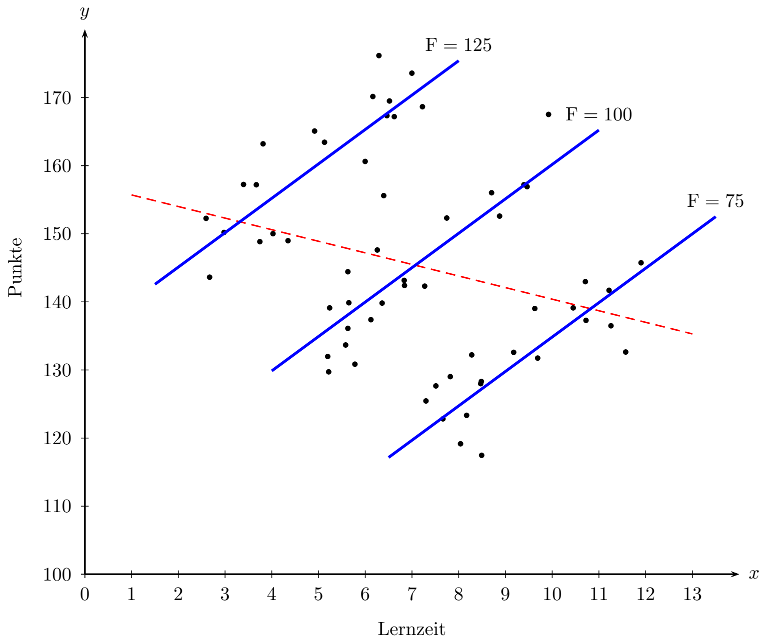


Abbildung 10.5: Zusammenhang zwischen Prüfungserfolg (Pkt) und Lernzeit (LZ) unter Berücksichtigung unterschiedlicher Fähigkeiten. In diesem Beispiel wurden drei Gruppen Studierender mit unterschiedlichen Fähigkeiten F angenommen.

Dies ist natürlich nur ein weiteres Beispiel für den *'omitted variables bias'*, eine Nichtberücksichtigung der relevanten Variable Fähigkeiten führt zu völlig irreführenden Schlussfolgerungen!

Leider ist dies kein bei den Haaren herbeigezogenes Beispiel, tatsächlich dürfte die Nichtberücksichtigung relevanter Variablen bei praktischen Arbeiten eines der schwerwiegendsten Probleme sein. Deshalb wollen wir dieses Problem nun etwas ausführlicher diskutieren.

10.2.1 Nichtberücksichtigung relevanter Variablen (*Omitted Variables*)

Wir haben diesen Fall im Rahmen der deskriptiven Regressionsanalyse bereits ausführlich diskutiert, deshalb werden wir die Konsequenzen einer irrtümlichen Nichtberücksichtigung einer relevanten x Variable (*'omitted variable'*) nur kurz wiederholen.

[3]Für eine tatsächliche Untersuchung des kausalen Effekts der Lernzeit siehe z.B. Stinebrickner and Stinebrickner (2008).

Angenommen das "wahre" Modell sei

$$\ddot{y}_i = \beta_2 \ddot{x}_{i2} + \beta_3 \ddot{x}_{i3} + \varepsilon_i$$

wobei alle Variablen in Abweichungsform dargestellt sind (d.h. $\ddot{x}_i := x_i - \bar{x}$), aber wir schätzen ein 'falsches' (kurzes) Modell

$$\ddot{y}_i = \widehat{\beta}_2^* \ddot{x}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i^*$$

Der geschätzte OLS Koeffizient des 'falschen' Modells ist

$$\widehat{\beta}_2^* = \frac{\sum \ddot{x}_{i2} \ddot{y}_i}{\sum \ddot{x}_{i2}^2}$$

Um die Erwartungstreue zu überprüfen setzen wir wie üblich für $\ddot{y}_i$ das "wahre" Modell $\ddot{y}_i = \beta_2 \ddot{x}_{i2} + \beta_3 \ddot{x}_{i3} + \varepsilon_i$ ein und bilden (für deterministische x) den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2^*) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum \ddot{x}_{i2} \overbrace{(\beta_2 \ddot{x}_{i2} + \beta_3 \ddot{x}_{i3} + \varepsilon_i)}^{y_i}}{\sum \ddot{x}_{i2}^2} \right) \\
&= \mathrm{E}\left(\beta_2\right) + \mathrm{E}\left(\beta_3 \frac{\sum \ddot{x}_{i2} \ddot{x}_{i3}}{\sum \ddot{x}_{i2}^2} \right) + \mathrm{E}\left(\frac{\sum \ddot{x}_{i2} \varepsilon_i}{\sum \ddot{x}_{i2}^2} \right) \\
&= \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum \ddot{x}_{i2} \ddot{x}_{i3}}{\sum \ddot{x}_{i2}^2} \\
&= \beta_2 + \beta_3 \frac{\mathrm{cov}(x_2, x_3)}{\mathrm{var}(x_2)}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass dies auch bei exogenen Regressoren gilt, d.h. wenn $\mathrm{E}[(x_{i2} - \bar{x}_2)\varepsilon_i] = 0$ und $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$!

Selbst wenn die Gauss Markov Annahme A3 (d.h. $\mathrm{E}(\varepsilon_i | \boldsymbol{X}) = 0$) erfüllt ist, ist der OLS Schätzer verzerrt, da die Annahme A1 verletzt ist, d.h. die 'kurze' Funktion ist fehlspezifiziert!

Wenn wir berücksichtigen, dass $\mathrm{cov}(x_2, x_3)/\,\mathrm{var}(x_2)$ der Steigungskoeffizient einer Regression der fehlenden x_3 Variable auf die vorkommende x_2 Variable, also $x_{i3} = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \upsilon_i$, können wir in diesem einfachen bivariaten Fall auch schreiben

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \delta_2 \tag{10.1}$$

Wir interessieren uns für den 'kausalen' Effekt β_2, die OLS Schätzung eines Modells mit fehlenden relevanten Variablen (*'omitted variables'*) liefert aber nur die gemeinsame Auswirkung $\beta_2 + \beta_3 \delta_2$.[4]

[4] Im früheren Beispiel mit der Lernzeit interessierten wir uns für den kausalen Effekt der Lernzeit $\widehat{\beta}_2 = 5.052$, durch Nichtberücksichtigung der Fähigkeiten erhielten wir einen verzerrten Koeffizienten -1.701. Da wir in diesem Beispiel die wahren Werte kennen, können wir dies einfach überprüfen. Unter Berücksichtigung von $\mathrm{F}_i = 147.096 - 6.661\mathrm{LZ}_i + \nu_i$ erhalten wir $\widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_3 * \hat{\delta} = 5.052 + 1.014 * (-6.661) = -1.701$, den Koeffizienten des 'falschen' kurzen Modells.

Tabelle 10.1: Gleichung (10.1) erlaubt eine Abschätzung des Vorzeichens des Bias bei der Schätzung von $\widehat{\beta}_3$, wenn x_3 in der Regression $y_i = \beta_2 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ fälschlich nicht berücksichtigt wird.

	$\text{corr}(x_2, x_3) > 0$	$\text{corr}(x_2, x_3) < 0$
$\beta_3 > 0$	positiver Bias	negativer Bias
$\beta_3 < 0$	negativer Bias	positiver Bias

Dies ist natürlich der bekannte *'omitted variables bias'*: Wann immer eine nicht berücksichtigte Variable mit zumindest einem im Modell vorkommenden Regressor x *und* der abhängigen Variable y korreliert ist, führt diese Nichtberücksichtigung der relevanten Variable zu systematisch verzerrten Schätzergebnissen)!

Da dieses Problem mit zunehmender Stichprobengröße nicht kleiner wird ist eine solche OLS Schätzung auch *nicht konsistent*!

Man kann dies auch als ein Identifikationsproblem verstehen, wenn eine relevante (d.h. mit y und x_2 korrelierte) Variable fehlt ist β_2 nicht identifiziert, wir können nur die Summe $\beta_2 + \beta_3\delta_2$ berechnen (siehe Gleichung(10.1)!

Im multiplen Regressionsmodell sind die Formeln komplexer, aber auch dort führt eine einzige fehlende relevante Variable in der Regel (d.h. die Regressionskoeffizienten untereinander korreliert sind) dazu, dass *alle* Koeffizienten verzerrt sind und nicht konsistent geschätzt werden können!

Wie Gleichung (10.1) zeigt hängt die Richtung der Verzerrung vom Vorzeichen des Koeffizienten β_3 und von der Kovarianz zwischen x_2 und x_3 ab (vgl. Tabelle 10.1).

Im Beispiel hängt die Punktezahl positiv von den unbeobachteten Fähigkeiten ab ($\beta_3 > 0$) und die Fähigkeiten sind negativ mit der Lernzeit korreliert ($\text{corr}(x_3, x_2) < 0$), deshalb wird der Effekt unterschätzt, der Bias ist negativ.

Im multiplen Regressionsmodell sind die Zusammenhänge nicht mehr so einfach, aber die grundlegende Intuition bleibt gültig.

Für das Folgende ist es wichtig zu erkennen, dass diese Fehlspezifikation zu einer Korrelation mit dem Störterm führt: Wir haben irrtümlich ein kurzes Modell

$$\text{Pkt} = \widehat{\beta}_1^* + \widehat{\beta}_2^* \text{LZ} + \varepsilon^*$$

geschätzt, das wahre Modell ist aber

$$\text{Pkt} = \beta_1 + \beta_2 \text{LZ} + \underbrace{\beta_3 \, \text{F} + \varepsilon}_{\varepsilon^*}$$

Der Störterm ε^* der fehlspezifizierten Regression enthält den Einfluss aller nicht berücksichtigten Variablen, deshalb ist $\varepsilon^* = \beta_3 \text{F} + \varepsilon$, und wenn – wie in diesem Fall – F und LZ korreliert sind führt das im fehlspezifizierten Modell zu einer Korrelation zwischen dem Störterm ε^* und LZ. Deshalb liefert eine OLS Schätzung für β_2 im fehlspezifizierten Modell ein systematisch verzerrtes Ergebnis.

Eine solche Korrelation zwischen Regressoren und Störtermen wird in der Ökonometrie *Endogenität* genannt. Wir werden später sehen, dass auch simultane Kausalität oder Messfehler bei den Regressoren zu solcher Endogenität führt, und dass in all diesen Fällen die OLS Schätzer weder erwartungstreu noch konsistent sind.

Aber bereits jetzt sei betont, dass dieser ökonometrische Endogenitätsbegriff sich von dem Endogenitätsbegriff unterscheidet, der in anderen Disziplinen (z.B. Mikro- oder Makroökonomik) üblich ist.

Um eine intuitive Vorstellung von den Problemen zu bekommen erinnern wir uns, dass durch eine Regression eine zu erklärende Variable y gewissermaßen in zwei Teile zerlegt wird, in einen durch die Regressoren erklärten (systematischen) Teil, und in einen unerklärten Teil, der im Störterm abgebildet wird. Dies ist im linken Panel von Abbildung 10.6 dargestellt; wenn das Modell korrekt spezifiziert ist (!) kann der zu schätzende Koeffizient β_2 kausal interpretiert werden.

Falls aber die erklärende Variable x mit dem Störterm ε korreliert ist, wie im rechten Panel von Abbildung 10.6 dargestellt, wird der eigentlich interessierende Zusammenhang zwischen x und y durch den zusätzlichen Zusammenhang zwischen x und ε gewissermaßen 'verschmutzt'. Deshalb werden fehlende relevante Variablen in der englischen Literatur häufig als ***'confounder'*** bezeichnet.

Wenn ein Regressor x mit ε korreliert ist können wir uns vorstellen, ε ist eine Funktion von x, das heißt $\varepsilon = \varepsilon(x)$. In diesem Fall misst β_2 nicht mehr den marginalen Effekt von x, da

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon(x)$$

In diesem Fall gibt es einen direkten und indirekten Zusammenhang zwischen x und y

$$\frac{dy}{dx} = \beta_2 + \frac{d\varepsilon}{dx} := \beta_2^*$$

Der OLS Schätzer misst den gemeinsamen Einfluss $\beta_2^* := \beta_2 + \frac{d\varepsilon}{dx}$ anstelle des meist interessierenden marginalen Effekts β_2, der OLS Schätzer ist systematisch verzerrt.

Wie schon erwähnt kann dies auch als Identifikationsproblem interpretieren, mit einem endogenen Regressor x können wir nur den Gesamteffekt $\beta_2 + \frac{d\varepsilon}{dx}$ identifizieren, nicht aber den isolierten Effekt β_2, der uns eigentlich interessiert.

Für das einfache lineare Beispiel 'fehlender relevanter Variablen' kann dieser Bias einfach gezeigt werden: der datengenerierende Prozess (DGP) sei $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ und wir interessieren uns für β_2. Wenn x_3 nicht beobachtet werden kann, aber $x_{i3} = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \upsilon_i$ ist, erhalten wir durch einsetzen

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \underbrace{[\beta_3(\delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \upsilon_i) + \varepsilon_i]}_{\varepsilon^*}$$

und der marginale Effekt ist

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta_2 + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_2} = \beta_2 + \beta_3 \delta_2$$

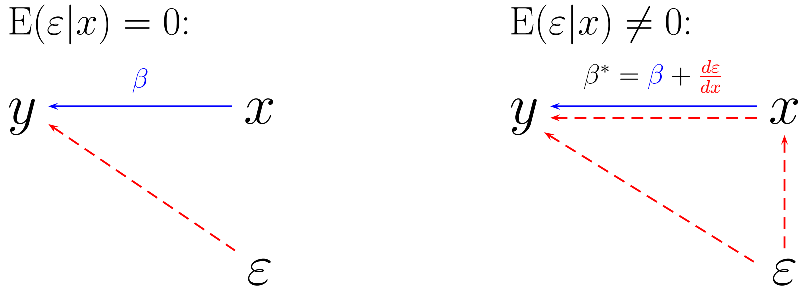


Abbildung 10.6: Wenn $E(\varepsilon_i|x_1, \ldots, x_n) = 0$ (links) ist das Modell korrekt spezifiziert und der OLS Schätzer ist unverzerrt, β misst den Effekt von x auf y. Falls $E(\varepsilon_i|x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ (rechts) ist das Modell fehlspezifiziert und der OLS Schätzer verzerrt; der messbare Parameter β^* misst den direkten Effekt β *und* indirekten Effekt $d\varepsilon/dx$ gemeinsam, der interessierende Parameter β ist in diesem Fall *nicht identifiziert*.

Wann immer der Regressor x mit dem Störterm ε korreliert ist gibt es *ohne zusätzlicher Information* keine Möglichkeit den Koeffizienten β_2 unverzerrt zu schätzen! Da diese Korrelation zwischen x und ε in der Regel auch mit zunehmender Stichprobengröße nicht verschwindet, ist der OLS Schätzer im Fall eines endogenen Regressors auch nicht konsistent.

Beispiel: Ein bekanntes Problem der Arbeitsmarktökonomik ist, dass die Stundenlöhne (StdL) nicht nur von der Bildung abhängen, sondern auch von unbeobachtbaren Fähigkeiten (F). Angenommen der datengenerierende Prozess wird durch

$$\log(\text{StdL}) = \beta_1 + \beta_2 \text{Bildg} + \beta_3 \text{F} + \varepsilon$$

beschrieben, aber sie haben keinen Indikator für die Fähigkeiten und schätzen deshalb

$$\log(\text{StdL}) = \widehat{\beta}_1^* + \widehat{\beta}_2^* \text{Bildg} + \hat{\varepsilon}^*$$

Mit welchem Bias würden Sei rechnen? Wovon hängt die Größe des Bias ab?

□

Zusammenfassend können wir festhalten, dass im Fall von *'Omitted Variables'*

- die OLS-Schätzer für die Koeffizienten verzerrt (*biased*) sind, wenn die inkludierten Variablen mit den nicht berücksichtigten Variablen korreliert sind;
- die OLS-Schätzer für die Koeffizienten auch *nicht* konsistent sind.
- Die Schätzer für die Standardabweichungen der Koeffizienten sind ebenfalls verzerrt, d.h. die üblichen Teststatistiken sind ungültig!
- Fehlende Variablen führen häufig zu Autokorrelation in den Residuen.

Hinweis: Während 'fehlende relevante Variablen' ziemlich verheerende Folgen für die Schätzung der Koeffizienten haben kann, sind die Auswirkungen für eine *Prognose* von $\widehat{y}$ häufig weniger dramatisch. Wenn die fehlende Variable eine lineare Funktion der berücksichtigten Variablen ist sind die Vorhersagen sogar unverzerrt (Greene, 2003, 30).

Die Intuition ist einfach: angenommen der DGP sei $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, aber wir schätzen irrtümlich das 'kurze' Modell $y_i = \widehat{\beta}_1^* + \widehat{\beta}_2^* x_{i2} + \hat{\varepsilon}_i^*$, und die fehlende Variable x_3 sei eine lineare Funktion von x_2, d.h. $x_{i3} = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \upsilon_i$ mit $\mathrm{E}(\upsilon_i) = 0$.

Wenn wir in das korrekte 'lange' Model einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \\
&= \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3(\delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \upsilon_i) + \varepsilon_i \\
&= \underbrace{\beta_1 + \beta_3\delta_1}_{\beta_1^*} + \underbrace{(\beta_2 + \beta_3\delta_2)}_{\beta_2^*} x_{i2} + \underbrace{\beta_3\upsilon_i + \varepsilon_i}_{\varepsilon_i^*} \\
&= \beta_1^* + \beta_2^* x_{i2} + \varepsilon_i^*
\end{aligned}$$

Wenn wir diese fehlspezifizierte Gleichung schätzen erhalten wir $y_i = \widehat{\beta}_1^* + \widehat{\beta}_2^* x_{i2} + \hat{\varepsilon}_i^*$ und unter der Annahme $\mathrm{E}(\varepsilon_i^*) = \mathrm{E}(\beta_3\upsilon_i + \varepsilon_i) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_i) &= \mathrm{E}(\widehat{\beta}_1^* + \widehat{\beta}_2^* x_{i2} + \hat{\varepsilon}_i^*) = (\beta_1 + \beta_3\delta_1) + (\beta_2 + \beta_3\delta_2)x_{i2} \\
&= \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3(\delta_1 + \delta_2 x_{i2})
\end{aligned}$$

Dies ist natürlich das ursprüngliche Modell, in diesem einfachen Modell, in dem die fehlende Variable eine einfache lineare Funktion des berücksichtigten Regressors ist, wäre die Prognose tatsächlich erwartungstreu und konsistent.

Die Koeffizienten des 'kurzen' Modells haben zwar keine kausale Interpretation, aber für die Vorhersage 'korrigieren' sie gewissermaßen für die fehlende Variable x_3. Natürlich ist die Vorhersage mit dem 'kurzen' Modell nicht effizient, wie man einfach am Störterm $\varepsilon_i^* = \beta_3\upsilon_i + \varepsilon_i$ erkennen kann.

10.2.2 Die Intuition hinter der Methode der Zweistufigen Kleinsten Quadrate

Bekanntlich liefert die OLS Methode eine orthogonale Zerlegung von y in eine systematische – durch die x Variablen erklärte – Komponente, und in eine stochastische nicht-systematische Komponente, die Residuen $\hat{\varepsilon}$. Die OLS Methode stellt sicher, dass die Residuen mit den x Variablen *in der Stichprobe* unkorreliert sind (orthogonal), aber dies muss nicht für die Störterme der Grundgesamtheit ε gelten.

Endogenität im ökonometrischen Sinne ist definiert als eine Abhängigkeit zwischen Störtermen und Regressoren, d.h. $\mathrm{E}(\varepsilon_i|\boldsymbol{X}) \neq \mathbf{0}$.

Kehren wir nochmals zurück zur Lernzeit und dem Prüfungserfolg. Wenn wir die Fähigkeiten nicht beobachten können führt dies zu verzerrten Schätzungen, die Störterme des fehlspezifizierten Modells $\varepsilon_i^* = \beta_3 F_i + \varepsilon_i$ sind mit der Lernzeit korreliert.

Wenn wir aber in einem (hypothetischen) Experiment die Lernzeit durch eine Intervention (randomisiert) beeinflussen könnten, dann könnten wir dies nützen um damit den kausalen Effekt β_2 messen. Dies wird allerdings nur in den seltensten Fällen möglich sein.

Aber etwas ähnliches könnte gelingen, wenn wir eine Variable hätten, die wie eine Intervention in einem Experiment wirkt, d.h. eine Variable, die *nur* die – durch die Fehlspezifikation endogene – Variable Lernzeit beeinflusst, und die sich *ausschließlich über die Lernzeit* auf die Punktezahl auswirkt! Eine solche Variable wird **Instrumentvariable** genannt.

Stellen wir uns vor, das Wetter (W) am Vortag würde sich *nur* auf die Lernzeit auswirken, aber keine anderen direkten oder indirekten Auswirkung auf den Prüfungserfolg (Pkt) haben.

Das Wetter würde dann etwas ähnliches bewerkstelligen wie ein Experimentator durch seine Intervention, eine *isolierte Variation* des interessierenden Regressors.

Intuitiv können wir uns vorstellen, dass in der Lernzeit indirekt die unterschiedlichen Fähigkeiten zum Ausdruck kommen, sie enthält deshalb gewissermaßen 'zwei Arten von Streuung', eine *erwünschte Streuung*, die zur Messung der systematischen Komponente von verwendet werden kann, und eine *unerwünschte Streuung*, die durch die Korrelation mit den Störtermen ε (d.h. der nicht-systematischen Komponente von y) zustande kommt, siehe Abbildung 10.6.

Diese intuitive Idee der Zerlegung der Streuung von x in eine 'gute' und erwünschte Streuung und in eine unerwünschte problematische Streuung führt unmittelbar zur Idee der Methode der zweistufigen kleinsten Quadrate (*'two stage least squares'* bzw. 2SLS).

Wenn das Wetter tatsächlich nur die Lernzeit beeinflusst und sonst keinen systematischen Einfluss hat können wir der Wetter nützen, um die Lernzeit mit Hilfe von OLS orthogonal in zwei Teile zu zerlegen.

Wir schätzen

$$\mathrm{LZ} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \mathrm{W} + \hat{v} \quad \longrightarrow \quad \widehat{\mathrm{LZ}}$$

Der gefittete Wert $\widehat{\mathrm{LZ}}$ hängt ausschließlich vom Wetter ab und sollte deshalb nicht mit den Störtermen (und den darin enthaltenen Fähigkeiten) korreliert sein.

Diese gefitteten Werte können in einem zweiten Schritt verwendet werden, um den kausalen Effekt der Lernzeit auf die Punktezahl konsistent zu schätzen

$$\mathrm{Pkt} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \widehat{\mathrm{LZ}} + \hat{\varepsilon}$$

In unserem Beispiel

1. In der ersten Stufe wird der (durch Fehlspezifikation) endogene Regressor auf die Instrumentvariable regressiert

$$\begin{array}{rclcl} \widehat{\mathrm{LZ}} & = & \underset{(0.568)^{***}}{9.389} & - & \underset{(0.178)^{***}}{0.82\ \mathrm{W}} \end{array}$$

$$R^2 = 0.268, \qquad n = 60$$

2. In der zweiten Stufe wird anstelle der tatsächlichen Lernzeit nur die durch das exogene Wetter erklärte Lernzeit $\widehat{\text{LZ}}$ als Regressor verwendet

$$\text{Pkt} \quad = \quad 93.407 \quad + \quad 7.351\,\widehat{\text{LZ}}$$

   (da – wie wir später sehen werden – die Standardfehler der zweiten Stufe durch dieses Verfahren nicht korrekt berechnet werden, und auch das R^2 nicht die übliche Interpretation hat, werden sie hier nicht angegeben.)

Man kann zeigen, dass dieser Schätzer konsistent ist, allerdings ist auch er in kleinen Stichproben meist verzerrt.

In diesem Beispiel erhalten wir einen Punktschätzer von 7.35, d.h. aufgrund dieser Schätzung würden wir erwarten, dass eine zusätzliche Lernstunde im Durchschnitt 7.35 zusätzliche Punkte einbringt. Dies ist zwar immer noch eine ziemlich ungenaue Schätzung (der wahre Wert war 5), aber immerhin genauer als die Schätzung der kurzen Modells $\text{Pkt} = 157.404 - 1.701\,\text{LZ} + \hat{\varepsilon}$.

Damit diese Methode der Zweistufigen Kleinsten Quadrate konsistente Schätzfunktionen liefert müssen die **'Instrumentvariablen'** (z) die beiden folgenden Anforderungen erfüllen

1. **Relevanz:** $\text{cov}(z, x) \neq 0$, und
2. **Exogenität:** $\text{cov}(z, \varepsilon) = 0$ (*'exclusion restriction'*)

Abbildung 10.7 (rechtes Panel) zeigt das Grundprinzip einer 2SLS Schätzung. In der ersten Stufe wird der endogene Regressor x in zwei Teile zerlegt, einen exogenen Teil $\hat{x}$, der durch die Instrumentvariable erklärt wird, und in einen endogenen Teil υ_x. Die Streuung von $\hat{x}$ ist unproblematisch, da sie ausschließlich durch die per Definition exogene Instrumentvariable erklärt wird. Die problematische Streuung von υ_x wird verworfen, vgl Abbildung 10.7.

In der zweiten Stufe wird das exogene (gefittete) $\hat{x}$ als Regressor verwendet.

Wir werden später sehen, dass – wenn die Annahmen für Instrumentvariablen (*Relevanz* und *Exogenität*) erfüllt sind – Instrumentvariablenschätzer konsistent sind.

Die Überprüfung der Relevanz ist relativ einfach, wir müssen nur die Schätzung der ersten Stufe überprüfen; die Instrumentvariable(n) sollten einen möglichst großen Erklärungsbeitrag leisten.

Viel schwieriger ist es die Exogenität zu überprüfen, das heißt, ob sie tatsächlich nicht mit den unbeobachtbaren Störtermen korreliert ist. Diese Annahme stellt sicher, dass sich die Instrumentvariable z *nur* über die beobachteten x auf y auswirkt, und dass kein anderer Einflusskanal von z auf y existiert!

Da die Störterme aber *alle* im systematischen Teil der Regression unberücksichtigten Einflüsse enthalten können wir *nie* mit Sicherheit ausschließen, dass die Instrumentvariable nicht mit einer dieser unberücksichtigten Variablen korreliert ist. Dies ähnelt einem Induktionsschluss, wir können das Unbekannte nicht mit Sicherheit ausschließen. Falls aber diese unberücksichtigte Variable selbst geringfügig mit x und y korreliert ist, kann dies, wie wir gleich sehen werden, gravierende Folgen haben.

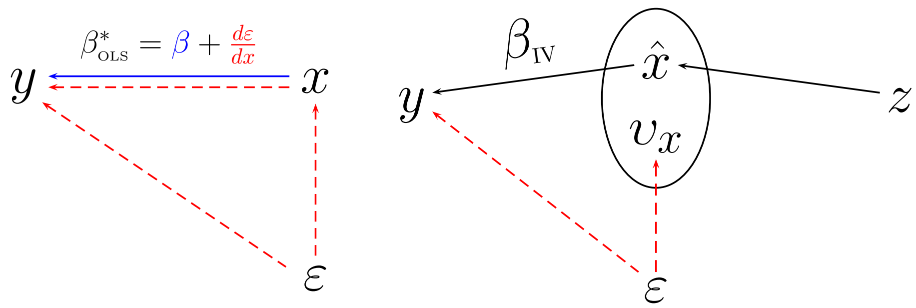


Abbildung 10.7: Falls $\mathrm{E}(\varepsilon|\boldsymbol{X}) \neq 0$ ist der OLS Schätzer β^* verzerrt, da der Einfluss von x auf y durch die Korrelation mit dem Störterm 'verschmutzt' wird (linkes Panel). Bei einer IV Schätzung wird x gewissermaßen in einen exogenen Teil $\hat{x}$ – der durch die Instrumentvariable erklärt wird – und einen endogenen Teil υ_x zerlegt. Die IV Schätzer verwenden nur die exogene Streuung $\hat{x}$ (rechtes Panel).

Vorher ist es aber wichtig zu erkennen, dass ökonometrische Exogenität $\mathrm{E}(\varepsilon_i|\boldsymbol{X}) = 0$ eine deutlich strengere Annahme ist als das, was man z.B. in der Mikroökonomik darunter versteht.

Das Wetter ist aus einer mikroökonomischen Perspektive sicher exogen, aber wenn unsere Prüflinge wetterfühlig sind kann dies zu einer Korrelation mit den nicht berücksichtigten Fähigkeiten führen, und damit zu *ökonometrischer Endogenität*!!!

Die tatsächliche Berechnung der Schätzer erfolgt in der Praxis allerdings nicht nach diesem zweistufigen Verfahren, sondern mit Hilfe eine allgemeinerer Instrumentvariablen Schätzer. Wir haben dieses zweistufigen Verfahren nur erläutert, da es numerisch zu den gleichen Werten führt und eine bessere Intuition liefert.

10.3 Instrumentvariablen Schätzer (IV)

> "Two things distinguish the discipline of econometrics from the older sister field of statistics. One is the lack of shyness about causality. Causal inference has always been the name of the game in applied econometrics. [...]
>
> The second thing that distinguishes us from most statisticians – and indeed from most other social scientists – is an arsenal of statistical tools that grew out of early econometric research on the problem of how to estimate the parameters in a system of linear simultaneous equations. The most powerful weapon in this arsenal is the method of instrumental variables (IV), the subject of this chapter." (Angrist and Pischke, 2008, p. 113)

Es gibt eine ganze Reihe von *Instrumentvariablen Schätzern* (IV Schätzer), wir werden hier nur eine einfache Variante nach der 'Methode der Momente' herleiten. Diese liefern numerisch die gleichen Werte wie die Methode der zweistufigen kleinste Quadrate (2SLS), sind aber einfacher anzuwenden und können leichter verallgemeinert werden.

Da Instrumentvariablen Schätzer *keine* OLS Schätzer sind ist das Gauss Markov Theorem nicht anwendbar, deshalb garantiert uns nichts die Unverzerrtheit und Effizienz der IV Schätzer. Tatsächlich sind IV Schätzer in kleinen Stichproben meist verzerrt und konvergieren nur mit zunehmender Stichprobengröße zu den wahren Werten, d.h. sie sind konsistent.

Technisch gesehen sind IV Schätzer 'Methode der Momente' Schätzer. Diese sind zwar nicht immer unverzerrt und effizient, aber man kann zeigen, dass sie unter recht allgemeinen Annahmen konsistent sind.

10.3.1 Instrumentvariablen als Methode der Momente Schätzer

Wir haben bisher erst eine Methode zur Schätzung eines unbekannten Parametervektors kennengelernt, nämlich die *Methode der Kleinsten Quadrate* (OLS). Die historisch älteste Methode ist allerdings die *'Methode der Momente'*, die immer konsistente Schätzer liefert, die aber – im Unterschied zu Maximum Likelihood Schätzern – nicht immer asymptotisch effizient sind. Die Grundidee der Methode der Momente Schätzer besteht darin, dass die Momente der Stichprobe (z.B. Mittelwert, Varianz, ...) als Schätzer für die Momente der Grundgesamtheit herangezogen werden.

Wir zeigen dies für das einfache Regressionsmodell. In der Grundgesamtheit bestehe folgender Zusammenhang

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Wir nehmen für die Momente der Grundgesamtheit an, dass

- der Erwartungswert der Störterme der Grundgesamtheit ist Null

$$\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$$

- die Kovarianz zwischen den Störtermen der Grundgesamtheit ε_i und dem möglicherweise stochastischen x_i ist ebenfalls Null

$$\mathrm{E}(x_i \varepsilon_i) = 0$$

Die entsprechenden Bedingungen *für die Stichprobe* sind

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{\varepsilon}_i = 0$$

wobei $\hat{\varepsilon}_i$ die Stichprobenresiduen sind.

Durch Einsetzen der Stichprobenresiduen $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 x_i$ in die obigen Bedingungen erhalten wir die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \sum y_i &= n\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \sum x_i \\ \sum y_i x_i &= \widehat{\beta}_1 \sum x_i + \widehat{\beta}_2 \sum x_i^2 \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\beta}_1$ und $\widehat{\beta}_2$ die Methode der Momente Schätzer für β_1 und β_2 sind.

Dies sind aber exakt die gleichen Normalgleichungen, die wir auch für OLS erhalten haben, deshalb liefert die Methode der Momente in diesem einfachen Fall exakt die gleichen Schätzer wie die Methode der kleinsten Quadrate oder – wie wir in einem späteren Kapitel zeigen werden – auch die Maximum Likelihood Methode.

In diesem Fall einfachen führen also alle drei bekannten Schätzmethoden, d.h. OLS, Maximum Likelihood und die Methode der Momente, zum gleichen Ergebnis, aber dies gilt natürlich nicht immer. In manchen komplexen Situationen bietet die Methode der Momente eine relativ einfache Möglichkeit um zu einem konsistenten Schätzer zu gelangen, z.B. bei der Herleitung des Instrumentenvariablen-Schätzers.

Mit dem Methode der Momente Schätzer haben wir die Bedingungen

$$\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}(x_i \varepsilon_i) = 0$$

angenommen um einen konsistenten Schätzer zu erhalten, wobei x auch stochastisch sein kann. Wenn aber zum Beispiel eine fehlerhaft gemessene Variable x^* mit ε korreliert ist kann *nicht* angenommen werden, dass $\mathrm{E}(x_i^* \varepsilon_i) = 0$.

Aber angenommen, wir hätten wieder eine Variable z zur Verfügung, die nicht mit den ε korreliert ist, also $\mathrm{E}(z_i, \varepsilon_i) = 0$, die aber mit x_i korreliert ist ($\mathrm{cov}(z_i, x_i) \neq 0$), kann die Methode der Momente herangezogen werden um zumindest einen konsistenten Schätzer zu finden.

Die entsprechenden Stichproben Momente sind in diesem Fall

$$\frac{1}{n} \sum \hat{\varepsilon}_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n} \sum (z_i \hat{\varepsilon}_i) = 0$$

Eine solche **Instrumentvariable** (z) muss – wie wir bereits im letzten Abschnitt gesehen haben – zwei wichtige Bedingungen erfüllen:

1. *Relevanz:* die Instrumentvariable z sollte möglichst hoch mit dem x korreliert sein
$$\mathrm{cov}(z, x) \neq 0$$

2. *Exogenität:* die Instrumentvariable z darf nicht mit dem Störterm ε der Grundgesamtheit korreliert sein
$$\mathrm{cov}(z, \varepsilon) = 0$$

   Diese essentielle Bedingung wird in der Literatur häufig *'exclusion restriction'* genannt. Wie schon früher erwähnt bedeutet diese Annahme, dass die Instrumentvariable keinen direkten Einfluss auf y haben darf, sondern ausschließlich über x auf y wirken darf. Das bedeutet, das Instrument darf niemals über einen nicht modellierten Einflusskanal auf y wirken!

   Man beachte, dass diese Bedingung nicht einfach empirisch getestet werden kann, da sie *alle möglichen* Einflusskanäle zwischen der Instrumentvariable und den unbeobachtbaren Störterm – und damit jeden *nicht modellierten* Zusammenhang zwischen y und ε – ausschliesst![5]

[5]Ein Test auf Endogenität des Regressors ist der *Hausman Test*, der aber bereits gültige Instrumente voraussetzt.

Hingegen kann die erste Bedingung $\mathrm{cov}(z, x) \neq 0$ sehr einfach getestet werden, indem man eine die erste Stufe $x_i = a_0 + a_1 z_i + \nu_i$ rechnet und mit dem üblichen -Test überprüft, ob a_1 signifikant von Null verschieden ist (bzw. mit einem F-Test im multivariaten Fall).

Die Instrumentvariablen Schätzer $\widehat{\beta}_k^{\mathrm{IV}}$ erhalten wir, indem wir die IV-Residuen $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} - \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} x_i$ in die Momentbedingungen

$$\frac{1}{n}\sum \hat{\varepsilon}_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n}\sum (z_i \hat{\varepsilon}_i) = 0$$

einsetzen

$$\begin{aligned} \sum \left(y_i - \widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} - \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} x_i\right) &= 0 \\ \sum z_t \left(y_i - \widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} - \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} x_i\right) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus können wieder die Normalgleichungen hergeleitet werden

$$\begin{aligned} \sum y_i &= n\widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} + \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} \sum x_i \\ \sum y_i z_i &= \widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} \sum z_i + \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} \sum x_i z_i \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wieder wie üblich gelöst werden, indem wir die erste Gleichung mit $\sum z_i$ und die zweite Gleichung mit n multiplizieren sowie die erste Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahieren,

$$\widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} = \frac{n \sum y_i z_i - \sum y_i \sum z_i}{n \sum x_i z_i - \sum x_i \sum z_i}$$

Dies kann ähnlich wie früher vereinfacht werden und gibt die folgenden Instrumentvariablen Schätzer für den bivariaten Fall

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} &= \frac{\sum (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sum (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})} = \frac{\mathrm{cov}(y, z)}{\mathrm{cov}(x, z)} \\ \widehat{\beta}_1^{\mathrm{IV}} &= \bar{y} - \widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} \bar{x} \end{aligned}$$

x bezeichnet und $\ddot{x}_i := x_i - \bar{x}$ die Abweichungen vom Mittelwert sind, bzw. $\ddot{z}_i := z_i - \bar{z}$.

Man beachte, dass für den IV Schätzer nicht einfach x durch z 'ersetzt' wird, im Nenner des Schätzers für $\widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}}$ steht nämlich weder $\mathrm{var}(x)$ noch $\mathrm{var}(z)$, sondern $\mathrm{cov}(x, z)$!

Man kann diesen einfachen IV Schätzer durch Erweiterung mit $\mathrm{var}(z)$ auch alternativ schreiben

$$\widehat{\beta}_2^{\mathrm{IV}} = \frac{\frac{\mathrm{cov}(y,z)}{\mathrm{var}(z)}}{\frac{\mathrm{cov}(x,z)}{\mathrm{var}(z)}} = \frac{\widehat{\alpha}_2}{\widehat{\delta}_2}$$

In dieser Form erkennt man, dass der einfache IV Schätzer als das Verhältnis zweier Schätzfunktionen betrachtet werden kann.

Der Zähler ist die OLS Schätzfunktion für den Steigungskoeffizient der *reduzierten Form*

$$y_i = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 z_i + \upsilon_i$$

und im Nenner die OLS Schätzfunktion für den Steigungskoeffizient der *1. Stufe*

$$x_i = \widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2 z_i + \epsilon_i$$

Da der IV Schätzer das Verhältnis zweier Zufallsvariablen ist, kann seine Stichprobenkennwertverteilung nicht einfach bestimmt werden. Tatsächlich war dies eines der aktivsten ökonometrischen Forschungsgebiete der letzten Jahre; Stichwort: *'weak instruments'*. Insbesondere wenn der Steigungskoeffizient der ersten Stufe nahe bei Null liegt ist die Verteilung sehr breit und es ist schwierig, korrekte Konfidenzintervalle zu bestimmen.

Hinweis:[*] Intuitiv kann man sich dies auch mit der Kettenregel merken (vgl. Cameron and Trivedi, 2008, 173):

Wenn x ein endogener Regressor und z eine Instrumentvariable ist gilt

$$\widehat{\beta}^{\mathrm{IV}} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Der IV Schätzer berücksichtigt nur die Wirkung von x auf y, die durch die exogene Instrumentvariable z zustande kommt.

Warum?

$$\widehat{\beta}^{\mathrm{IV}} = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(y,z)}{\widehat{\mathrm{cov}}(x,z)} = \frac{\sum_i \ddot{y}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{x}_i \ddot{z}_i} = \frac{\frac{\sum_i \ddot{y}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2}}{\frac{\sum_i \ddot{x}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2}}$$

(zwei Punkte über einer Variablen bezeichnen eine mittelwerttransformierte Variable, und bei der Mittelwerttransformation fällt wie früher gezeigt das Interzept weg)

Sei

$$\hat{\ddot{y}}_i = \hat{\alpha}\,\ddot{z}_i \qquad \text{und} \qquad \hat{\ddot{x}}_i = \hat{\delta}\,\ddot{z}_i$$

mit

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_i \ddot{y}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2} \qquad \text{und} \qquad \hat{\delta} = \frac{\sum_i \ddot{x}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2}$$

dann ist

$$\frac{d\,\hat{\ddot{y}}}{d\,\ddot{z}} = \hat{\alpha} = \frac{\sum_i \ddot{y}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{d\,\hat{\ddot{x}}}{d\,\ddot{z}} = \hat{\delta} = \frac{\sum_i \ddot{x}_i \ddot{z}_i}{\sum_i \ddot{z}_i^2}$$

und deshalb

$$\widehat{\beta}^{\mathrm{IV}} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\delta}} = \frac{\frac{d\,\hat{\ddot{y}}}{d\,\ddot{z}}}{\frac{d\,\hat{\ddot{x}}}{d\,\ddot{z}}} = \frac{d\,\hat{\ddot{y}}}{d\,\ddot{z}}\,\frac{d\,\ddot{z}}{d\,\hat{\ddot{x}}}$$

Der IV Schätzer berücksichtigt also nur die 'indirekte' Wirkung von x auf y, die durch die exogene Instrumentvariable z 'vermittelt' wird.

□

Um die Konsistenz dieses Schätzers zu zeigen verwenden wir wieder die Variablen in Abweichungsform vom Mittelwert und setzen für $\ddot{y}$ den wahren Wert $\beta_2 \ddot{x}_i + \varepsilon_i$ ein. Wir erhalten

$$\widehat{\beta}_2^{\text{IV}} = \beta_2 + \frac{\sum \ddot{z}_i \varepsilon_i}{\sum \ddot{x}_i \ddot{z}_i}$$

Wenn $\ddot{x}_i$ stochastisch ist kann der Erwartungswert nicht einfach ermittelt werden, da wir hier einen Quotienten zweier Zufallsvariablen haben, aber der plim kann einfach berechnet werden

$$\text{plim}(\widehat{\beta}_2^{\text{IV}}) = \beta_2 + \frac{\text{plim}\left[\frac{1}{n}\sum(\ddot{z}_i\varepsilon_i)\right]}{\text{plim}\left[\frac{1}{n}\sum \ddot{x}_i\ddot{z}_i\right]}$$

Der Zähler des letzten Ausdrucks der rechten Seite ist Null, da annahmegemäß $\text{cov}(\ddot{z}_i\varepsilon_i) = 0$. Der Nenner ist der plim der Stichprobenkovarianz zwischen $\ddot{x}_i$ und $\ddot{z}_i$ und ist deshalb ein konsistenter Schätzer für die Kovarianz zwischen $\ddot{x}_i$ und $\ddot{z}_i$ der Grundgesamtheit $\sigma_{\ddot{x}z}$. Wenn $\sigma_{\ddot{x}\ddot{z}} \neq 0$ folgt also

$$\widehat{\beta}_2^{\text{IV}} = \beta_2 + \frac{0}{\sigma_{\ddot{x}\ddot{z}}} = \beta_2$$

Man beachte, dass selbst eine sehr geringe Korrelation zwischen z und ε zu großen Fehlern führen kann, wenn die Korrelation zwischen z und x ebenfalls sehr klein ist. Deshalb sollte man die Korrelation zwischen x und z *immer* mit einer Hilfsregression überprüfen!

Die Konsistenz von $\widehat{\beta}_1^{\text{IV}}$ kann ähnlich gezeigt werden.

Da unterschiedliche Instrumente gewählt werden können, und jedes Instrument zu einem anderen konsistenten Schätzer führt, kann nicht davon ausgegangen werden, dass Instrumentvariablen Schätzer asymptotisch effizient sind.

In großen Stichproben gilt allerdings, dass

$$\widehat{\beta}_2^{\text{IV}} \overset{a}{\sim} \text{N}\left(\beta_2, \text{var}(\widehat{\beta}_2^{\text{IV}})\right)$$

mit der geschätzten Varianz

$$\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\beta}_2^{\text{IV}}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum(z_i - \bar{z})^2}{\left[\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})\right]^2} = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum \ddot{z}_i^2}{\left[\sum \ddot{x}_i \ddot{z}_i\right]^2}$$

Einen asymptotischen Schätzer $\hat{\sigma}^2$ für σ^2 erhalten wir aus

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum \hat{\varepsilon}_i^2$$

wobei $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{\beta}_1^{\text{IV}} - \widehat{\beta}_2^{\text{IV}} x_i$.

Daraus wird offensichtlich, dass die Varianz von $\widehat{\beta}_2^{\text{IV}}$ umso kleiner ist, je größer die Korrelation zwischen x_i und z_i ist.

Für das frühere Beispiel mit der Lernzeit erhalten wir eine IV Schätzung mit konsistenten Standardfehlern

```
insheet using "https://www.uibk.ac.at/econometrics/data/iv_bsp_lz.csv"
ivregress 2sls pkt (lz = w)
```

$$\begin{array}{rclcl} \text{Pkt} & = & 93.407 & + & 7.351\ \text{LZ} \\ & & (19.917)^{***} & & (2.777)^{**} \end{array}$$

$$R^2 = -1.946, \qquad n = 60$$

Wie man sieht kann diese Methode zu einem negativen R^2 führen.

Instrumentvariablen dürfen nicht mit **Proxy-Variablen** verwechselt werden. Proxy Variablen sollten eine fehlende Variable gewissermaßen 'ersetzen', kommen also in der Regressionsgleichung direkt vor, während Instrumentvariablen nur 'indirekt' vorkommen (d.h. nicht als Regressor aufscheinen).

Die Instrumentvariablen z sollten möglichst hoch mit dem endogenen Regressor x korreliert sein, und *nur* über x auf y einwirken, aber sie dürfen *nicht* mit fehlenden Variablen korreliert sein (d.h. sie müssen unkorreliert mit ε sein)!

Proxy-Variablen sollten möglichst hoch mit den fehlenden Variablen korreliert sein, während Instrumentvariablen nicht mit den fehlenden Variablen korreliert sein dürfen.

Im Falle einer Lohngleichung $\log(\text{Stdl} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2\text{Bildg} + \widehat{\beta}_3\text{Fähigkeiten} + \hat{\varepsilon}$ könnte z.B. als Proxy-Variable für die unbeobachtbaren Fähigkeiten der gemessene Intelligenzquotient verwendet werden.

Eine Instrumentvariable sollte hingegen mit den unbeobachtbaren Fähigkeiten und dem Störterm unkorreliert sein, aber möglichst hoch mit der Variablen 'Bildg' korrelieren. Arbeitsmarktökonomen haben z.B. die Entfernung zwischen Heimat- und Studienort (Card 1995, *Aspects of Labour Market Behavior*) oder die Anzahl der Geschwister als Instrumentvariable für 'Bildung' vorgeschlagen, da Jugendliche aus kinderreichen Familien typischerweise eine kürzere Schulbildung erhalten, aber (hoffentlich) nicht über weniger Fähigkeiten verfügen (vgl. Wooldridge 2000, Chapter 15.1).[6]

10.3.2 Schwache Instrumente

Instrumentvariablen müssen *relevant* sein, d.h. sie müssen mit den potentiell endogenen Regressoren korreliert sein. Der einfache IV-Schätzer ist

$$\widehat{\beta}_2^{\text{IV}} = \frac{\text{cov}(y,z)}{\text{cov}(x,z)} = \frac{\frac{\text{cov}(y,z)}{\text{var}(z)}}{\frac{\text{cov}(x,z)}{\text{var}(z)}}$$

Der Erwartungswert dieser Schätzfunktion ist für $\text{cov}(x,z) = 0$ nicht definiert, und die Stichprobenkennwertverteilung dieser Schätzfunktion konvergiert unter den üblichen Annahmen nicht gegen die Normalverteilung.

Aber auch eine niedrige Korrelation zwischen x und z kann sehr unangenehme Auswirkungen haben. Wie schon Bound et al. (1995) gezeigt haben können in diesem

[6] Allerdings könnten Kinder aus kinderreichen Familien über mehr soziale Fähigkeiten verfügen. Würde dies die Qualität der Instrumentvariable 'Anzahl der Geschwister' beeinflussen?

Fall die Konsequenzen selbst einer geringen Korrelation zwischen Instrumenten und endogenen Regressoren gravierend sein, und tatsächlich war dies eines der intensivsten und anspruchvollsten Forschungsgebiete der Ökonometrie der letzten Jahre (für eine gut lesbare Übersicht siehe z.B. Murray (2011)).

Im wesentlichen besteht das Problem darin, dass

- der IV Schätzer in kleinen Stichproben verzerrt ist, und klein im ökonometrischen Sinne können in diesem Zusammenhang sogar Stichproben mit mehreren hunderttausend Beobachtungen sein (vgl. Bound et al., 1995);
- selbst kleine Verletzung der Exogenitätsannahme (*exclusion restriction*) können bei schwachen Instrumenten dramatische Auswirkungen haben, und häufig sind die Ergebnisse schlechter als die von OLS.

Bei schwachen Instrumenten ist der IV Schätzer in Richtung des OLS Schätzers verzerrt, und dieser Bias wird in der Regel mit einer zunehmenden Anzahl von Instrumenten schlimmer.

Auch die Standardfehler werden bei schwachen Instrumenten meist unterschätzt.

Der Bias ist bei genau identifizierten IV geringer, aber in diesem Fall können die Instrumente nicht getestet werden (siehe Tests auf überidentifizierende Restriktionen unten).

Was tun?

- Überprüfen Sie die Schätzung der ersten Stufe; entsprechen die Vorzeichen und die Größenordnungen der Koeffizienten den Erwartungen? Diskutieren Sie dies auch in der Publikation.
- Schätzen Sie auch die reduzierte Form: entsprechen die Ergebnisse den Erwartungen?
- Berechnen Sie die F-Statistik der (in der 2. Stufe nicht inkludierten) Instrumentvariablen der 1. Stufe. Als grobe Faustregel sollte diese empirische Teststatistik zumindest größer als 10 sein.
- Bei vielen und schwachen Instrumenten ist der IV Schätzer verzerrt in Richtung der entsprechenden OLS Schätzung.
- Falls Sie mehrere Instrumentvariablen haben, überprüfen Sie eine IV Schätzung nur mit 'besten' Instrumentvariablen; exakt identifizierte IV Schätzungen sind in der Regel weniger stark verzerrt.

10.4 Tests auf Endogenität und überidentifizierende Restriktionen

Für die Anwendung der IV-Methode sind zwei Fragen wichtig

- ist eine erklärende Variable der Strukturgleichung tatsächlich endogen? Diese Frage kann mit Hilfe eines *Hausman Tests* getestet werden. Sollte dieser Test Hinweise auf Endogenität liefern kann z.B. ein IV-Schätzer verwendet werden.

- wenn auf einen IV-Schätzer zurückgegriffen werden muss, sind die verwendeten Instrumente tatsächlich exogen? Ein Test dieser Hypothese ist nur in überidentifizierten Gleichungen möglich (*Test auf überidentifizierende Restriktionen*, z.B. Sargan Test).

Hausman Test (Test auf Endogenität)

Da die Auswirkungen einer Korrelation zwischen den erklärenden Variablen und den Residuen der Grundgesamtheit sehr weitreichend sind (d.h. der Schätzer wäre systematisch verzerrt) wäre ein Test auf diese Korrelation sehr hilfreich. Allerdings können dafür nicht die aus der Stichprobe geschätzten Residuen $\hat{\varepsilon}_i$ herangezogen werden, da diese per Konstruktion immer mit den x unkorreliert sind (diese Orthogonalität ist eine Bedingung erster Ordnung!).

Hausman (1978) hat dafür einen sehr einfachen asymptotischen Test vorgeschlagen.

Die entsprechende Null- und Alternativhypothese ist

$$\mathrm{H}_0: \ \operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i = 0 \qquad \mathrm{H}_1: \ \operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i \neq 0$$

Die Grundidee des Hausman Tests besteht in einem Vergleich zweier Schätzer, wovon einer sowohl unter der Null-Hypothese als auch unter der Alternativhypothese konsistent ist, während der zweite nur unter Nullhypothese konsistente Schätzresultate liefert. Ein großer Unterschied zwischen diesen beiden Schätzungen wird als Evidenz zugunsten der Alternativhypothese gedeutet.

Hausman hat gezeigt, dass unter Gültigkeit der Nullhypothese die folgende Statistik asymptotisch χ^2 verteilt ist mit einem Freiheitsgrad

$$H = \frac{\left(\widehat{\beta}_h^{\text{IV}} - \widehat{\beta}_h^{\text{OLS}}\right)^2}{\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\beta}_h^{\text{IV}}\right) - \widehat{\text{var}}\left(\widehat{\beta}_h^{\text{OLS}}\right)} \overset{a}{\sim} \chi_1^2$$

wobei $\widehat{\beta}_h^{\text{IV}}$ der Instrumentvariablen und $\widehat{\beta}_h^{\text{OLS}}$ der OLS-Schätzer ist.

Für die Berechnung der Varianzen sollten in beiden Fällen die gleiche Schätzung für $\hat{\sigma}^2$ herangezogen werden!

Wir verwerfen die Nullhypothese und schließen auf eine kontemporäre Korrelation zwischen x_i und ε_i wenn $H > \chi_c^2$ (für ein 5% Signifikanzniveau ist der kritische Wert $\chi_c^2 = 3.84$).

Hausman-Tests werden vor allem verwendet für die Erkennung von

- Simulanitäts-Bias
- Messfehlern
- Omitted Variables

oder allgemeiner, in Fällen in denen die Störterm ε mit erklärenden Variablen x korreliert ist.

Beispiel (Stata): Für das Beispiel mit der Lernzeit erhalten wir

```
. insheet using "https://www.uibk.ac.at/econometrics/data/iv_bsp_lz.csv"
. ivregress 2sls pkt (lz = w)
. estimates store tsls
. regress pkt lz
. estimates store ols
. hausman tsls ols

                 ---- Coefficients ----
             |      (b)          (B)            (b-B)     sqrt(diag(V_b-V_B))
             |      tsls         ols         Difference          S.E.
-------------+----------------------------------------------------------------
          lz |    7.350636    -1.700709        9.051345        2.608475
------------------------------------------------------------------------------
                           b = consistent under Ho and Ha; obtained from ivregress
            B = inconsistent under Ha, efficient under Ho; obtained from regress

    Test:  Ho:  difference in coefficients not systematic
                  chi2(1) = (b-B)'[(V_b-V_B)^(-1)](b-B)
                          =       12.04
                Prob>chi2 =      0.0005
```

Wir würden die Nullhypothese also verwerfen und (korrekt) schließen, dass die Lernzeit ein endogener Regressor ist.

Eine einfache Version dieses Tests mittels Hilfsregression wurde von Davidson and MacKinnon (1989) vorgeschlagen. Die Idee beruht einfach darauf, dass eine z.B. möglicherweise fehlerhaft gemessene Variable in einer ersten Stufe auf ein Instrument regressiert wird, und die Residuen dieser Hilfsregression in der ursprünglichen Regression als zusätzlicher Regressor berücksichtigt wird. Wenn der Koeffizient dieser Residuen signifikant von Null verschieden ist wird dies als Hinweis dafür interpretiert, dass die eine Korrelation zwischen x und ε (möglicherweise hervorgerufen durch Messfehler, fehlende Variablen, Endogenität) einen Einfluss auf das Schätzergebnis hat. Da es ein asymptotischer Test ist wird die Normalverteilung angenommen (bzw. wenn mehrere Variablen getestet werden die χ^2 Verteilung), aber es hat sich eingebürgert die meist einfacher im Regressionsoutput verfügbare t-Statistik (bzw. F-Statistik) heranzuziehen. Aufgrund der asymptotischen Gültigkeit macht dies keinen großen Unterschied (für nähere Hinweise zum Wu-Hausman Test siehe z.B. Johnston, DiNardo 1997, S. 257ff).

Angenommen, das Modell in Strukturform sei

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 y_2 + \beta_4 x_1 + \beta_5 x_2 + \varepsilon$$

und wir vermuten, dass y_2 endogen ist, d.h. mit ε korreliert ist. Wenn wir für y_2 über ein Instrument z verfügen gehen wir 2-stufig vor

1. Man schätzt eine *reduzierte Form* für y_2

   $$y_2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 + \hat{\alpha}_3 z + \hat{\nu}$$

   und berechnet daraus die Residuen $\hat{\nu}$.

2. Man schätzt die ursprüngliche Strukturform und verwendet die Stichprobenresiduen der reduzierten Form als *zusätzlichen* Regressor.
$$y_1 = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 y_2 + \widehat{\beta}_4 x_1 + \widehat{\beta}_5 x_2 + \widehat{\beta}_6 \hat{\nu} + \tilde{\varepsilon}$$
Wenn $\widehat{\beta}_6$ signifikant von Null verschieden ist schließen wir daraus, dass y_2 tatsächlich endogen ist, OLS also verzerrte Ergebnisse liefert.

Dieser Test kann einfach für mehrere endogene Variablen verallgemeinert werden. Man berechnet für jede endogene Variable die Residuen der reduzierten Form, verwendet diese als zusätzliche Regressoren in der Strukturform, und testet deren gemeinsame Signifikanz mit Hilfe eines einfachen F-Tests.

Test auf überidentifizierende Restriktionen

Instrumente müssen *relevant* und *exogen* sein. Während ein F-Test auf die gemeinsame Signifikanz aller Instrumente in der 1. Stufe Hinweise auf die Relevanz der Instrumente liefert kann die Korrelation zwischen den Instrumenten und den unbeobachtbaren Störtermen der Grundgesamtheit (d.h. die Exogenität) nicht unmittelbar getestet werden.

Allerdings gibt es einen Test für überidentifizierte Systeme. Angenommen, die Strukturgleichung sei
$$y_{i1} = \beta_1 + \beta_2 y_{i2} + \beta_3 x_i + \varepsilon_i$$
und wir verfügen über zwei potentielle Instrumentvariablen z_1 und z_2.

Wir könnten diese Gleichung mit nur einer Instrumentvariable 2-stufig schätzen, z.B. mit z_1, daraus die Residuen $\hat{\varepsilon}_1$ berechnen und überprüfen, ob diese mit der nicht verwendeten Instrumentvariable z_2 korreliert sind. Wenn $\operatorname{corr}(\hat{\varepsilon}_1, z_2) \neq 0$ wäre offensichtlich z_1 *oder* z_2 ein schlechtes Instrument! Umgekehrt könnte auch mit z_2 als Instrument begonnen werden und die Korrelation der Residuen dieser 2SLS Schätzung mit z_1 überprüft werden.

Ein einfacher Test auf überidentifizierende Restriktionen kann wieder mit Hilfe einer Hilfsregression durchgeführt werden:

1. Schätze die überidentifizierte Strukturgleichung mit 2SLS und berechne daraus die Stichproben-Residuen $\hat{\varepsilon}$, z.B.
$$y_{i1} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \widehat{y}_{i2} + \widehat{\beta}_3 x_i + \hat{\varepsilon}_i \qquad \rightarrow \quad \text{Stichprobenresiduen } \hat{\varepsilon}$$
2. Schätze eine Hilfsregression von $\hat{\varepsilon}$ auf alle exogenen Variablen und Instrumente und bestimme daraus das Bestimmtheitsmaß R_*^2, z.B.
$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 z_{i1} + \hat{\alpha}_2 z_{i2} + \hat{\alpha}_3 x_i + \upsilon_i \qquad \rightarrow \qquad R_*^2$$
3. Unter der Nullhypothese, dass *alle* Instrumentvariablen exogen sind, ist
$$nR_*^2 \overset{a}{\sim} \chi_q^2$$
wobei n die Anzahl der Beobachtungen ist. Die Anzahl der Freiheitsgrade q ist die Anzahl der Instrumentvariablen außerhalb des Modells abzüglich der Anzahl der endogenen erklärenden Variablen, d.h. der Grad der 'Überidentifikation'.

Wenn der Wert von nR_*^2 größer ist als der entsprechende kritische Wert der χ^2-Verteilung muss die Nullhypothese, dass alle Instrumente exogen sind, verworfen werden.

Dieser Test ist ein Spezialfall des *Sargan-Tests* und ist nur für überidentifizierte Gleichungen anwendbar. Er gibt allerdings keine Hinweise darauf, *welche* Instrumente möglicherweise endogen sind!

Außerdem sind diese Test nur gültig, falls die Störterme homoskedastisch sind.

In der Praxis sollten Sie sich aber auf die in den Programmen implementierten Tests verlassen, die auf der GMM Schätzmethode beruhen.

10.5 Messfehler in den erklärenden (x) Variablen

Eine weitere mögliche Ursache für Endogenität sind Messfehler in mindestens einer x Variable. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass anstelle des 'wahren' Wertes[7] $\ddot{x}_i$ nur ein fehlerhaft gemessenes

$$\ddot{x}_i^* = \ddot{x}_i + \upsilon_i$$

beobachtet werden kann ($\ddot{x}_i := x_i - \bar{x}$ bezeichne wieder Abweichungen vom Mittelwert), mit $\upsilon_i \sim$ i.i.d.$(0, \sigma_{\upsilon_i}^2)$.

Das wahre (und unbeobachtbare) Regressionsmodell sei

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_i &= \beta\ddot{x}_i + \varepsilon_i \\
&= \beta(\ddot{x}_i^* - \upsilon_i) + \varepsilon_i \\
&= \beta\ddot{x}_i^* + (\varepsilon_i - \beta\upsilon_i)
\end{aligned}$$

aber wir können nur das Modell

$$\ddot{y}_i = \beta\ddot{x}_i^* + \varepsilon_i^* = \beta\underbrace{(\ddot{x}_i + \upsilon_i)}_{\ddot{x}_i^*} + \underbrace{(\varepsilon_i - \beta\upsilon_i)}_{\varepsilon_i^*}$$

schätzen.

Offensichtlich taucht der Messfehler υ sowohl im Regressor $\ddot{x}^*$ als auch im Störterm ε^* auf, weshalb diese korreliert sein werden. Dies verursacht Endogenität im ökonometrischen Sinne, weshalb der Koeffizient β verzerrt geschätzt wird.

Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, wenn die Störterme alle angenehmen Eigenschaften aufweisen: $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = \mathrm{E}(\upsilon_i) = 0$, $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \mathrm{E}(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$, $\mathrm{var}(\upsilon_i) = \mathrm{E}(\upsilon_i^2) = \sigma_\upsilon^2$, $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathrm{cov}(\upsilon_i, \upsilon_j) = 0$ für $i \neq j$, und $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \upsilon_j) = 0$ für alle i, j.

Selbst wenn die Störterme all diese angenehmen Eigenschaften aufweisen und mit den wahren Werten $\ddot{x}_i$ unkorreliert sind, so ist der OLS–Schätzer in der Regel dennoch *weder erwartungstreu noch konsistent!* Dies kann einfach gezeigt werden

[7]Einfachheitshalber beschränken wir uns im folgenden wieder auf den 2-Variablen Fall. Für eine allgemeinere Darstellung in Matrixschreibweise siehe z.B. Johnston 1997, S. 154ff.

Der OLS-Schätzer mit dem fehlerhaft gemessenen $\ddot{x}^*$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_2 &= \frac{\sum \ddot{x}^* \ddot{y}}{\sum (\ddot{x}^*)^2} \\
&= \frac{\sum \ddot{x}^* (\beta \ddot{x} + \varepsilon)}{\sum (\ddot{x}^*)^2} \\
&= \beta \frac{\sum (\ddot{x}^*) \ddot{x}}{\sum (\ddot{x}^*)^2} + \frac{\sum \ddot{x}^* \varepsilon}{\sum (\ddot{x}^*)^2}
\end{aligned}$$

In diesem Fall können wir nicht einfach den Erwartungswert berechnen, da aufgrund des Messfehlers auch der Nenner des Schätzers stochastisch ist.[8] Aber man kann mit Hilfe des *probability limits* immerhin die *Konsistenz* überprüfen.

Wenn die entsprechenden Momente 2. Ordnung existieren und

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\sum (\ddot{x}^*)^2\right) &= \sigma_{\ddot{x}}^2 + \sigma_v^2 \\
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\sum (\ddot{x}^*)\ddot{x}\right) &= \sigma_{\ddot{x}}^2 \\
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\sum \ddot{x}^* \varepsilon\right) &= 0
\end{aligned}$$

folgt daraus

$$\operatorname{plim}(\widehat{\beta}) = \operatorname{plim}\left(\beta \frac{\sum (\ddot{x}^*)\ddot{x}}{\sum (\ddot{x}^*)^2} + \frac{\sum \ddot{x}^* \varepsilon}{\sum (\ddot{x}^*)^2}\right) = \beta \left(\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_{\ddot{x}}^2 + \sigma_v^2}\right)$$

Da Varianzen immer positiv sind ist der Nenner von $\sigma_{\ddot{x}}^2/(\sigma_{\ddot{x}}^2 + \sigma_v^2)$ immer größer als der Zähler ($\sigma_v^2 > 0$). Deshalb führt der Messfehler im bivariaten Modell dazu, dass der OLS Steigungsparameter $\widehat{\beta}$ näher bei Null liegt als der wahre Wert β (auf englisch wird dies *'attenuation bias'* genannt). Diese einfache Form eines *'attenuation bias'* gilt allerdings nur im bivariaten Modell, in multiplen Regressionsmodellen kann der Bias deutlich komplizierter sein.

Fehlerhaft gemessene Variable treten häufig auf, wenn Proxy-Variablen verwendet werden, da die eigentlich interessierenden Variable unbeobachtbar ist (z.B. das permanente Einkommen in einer Konsumfunktion nach Friedmann, oder die Begabung eines Arbeitnehmers), wenn Fragen in einem Fragebogen zweideutig sind, oder wenn Geräte ungenaue Daten liefern. In allen diesen Fällen ist mit systematisch verzerrten Schätzergebnissen zu rechnen!

Die folgende kleine Monte Carlo Simulation soll dies demonstrieren:

```
# Monte Carlo: errors in variables
rm(list = ls())
set.seed(1234567)
n <- 300
```

[8] Erinnern Sie sich, $\mathrm{E}(X/Y) \neq \mathrm{E}(X)/\mathrm{E}(Y)$!

```
x <- rnorm(n = n, mean = 10, sd = 1)
Rep <- 1000
R <- vector(length = Rep)
for (r in 1:Rep) {
  eps <- rnorm(n = n, mean = 0, sd = 1)
  y <- 5 + 5*x + eps  # Datengenerierender Prozess (DGP)
  xs <- x + rnorm(n = n, mean = 0, sd = 1) # Error in Variables
  eq <- lm(y ~ xs)
  R[r] <- coef(eq)[2]
}
x11()
hist(R, freq = FALSE, main = "Histogram of estimated Slope Coefficients",V
     xlab = "estimated slope coef. (true value = 5)",
     col = "grey", cex = 0.6)
```

Da in diesem einfachen Fall $\beta_2 = 5$, $x_i \sim \text{N}(10, 1)$, $\upsilon_i \sim \text{N}(0, 1)$ $\varepsilon_i \sim \text{N}(0, 1)$ ist

$$\text{plim}(\widehat{\beta}_2) = \beta_2 \left(\frac{\sigma^2_{\ddot{x}}}{\sigma^2_{\ddot{x}} + \sigma^2_{\upsilon}} \right) = \beta_2 \frac{1}{1+1} = 0.5\beta_2 = 2.5$$

Der Mittelwert dieser tausend Replikationen (gespeichert in Vektor R) ist ungefähr 2.46 und die Standardabweichung 0.11, was denn Erwartungen entspricht. Abbildung 10.8 zeigt das Histogramm

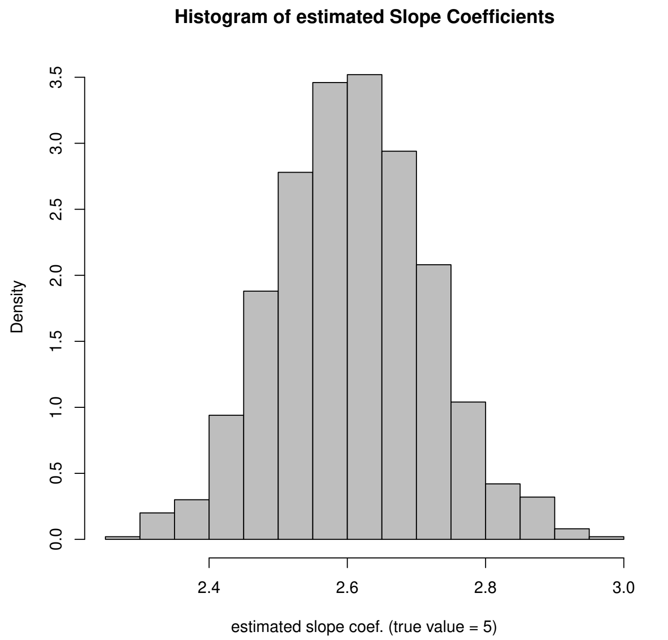


Abbildung 10.8: Monte Carlo Simulation für Messfehler im Regressor. Der wahre Wert ist $\beta_2 = 5$, aufgrund der Messfehler in den x xwird dieser Wert massiv unterschätzt.

Wenn geeignete Instrumentvariablen zur Verfügung stehen erlauben diese zumindest eine konsistente Schätzung.

Exkurs: Messfehler in der abhängigen Variablen y Die vorhergehenden Ausführungen bezogen sich ausschließlich auf Meßfehler in der erklärenden x Variable, Meßfehler in der abhängigen y Variable sind im Vergleich dazu verhältnismäßig unproblematisch. Um dies zu zeigen nehmen wir an, das wahre Regressionsmodell sei durch die Beziehung

$$\ddot{y}_i = \beta\ddot{x}_i + \varepsilon_i$$

gegeben, wobei ε_i ein üblicher Störterm sei. Wenn nun anstelle der 'wahren' abhängigen Variablen $\ddot{y}_i$ nur ein fehlerhaft gemessenes $\ddot{y}_i^*$ beobachtbar ist, wobei $\ddot{y}_i^* = \ddot{y}_i + \upsilon_i$ mit $\text{cov}(\upsilon_i, \varepsilon_i) = 0$, dann berechnen wir die Regression

$$\ddot{y}_i^* = \beta\ddot{x}_i + (\varepsilon_i + \upsilon_i)$$

Eine OLS-Schätzung für β ist weiterhin unverzerrt und effizient. Die Varianz des Störterms $(\varepsilon_i + \upsilon_i)$ ist nun zwar größer, dem wird aber bei der Berechnung von $\hat{\sigma}^2$ aus den beobachteten Störtermen Rechnung getragen. Deshalb bleiben alle statistischen Tests gültig.

Systematische Verzerrungen treten nur auf, wenn die erklärenden x Variablen fehlerhaft gemessen werden.

10.6 Simultane Kausalität

Bisher haben wir stets eine sehr einfache Form von Abhängigkeit zwischen der erklärenden Variable x und der abhängigen Variablen y angenommen, nämlich dass dass die x Variable unmittelbar y beeinflusst.

Was passiert aber, wenn die Variablen auf komplexere Weise verknüpft sind, so dass wir zur Beschreibung mindestens *zwei oder mehrere Gleichungen* benötigen? Dies ist in den Sozialwissenschaften eher die Regel als die Ausnahme, selbst zur Beschreibung des einfachsten Marktes benötigen wir bereits eine Nachfrage- *und* Angebotsfunktion!

Wir werden nun zeigen, dass eine solche gegenseitige Abhängigkeit, zu deren Beschreibung mehr als eine Gleichung benötigt wird, ebenfalls zu einer Korrelation zwischen dem Störterm und den erklärenden x Variablen führt.

Der einfachste Fall einer solchen Korrelation zwischen Regressor und Störterm kann einfach anhand des keynesianischen Eingaben-Ausgaben Modells mit einer stochastischen Konsumfunktion und Einkommensidentität erläutert werden.

Das der Abbildung 10.9 zugrunde liegende datengenerierende Prozess ist

$$\begin{aligned} C_i &= 60 + 0.5Y_i + \varepsilon_i \qquad \text{mit } \varepsilon_i \sim \text{U}(-30, +30) \\ Y_i &= C_i + I_i \qquad \text{mit } I_i \sim \text{U}(30, 80) \end{aligned}$$

wobei U hier für die Gleichverteilung steht, $I_i \sim \text{U}(30, 80)$ bedeutet also, dass die Variable I_i mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendeinen Wert zwischen 30 und 80 annimmt. Die Gleichverteilung wurde nur gewählt um eine übersichtlichere Grafik zu erhalten und spielt ansonsten keine Rolle.

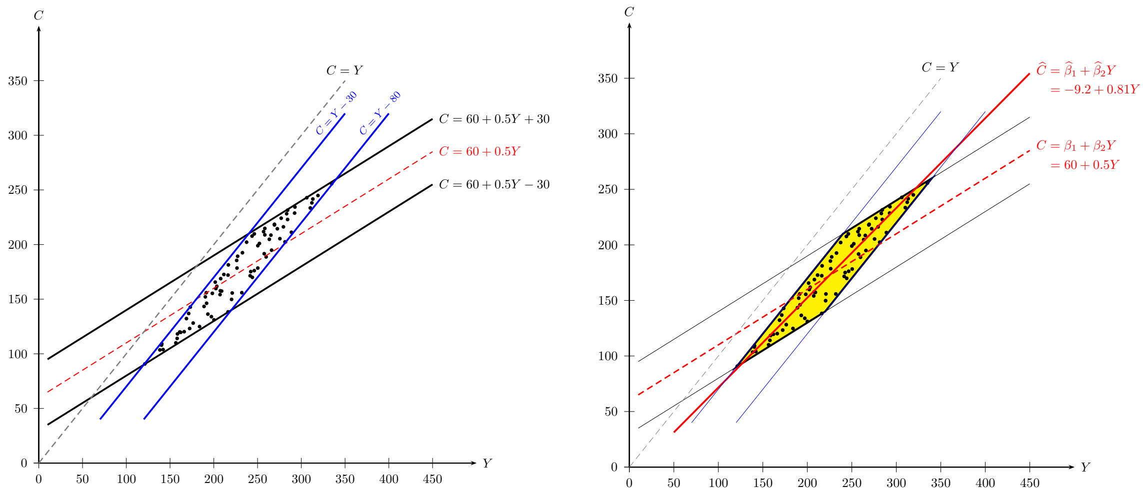


Abbildung 10.9: Ein einfaches Keynesianisches Modell.

Abbildung 10.9 zeigt diese Funktionen für die Extremwerte von ε_i und I_i (d.h. $C_i = 60 + 0.5Y_i - 30$ und $C_i = 60 + 0.5Y_i + 30$, bzw. $C_i = Y_i - 30$ und $C_i = Y_i - 80$; die strichlierten Linen zeigen die Funktionen für $\varepsilon_i = 0$ und $I_i = 0$).

Die Daten wurden diesem Modell entsprechend vom Computer erzeugt. Eine einfache OLS Schätzung der Konsumfunktion liefert statt der wahren Werte $\widehat{\beta}_1 = 60$ und $\widehat{\beta}_2 = 0.5$ völlig andere Werte.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{C} & = & -9.175 & + & 0.808\ \text{Y} \\
 & & (5.685) & & (0.024)^{***}
\end{array}
$$

$$R^2 = 0.934, \quad s = 10.818, \quad F\text{-Stat} = 1096.971, \quad n = 80$$

(Standardfehler in Klammern)

Abbildung 10.9 zeigt, was schief gelaufen ist, die Einkommensidentität $Y = C + I$ erzwingt, dass alle Realisationen im gelben Parallelogramm liegen müssen!

Wie Abbildung 10.10 zeigt führt dies zu einer Korrelation zwischen den Störtermen und der erklärenden Variable Y, denn ein in einer Periode zufällig größerer Störterm führt zu erhöhten Konsumausgaben, diese über die Identität zu einem höheren Einkommen, weshalb Einkommen und Störterme korreliert sind.

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \varepsilon_i$$

$$Y_i = C_i + I + G$$

$$\mathrm{cov}(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$$

Abbildung 10.10: Simultanität im keynesianischen Eingaben-Ausgaben Modell [local, www]

Wie das rechte Panel von Abbildung 10.9 zeigt, liefert die OLS Gerade zwar eine optimale Beschreibung der realisierten Daten, aber sie liefert keine konsistente Schätzung der Konsumfunktion, weil die Abhängigkeit zwischen Konsum und Einkommen *über die Einkommensidentität* nicht berücksichtigt wird!
Die OLS Koeffizienten $\widehat{\beta}_1$ und $\widehat{\beta}_2$ liefern deshalb keine unverzerrten Schätzer für den autonomen Konsum β_1 und die marginale Konsumneigung β_2! Da dieses Problem unabhängig von der Stichprobengröße existiert wird das Problem mit zunehmender Stichprobengröße auch nicht kleiner, deshalb ist der OLS Schätzer in diesem Fall auch nicht konsistent!

Eine einfache Monte Carlo Simulation soll das Problem wieder veranschaulichen. Das folgende kleine R Programm erzeugt tausend Mal ein Modell mit zwei Gleichungen, einer Konsumfunktion und einer Identität

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_i &= 60 + 0.5Y_i + \varepsilon_i \\
Y_i &= \mathrm{C}_i + Z_i
\end{aligned}
$$

mit $\varepsilon_i \sim \mathrm{U}(-30, +30)$ und $Z_i \sim \mathrm{U}(30, 80)$, wobei Z alle exogenen Nachfragekategorien enthält (zum Beispiel Investitionen und Staatsausgaben). Die unübliche Verteilung der Störterme wurde gewählt, um mit Abbildung 10.9 kompatibel zu sein. Man beachte, dass dieses Modell in Matrixschreibweise geschrieben werden kann als

$$
\begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_i \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 + \varepsilon_i \\ Z_i \end{pmatrix}
$$

und z.B. mit dem `solve()` Befehl von `R` einfach für jede Periode i gelöst werden kann.

```
# Monte Carlo: Simultaneity
rm(list = ls())
set.seed(1234567)
nobs = 50  # Observations
Rep <- 1000 # Replications for Monte Carlo
OLSCoef <- vector(length = Rep)
# Coefficient Matrix,  DGP: C = 60 + 0.5*Y + eps;  Y = C + Z
CoefMatrix <- matrix(c(-0.5, 1, 1, -1), nrow = 2, byrow = TRUE)

for (r in 1:Rep) {  # Monte Carlo loop
  # exogenous data
  C_0 <- 60 + runif(n = nobs, min = -30, max = +30) # autonom. consumpt.
  Z <- runif(n = nobs, min = 30, max = 80) #  Invest. etc.
  exogData <- cbind(C_0, Z) # exogenous data
  endogData <- matrix(data = NA, nrow = nobs, ncol = 2) # container
  for (i in 1:nobs) {  # generate endog. data, solve equations
    endogData[i,] <- solve(CoefMatrix, exogData[i, ])
  }
  Ys <- endogData[, 1]; Cs <- endogData[, 2]
  OLSCoef[r] <- coef(lm(Cs ~ Ys))[2] # estimate and save Slope Coef.
} # end of Replications
```

```
x11()   # Graph
hist(OLSCoef, freq = FALSE, breaks = 30,
     main = "Histogram of estimated OLS Slope Coef.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(OLSCoef), 3)),
     col = "grey", cex = 0.6, xlim = c(0.49,0.9))
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
```

Abbildung 10.11 zeigt das Histogramm der tausend Schätzungen, offensichtlich ist die Schätzung der marginalen Konsumneigung systematisch verzerrt, obwohl der wahre Wert der marginalen Konsumneigung mit 0.5 vorgegeben wurde, liegt der Mittelwert der empirischen Stichprobenkennwertverteilung des OLS Schätzers bei 0.8 (tausend Replikationen).

Hinweis: diese Art der Programmierung über Schleifen ist nicht sehr effizient und schnell, im Appendix finden Sie ein Beispiel mit einer Funktion zur Generierung der Daten und der Lösung der Gleichungen in einer `apply()` Funktion.

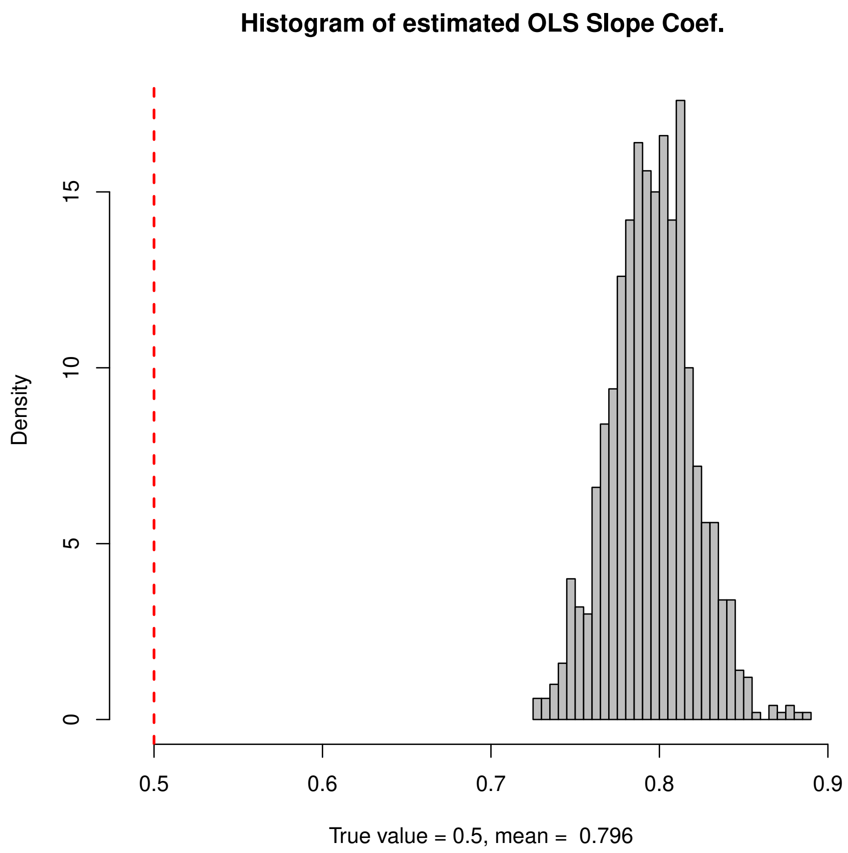


Abbildung 10.11: Monte Carlo Simulation für endogenen Regressor. Der wahre Wert der marginalen Konsumneigung ist 0.5; aufgrund des *feedbacks* über die Einkommensidentität überschätzt OLS diesen Wert systematisch.

In diesem Fall gibt die Modellstruktur eine ideale Instrumentvariable vor, das exogene Z kommt in der Konsumgleichung nicht vor, aber Z ist über die Identität mit dem endogenen Regressor Y korreliert (ist also relevant). Abbildung 10.12 zeigt wieder das Histogramm der 1000 IV Schätzungen, offensichtlich liegt der Mittelwert deutlich näher bei dem wahren 0.5 (obwohl die Streuung deutlich größer ist). Der R-Code zur Erzeugung dieser Grafik findet sich im Appendix.

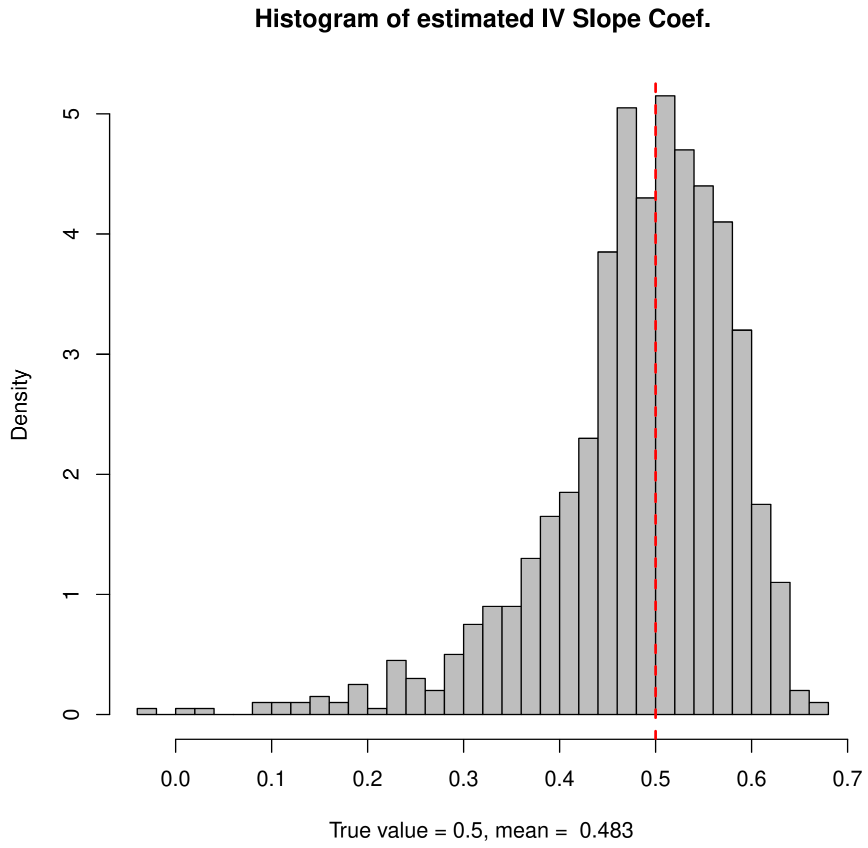


Abbildung 10.12: Monte Carlo Simulation für endogenen Regressor, IV-Schätzung mit Instrument Z. Der wahre Wert der marginalen Konsumneigung ist wieder 0.5; der Mittelwert der tausend Replikationen ist 0.483 (Programmcode im Appendix).

Um den Unterschied zwischen OLS-Schätzungen und IV-Schätzungen zu verdeutlichen zeigt Abbildung 10.13 OLS- und IV-Schätzungen einmal für 50 Beobachtungen (1. Zeile) und für 500 Beobachtungen (2. Zeile) auf der gleichen Skala. Während die Verzerrung beim OLS-Schätzer erhalten bleibt nimmt die Genauigkeit der IV-Schätzers mit zunehmender Stichprobe zu.

Wann liegt Interdependenz vor? Häufig herrscht Verwirrung, wann tatsächlich von Interdependenz oder *'reverse causality'* gesprochen werden kann.

Nehmen wir zum Beispiel an, jemand möchte die Konsumausgaben C eines Haushaltes untersuchen, und erklärt diese u.a. mit den Ersparnissen (S) und dem Einkommen (Y) des Haushaltes, also

$$C = \beta_1 + \beta_2 S \ + \beta_3 Y + \ldots \ \text{andere Faktoren}$$

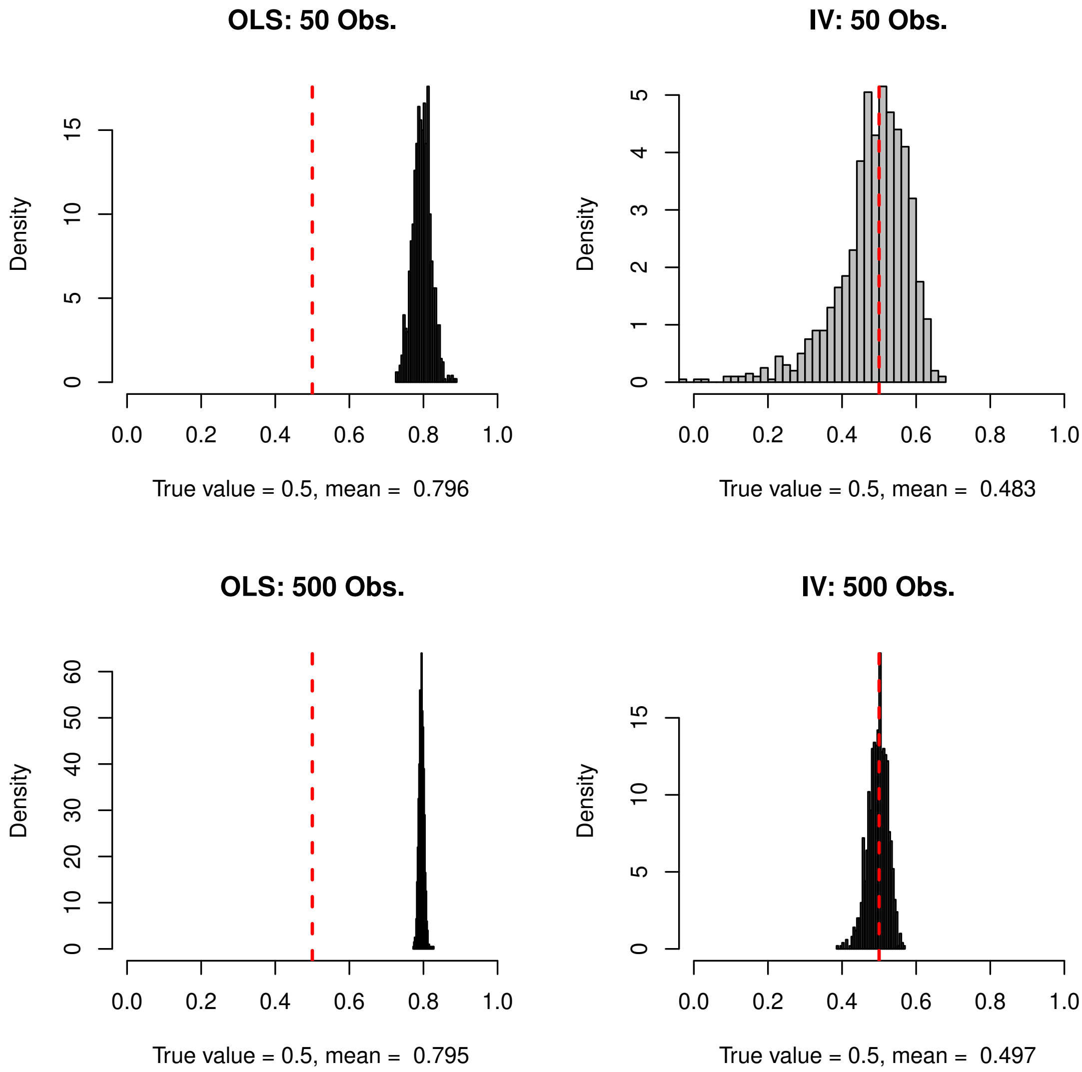


Abbildung 10.13: Monte Carlo Simulation für endogenen Regressor, IV-Schätzung mit Instrument Z. Der wahre Wert der marginalen Konsumneigung ist wieder 0.5; der Mittelwert der tausend Replikationen ist 0.483 (Programmcode im Appendix).

Eine andere Forscherin interessiert sich für die Determinanten der Ersparnisbildung, die u.a. von den Konsumausgaben und vom Einkommen abhängt, also

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 C \ + \alpha_3 Y \dots \text{ andere Faktoren}$$

Handelt es sich dabei um ein simultanes System? Nein! Die beiden Gleichungen modellieren das Entscheidungsverhalten des *gleichen* Haushaltes, beide Gleichungen enthalten als die selben Variablen, sie haben keine unabhängige Interpretation! Die zweite Gleichung ist lediglich eine Umformung der ersten Gleichung.

Angenommen jemand möchte versuchen die Auswirkungen der Anzahl von Polizisten (NP) in einer Region auf die Zahl der Diebstähle (D) zu untersuchen. Dazu schätzt er eine Regression

$$D = \beta_1 + \beta_2 \text{NP} \ + \dots \text{ andere Faktoren}$$

Aber natürlich werden in Regionen mit höherer Kriminalität mehr Polizisten stationiert werden, weshalb

$$\text{NP} = \alpha_1 + \alpha_2 D \ + \dots \text{ andere Faktoren}$$

Handelt es sich hierbei um ein simultanes System? Ja! Die erste Gleichung beschreibt das Verhalten von Dieben, während die zweite Gleichung das Verhalten von Politikern oder Behörden beschreibt. Deshalb ist dies ein interdependentes Strukturmodell, das mit üblichen Methoden untersucht werden kann.

Im Kern tritt diese Problem immer dann auf, wenn zwei Variablen auf *mehr* als eine Art verknüpft sind, das heißt, wenn zur Beschreibung des Verhaltens einer Variable mehr als eine Gleichung benötigt wird. Das klassische Beispiel sind natürlich Angebots- und Nachfragefunktionen oder Makromodelle, aber ähnliche Probleme existieren fast überall in den Sozialwissenschaften.

Strukturform und reduzierte Form: Eine *Strukturgleichung* bildet einen theoretisch begründeten Zusammenhang ab. In einem simulatanen Strukturmodell (*'linear simultaneous equation model'*, SEM) sollte jede Gleichung im System eine eigenständige kausale Interpretation haben.[9]

Durch Lösung eines Modells in Strukturform nach den endogenen Variablen erhält man die ***reduzierte Form*** des Gleichungssystems, in der es per Definition keine 'feed backs' mehr gibt.

In einer *komparativ-statischen Analyse* wird die reduzierte Form nach einer exogenen Variable abgeleitet. Da es in einer reduzierten Form keine 'feed backs' mehr gibt, sagt uns diese Ableitung, wie sich die Änderung der exogenen Variable *ceteris paribus* auf die gleichgewichtige endogene Variable auswirkt (in der Makroökonomik wird eine solche Analyse häufig *Multiplikatoranalyse* genannt).

Allerdings haben die Koeffizienten der reduzierten Form nur selten eine unmittelbare ökonomische Interpretation.

[9] Sargan (1988, 27) definiert ein Modell, bzw. eine Struktur im Sinne der Cowles Commission etwas allgemeiner "A model is the specification of the probability distribution for a set of observations. A structure is the specification of the parameters of that distribution. Therefore, a structure is a model in which all the parameters are assigned numerical values." (zitiert nach Cameron and Trivedi, 2005, 20)

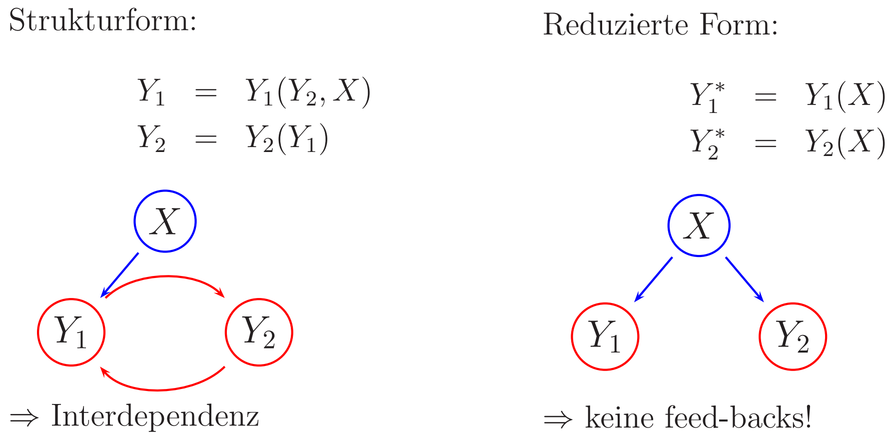


Abbildung 10.14: Strukturform und reduzierte Form eines Gleichungssystems

10.6.1 Beispiel: Fulton Fischmarkt

Für eine empirische Marktanalyse erhob Graddy (2006)[10] am Fulton Fischmarkt in New York vom 2.12.1991 – 8.5.1992 (111 Tage) täglich die Durchschnittspreise und Mengen für die Fischsorte Wittling (*'whiting'*, auch Merlan, eine Dorsch-Art), siehe auch Graddy (1995).

In einem ersten Ansatz könnte man eine log-lineare Regressionsfunktion mit konstanten Koeffizienten schätzen (mit $Q = \ln(\text{Quantity})$ und $P = \ln(\text{Price})$)

$$Q_t^{\text{obs}} = \beta_1^o + \beta_2^o P_t^{\text{obs}} + \varepsilon_t$$

$$\begin{array}{rclcl} Q^{\text{obs}} & = & \underset{(0.076)^{***}}{8.419} & - & \underset{(0.179)^{***}}{0.541}\, P^{\text{obs}} \end{array}$$

$R^2 = 0.078, \quad s = 0.716, \quad F\text{-Stat} = 9.167, \quad \text{DW} = 1.556, \quad n = 111$
(Standardfehler in Klammern)

Ist dies eine Nachfragefunktion? Kann diese Funktion verwendet werden um Auswirkungen einer Steuer zu analysieren? Offensichtlich nicht, es ist nicht klar, ob es sich dabei um einen Nachfrage- oder Angebotsfunktion handelt.

Bei einer Nachfragefunktion

$$Q_t^d(P) = \beta_1^d + \beta_2^d P + \varepsilon_t^d$$

wird jedem P wird ein Q^d zugeordnet, dieser Zusammenhang folgt aus Präferenzen und Restriktionen; aber diese Nachfragefunktion ist *nicht beobachtbar*!

Diese Nachfragefunktion ist keine Regressionsfunktion, sondern eine *Strukturgleichung*. Sie beschreibt einen unbeobachtbaren Zusammenhang, in der Sprache der Treatment-Literatur '*'potential outcomes'*.

Man beachte, dass P in der Nachfragefunktion keinen Subindex t aufweist, dies impliziert die starke Annahme, dass die Auswirkungen einer Änderung von P um eine Einheit auf Q_t^d für alle Preise und Markttage gleich β_2^d sind.

[10] `https://www.aeaweb.org/atypon.php?doi=10.1257/jep.20.2.207`

Die unbeobachtete Komponente ε_t^d ist beobachtungsspezifisch und sollte im Erwartungswert $\mathrm{E}(\varepsilon_t^d) = 0$.

Ähnliches gilt für die Angebotsfunktion

$$Q_t^s(P) = \beta_1^s + \beta_2^s P + \varepsilon_t^s$$

mit $\mathrm{E}[Q_t^s(P)] = \beta_1^s + \beta_2^s P$

Marktgleichgewicht

Sowohl Nachfrage- als auch Angebotsfunktion sind unbeobachtbar, aber wenn der Marktmechanismus funktioniert beobachten wir für jeden Tag/Markt ein $(P_t^{\text{obs}}, Q_t^{\text{obs}})$ Paar.

Im Gleichgewicht gilt

$$Q_t^{\text{obs}} = Q_t^d(P_t^{\text{obs}}) = Q_t^s(P_t^{\text{obs}})$$

Falls ein Gleichgewicht existiert und eindeutig ist können wir die (unbeobachtbaren) Angebots- und Nachfragefunktionen lösen und die beobachteten Mengen und Preise als Funktion der unbeobachteten Parameter und Störterme darstellen.

$$\begin{aligned} P_t^{\text{obs}} &= \frac{\beta_1^d - \beta_1^s}{\beta_2^s - \beta_2^d} + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\beta_2^s - \beta_2^d} \\ Q_t^{\text{obs}} &= \frac{\beta_2^s \beta_1^d - \beta_2^d \beta_1^s}{\beta_2^s - \beta_2^d} + \frac{\beta_2^s \varepsilon_t^d - \beta_2^d \varepsilon_t^s}{\beta_2^s - \beta_2^d} \end{aligned}$$

Dieses Modell sollte erklären, wie die beobachteten Mengen und Preise von den Marktbedingungen beeinflusst werden. Allerdings wird damit nicht der Mechanismus erklärt, wie (und ob) Marktpreise zustande kommen (z.B. Auktionator), das Gleichgewicht wird einfach angenommen.

Außerdem werden wir gleich sehen, dass diese Funktionen nicht geschätzt werden können.

Aber vorher ist es nützlich zu überlegen, was wir mit der ursprünglichen Regression

$$Q_t^{\text{obs}} = \beta_1^o + \beta_2^o P_t^{\text{obs}} + \varepsilon_t$$

eigentlich geschätzt haben.

Der Steigungskoeffizient dieser Regression ist

$$\beta_2^o = \frac{\mathrm{cov}(Q_t^{\text{obs}}, P_t^{\text{obs}})}{\mathrm{var}(P_t^{\text{obs}})}$$

Die Kovarianz zwischen beobachteten Gleichgewichtsmengen und -preisen ist $\mathrm{cov}(Q_t^{\text{obs}}, P_t^{\text{obs}}) = (\beta_2^s \sigma_d^2 + \beta_2^d \sigma_s^2 - 2\rho\sigma_d\sigma_s(\beta_2^d + \beta_2^s))/((\beta_2^s - \beta_2^d)^2)$, wobei σ_d^2 und σ_s^2 die Varianz von ε_t^d sowie ε_t^s sind und ρ die Korrelation zwischen ε_t^d und ε_t^s ist.

Die Varianz von P_t^{obs} ist $\mathrm{var}(P_t^{\text{obs}}) = (\sigma_s^2 + \sigma_d^2 - 2\rho\sigma_d\sigma_s)/(\beta_2^s - \beta_2^d)^2$, vgl. Imbens (2014, 19).

Wenn wir $\rho = 0$ annehmen erhalten wir deshalb als Steigungskoeffizient der Regression

$$\beta_2^o = \frac{\text{cov}(Q_t^{\text{obs}}, P_t^{\text{obs}})}{\text{var}(P_t^{\text{obs}})} = \beta_2^s \frac{\sigma_d^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} + \beta_2^d \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}$$

Offensichtlich ist die beobachtete Steigung β_2^o ein gewichtetes Mittel der Steigungen der Angebots- und Nachfargefunktion und die Gewichte hängen nur vom Verhältnis der Varianzen der Störterme von Angebots- und Nachfargefunktion ab. Wenn σ_d^2 klein ist im Verhältnis zu σ_s^2 liegt die Steigung näher bei der Steigung der Nachfragefunktion, andernfalls näher bei der Steigung der Angebotsfunktion.

Eine einfache Regression von beobachteten Preisen auf die beobachteten Mengen ist also nicht geeignet, um z.B. die Auswirkungen einer Steuer abzuschätzen.

Dazu wird ein *Strukturmodell* benötigt, wie z.B. obige Nachfrage- und Angebotsfunktion. Die zentrale Annahme dabei ist, dass sowohl Nachfrager als auch Anbieter nur auf den wahrgenommenen Preis (d.h. inkl. Steuer) reagieren, sie sind *invariant* in dem Sinne, dass die Koeffizienten des Strukturmodells durch die Einführung einer Steuer nicht beeinflusst werden.

Wenn bei einem Preis von einem Euro z.B. eine Steuer von 10 Prozent pro kg ($r = 0.1$) eingeführt und die Konsumentin deshalb 1.1 €bezahlen muss, dann nehmen wir an, dass es für die Konsumentin keine Rolle spielt, ob die 10 Cent an das Finanzministerium oder an den Verkäufer gehen. Wenn $P_t(r)$ der Preis ist, den der Verkäufer erhält, dann sollte dieser Preis die Gleichgewichtsbedingung

$$Q_t^d(P_t(r)(1+r)) = Q_t^s(P_t(r))$$

lösen. Für eine lineare Angebots- und Nachfragefunktion erhält man z.B. den Gleichgewichtspreis, den der Verkäufer erhält

$$P_t(r) = \frac{\beta_1^d - \beta_1^s}{\beta_2^s - (1+r)\beta_2^d} + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\beta_2^s - (1+r)\beta_2^d}$$

Analog kann die Auswirkung der Steuer auf die Gleichgewichtsmenge ermittelt werden

Wenn wir die Strukturparameter β_1^s, β_2^s, β_1^d und β_2^d kennen würden, könnten wir die Auswirkungen einer Steuer beurteilen, die noch gar nicht eingeführt wurde, für die also auch noch keine Beobachtungen existieren.

Eine einfache Regression P_t^{obs} auf Q_t^{obs} erlaubt keine solche Vorhersage, deren Steigung ist bloß ein gewichtetes Mittel der Steigungen von Angebots- und Nachfragefunktion.

Das Angebots- und Nachfragemodell ist ein *Strukturmodell* in dem Sinne, dass beide Funktionen das Verhalten unterschiedlicher Personen(gruppen) beschreiben, und dass die Gleichungen durch Interventionen, wie z.B. der Einführung einer Steuer, nicht beeinflusst werden (sehr wohl aber die Gleichgewichtswerte).

Die nächste Frage ist, ob die Strukturparameter β_1^s, β_2^s, β_1^d und β_2^d aus den beobachteten Daten schätzen können. Im bisherigen Modell lautet die Antwort Nein, da wir nur Gleichgewichtswerte beobachteten. Um die vier unbekannten Parameter

Tabelle 10.2

	Dependent variable:	
	qty	price
	(1)	(2)
price	-0.934^{***}	
	(0.345)	
day1	-0.012	
	(0.208)	
day2	-0.526^{**}	
	(0.202)	
day3	-0.563^{***}	
	(0.207)	
day4	0.100	
	(0.203)	
qty		0.051
		(0.125)
windspd		1.447
		(4.067)
windspd2		-0.229
		(0.705)
cold		0.047
		(0.078)
rainy		-0.004
		(0.093)
mixed		0.212^{**}
		(0.096)
stormy		0.389^{***}
		(0.143)
Constant	8.540^{***}	-3.080
	(0.156)	(5.872)
Observations	111	111
R^2	0.184	0.194
Adjusted R^2	0.145	0.139
Residual Std. Error	0.686 (df = 105)	0.354 (df = 103)
Note:		*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

schätzen zu können benötigen wir zusätzliche Information, und dies führt uns zum *Identifikationsproblem*.

Stata:

```
* Fulton Fishmarket Whiting
clear all
use "https://www.uibk.ac.at/econometrics/data/fulton.dta"

* DEMAND
* OLS (verzerrt!)
regress qty price day1 day2 day3 day4
estimates store ols

ivregress 2sls qty day1 day2 day3 day4 ///
   (price = windspd windspd2 cold rainy mixed stormy)
estimates store tsls

hausman tsls ols    /* ist price endogen? */
estat overid        /* sind Instrumente gültig? */


* SUPPLY
ivregress 2sls price windspd windspd2 cold rainy mixed stormy ///
    (qty = day1 day2 day3 day4)
estat overid
```

R:

```
# Fulton Fishmarket Whiting
library("foreign")
fish <- read.dta("https://www.uibk.ac.at/econometrics/data/fulton.dta")
library("AER")

demand <- ivreg(qty ~ price + day1 + day2 + day3 + day4 | windspd +
    windspd2 + cold + rainy + mixed + stormy + day1 + day2 + day3 + day4, data = fish)
summary(demand)

supply <- ivreg(price ~ qty + windspd + windspd2 + cold + rainy +
    mixed + stormy | windspd + windspd2 + cold + rainy + mixed +
    stormy + day1 + day2 + day3 + day4, data = fish)
summary(supply)

library(stargazer)
stargazer(demand,supply)
```

10.6.2 Das Identifikationsproblem

Wir haben das Identifikationsproblem schon früher erwähnt, zum Beispiel im Zusammenhang mit Instrumentvariablen (IV). Dort stellten wir fest, dass für eine

IV Schätzung zumindest so viele Instrumente benötigt werden, wie viele potentiell endogene Variablen als erklärende Variablen in der Gleichung vorkommen, anderenfalls kann der IV Schätzer nicht berechnet werden. Da wir dort ausschließlich Einzelgleichungsschätzungen hatten, war dies relativ einfach überprüfbar; wenn in einem Einzelgleichungsmodell weniger Instrumentvariablen als endogene Regressoren zur Verfügung stehen führt dies zu perfekter Multikollinearität, und der Schätzer ist nicht berechenbar. Bei Mehrgleichungsmodellen ist die Überprüfung der Identifizierbarkeit leider etwas komplizierter.

Das Problem der Identifikation stellt sich schon vor der Schätzung, Identifizierbarkeit ist eine logische Vorbedingung für die Schätzung von Strukturmodellen, oder in anderen Worten, Identifikation ist ein mathematisches Problem, kein Schätzproblem!

Die Intuition von Identifikation in Mehrgleichungsmodellen kann mit mit Hilfe eines einfachen Nachfrage- Angebotsmodells relativ einfach dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \text{Angebot:} \qquad Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_t \\ \text{Nachfrage:} \qquad Q_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + v_t \end{aligned}$$

mit $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 < 0$ und $\alpha_1 < \beta_1$.

Wenn der Markt im Gleichgewicht ist können wir nur Schnittpunkte dieser beiden Geraden beobachten, und es gibt keine Möglichkeit die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ und β_2 zu schätzen, die Daten enthalten nicht genügend Information um die Parameter der Strukturform eindeutig bestimmen zu können.

Dies kann man auch einfach anhand von Abbildung 10.15 (Seite 52) erkennen, Panele a), b), c) und d) zeigen, dass jede Beobachtung der Schnittpunkt von einer Angebots- und Nachfragefunktion ist, und die Daten deshalb keine Information über den Anstieg von Angebots- bzw. Nachfragefunktion enthalten. Deshalb sind weder Angebots- noch Nachfragefunktion identifizierbar. In anderen Worten, die Daten sind mit beliebigen Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ und β_2 kompatibel,

Die reduzierten Gleichungen für das System in 'Abweichungsform' (d.h. die Variablen sind als Abweichungen vom Mittelwert gemessen) sind:

$$\ddot{P}_t = \frac{v_t - u_t}{\alpha_2 - \beta_2} \qquad \text{und} \qquad \ddot{Q}_t = \frac{\alpha_2 v_t - \beta_2 u_t}{\alpha_2 - \beta_2}$$

Offensichtlich können beliebig viele Geraden durch die Schnittpunkte (Gleichgewichtpunkte) gelegt werden, d.h. es gibt unendlich viele strukturelle Modelle, die mit dem gleichen reduzierten System vereinbar sind! Dieses Problem ändert sich nicht wenn mehr Beobachtungen verfügbar werden, solange dies nur mehr vom Gleichen bedeutet.

Wenn eine nicht identifizierbarer Strukturgleichung geschätzt wird ist das Ergebnis nicht kausal interpretierbar, trotzdem dürfte dies in der Vergangenheit häufiger vorkommen sein, auch, aber nicht nur, im Marketingbereich, wie das folgende Zitat belegt:

> "For fifty years methods have existed to diagnose whether a conceptual model is unidentifiable, but it appears marketing scholars do not

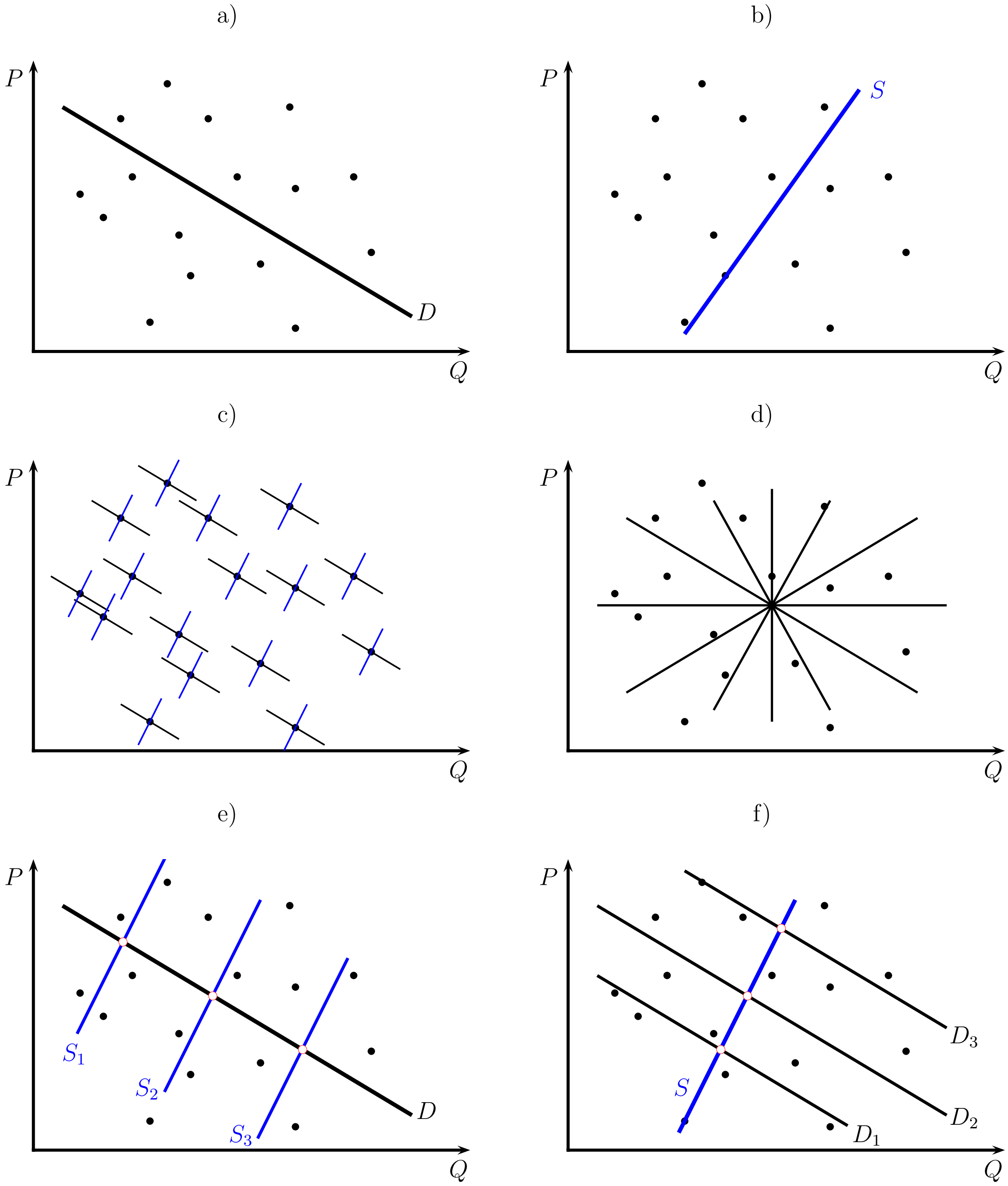


Abbildung 10.15: Das Identifikationsproblem: Wenn wir nur Gleichgewichtspunkte beobachten sind die Koeffizienten ohne zusätzliche Information nicht identifizierbar. Wenn aber eine exogene Variable *nur* das Angebot verschiebt (z.B. das Wetter) wird dadurch die Nachfragefunktion identifizierbar, usw. [lokal, www]

regularly check identification before estimation. To confirm this, all conceptual models published in the Journal of Marketing from 1995 to 1999 are analyzed using the traditional diagnostic methods for identification. ... Two-thirds of the published conceptual models contain relationships that are unidentifiable. These relationships have been empirically estimated, although it is impossible to measure their parameters validly.

> The published empirical estimates are spurious and cannot be trusted to represent the behavior they claim to measure until the identification problem has been corrected. The theory, not the statistics, must change to validate the measurements, so the paper concludes with suggestions that can help avoid unidentifiable conceptual theories." Hess (2001)

Es sollte aber auch klar sein, dass die Identifikation einer Gleichung nicht erforderlich ist, wenn anstelle der Strukturparameter nur eine Prognose angestrebt wird, da diese unmittelbar mit Hilfe der reduzierten Gleichungen erstellt werden kann (sofern exogene erklärende Variablen existieren!). Wenn aber die Koeffizienten der Strukturgleichungen geschätzt werden sollen muss vorher die Identifikation geprüft werden. Dazu ist offensichtlich zusätzliche Information erforderlich.

Stellen wir uns z.B. vor, die Nachfrage im obigen Modell sei zusätzlich vom Einkommen Y abhängig:

$$\begin{aligned} \text{Angebot:} \qquad Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_t \\ \text{Nachfrage:} \qquad Q_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + v_t \end{aligned}$$

diesem Fall (und wenn Y genügend schwankt) wird die Nachfragekurve im Zeitablauf verschoben, und es ist deshalb möglich eine Angebotskurve zu zeichnen. Dieser Fall ist in Panel f) von Abbildung 10.15 dargestellt.

Durch die zusätzliche Variable in der Nachfragefunktion wird die Angebotsfunktion identifizierbar, obwohl es nach wie vor keine Möglichkeit gibt die Nachfragefunktion zu identifizieren (d.h. das Interzept und den Steigungskoeffizienten der Nachfragefunktion zu schätzen)! Würde hingegen die Angebotskurve z.B. wegen Temperaturschwankungen laufend verschoben, so würde dadurch die Nachfragefunktion identifizierbar (siehe Panel e) von Abbildung 10.15).

Enthalten alle Strukturgleichungen eines simulatanen Gleichungssystems die gleichen Variablen, so kann aus den Daten nicht ermittelt werden, welche Gleichung welche ist, die Strukturkoeffizienten sind nicht ermittelbar. Die Strukturkoeffizienten einer bestimmten Gleichung können nur ermittelt werden, wenn diese Gleichung z.B. bestimmte Variablen *nicht* enthält, damit Schwankungen dieser Variablen die anderen Gleichungen verschieben und somit der Verlauf der in Frage stehenden Strukturgleichung ermittelt werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von *'exclusion restrictions'*.

Der Kern des Problems besteht darin, dass nicht notwendigerweise eine eindeutige Beziehung zwischen den Parametern der Strukturform und den Parametern der reduzierten Form existiert.

In vielen Fällen, wie z.B. im Nachfrage- Angebotsmodell ohne exogene Variablen, ist die reduzierte Form mit unendlich vielen Strukturformen kompatibel, und es gibt keine Möglichkeit aus den Parametern der reduzierten Form die Parameter der Strukturform zu berechnen.

Wann immer es mehrere Strukturen gibt, die mit den Parametern des reduzierten Modells kompatibel sind, nennt man diese Strukturen '*beobachtungsäquivalent*', d.h. sie können empirisch nicht unterschieden werden.

Eine Struktur ist *'identifizierbar'*, wenn es keine beobachtungsäquivalente Strukturen gibt. Dabei geht es um die Frage, ob aus den Gleichungen der reduzierten Form alle Parameter des Systems in Strukturform bestimmt werden können.

Ein einfaches Beispiel für eine nicht identifizierbare Struktur ist *perfekte Multikollinearität*, in diesem Fall sind unendlich viele Linearkombinationen der Koeffizienten $\boldsymbol{\beta}$ mit den Daten komaptibel, deshalb gibt es keine Möglichkeit einen eindeutigen Koeffizientenvektor $\boldsymbol{\beta}$ zu berechnen. Im Einzelgleichungsmodell ist Nichtidentifizierbarkeit häufig einfach zu erkennen, weil die Schätzer nicht definiert sind, im Mehrgleichungsmodell ist dies leider nicht ganz so einfach.

Generell können hinsichtlich der Identifizierbarkeit drei mögliche Fälle unterschieden werden,

1. es gibt keine Lösung, die Koeffizienten der Strukturform können *nicht* aus den Koeffizienten der reduzierten Form berechnet werden. In diesem Fall sagt man diese Gleichung ist **nicht identifiziert**, bzw. unteridentifiziert.

2. Wenn es eine eindeutige Lösung gibt, wenn alle Koeffizienten einer Gleichung in Strukturform eindeutig aus den reduzierten Gleichungen ermittelt werden können. In diesem Fall ist diese Gleichung **eindeutig** oder *exakt identifiziert*.

3. Schließlich kann es mehr als eine Lösung geben. Wenn für zumindest einen Koeffizienten der Strukturform mehrere Werte möglich sind ist diese Gleichung **überidentifiziert**.

Wie wir gleich sehen werden ist es ohne weiteres möglich, dass in einem Gleichungssystem einige Gleichungen identifizierbar sind und andere nicht.

Überprüfung der Identifizierbarkeit

Zur Überprüfung der Identifizierbarkeit stehen zwei Kriterien zur Verfügung das *Abzähl-* und das *Rangkriterium*.

Das *Abzählkriterium* ist sehr einfach überprüfbar, gibt aber nur eine notwendige Bedingung für Identifizierbarkeit an; das *Rangkriterium* liefert hingegen eine hinreichende Bedingung für Identifizierbarkeit, ist aber deutlich schwieriger zu überprüfen.

Im wesentlichen geht es darum, unter welchen Bedingungen zwischen den Matrizen der Strukturform $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ und der $\boldsymbol{\Pi}$ Matrix der Strukturform eine eindeutige Beziehung besteht. Wir werden im Folgenden die Anwendung dieser beiden Kriterien erläutern, ohne genauer auf die theoretischen Hintergründe einzugehen.

> Das **Abzählkriterium** (*order condition*) besagt, dass eine Gleichung identifizierbar ist, wenn die Anzahl der in einer Gleichung nicht vorkommenden prädeterminierten Variablen größer oder gleich ist wie die Anzahl der in der Gleichung vorkommenden endogenen Variablen minus Eins.

Die Anzahl der in der Gleichung vorkommenden endogenen Variablen umfasst die Variablen links und rechts vom Gleichheitszeichen.

Abzählkriterium:

- wenn $g - 1 > K - k$ ist die Gleichung *unter*identifiziert,
- wenn $g - 1 = K - k$ ist die Gleichung genau identifiziert,
- wenn $g - 1 < K - k$ ist die Gleichung *über*identifiziert.

mit

G: die Anzahl der endogenen Variablen im System
K: die Anzahl der prädeterminierten Variablen im System (inkl. Interzept!)
g: die Anzahl der endogenen Variablen in der betreffenden Gleichung
k: die Anzahl der prädeterminierten Variablen in der Gleichung

Eine äquivalente Form dieses Kriteriums besagt, dass eine notwendige Bedingung für die Identifizierbarkeit einer Gleichung ist, dass *die Anzahl aller in der Gleichung nicht vorkommenden Variablen größer oder gleich sein muss als die Anzahl aller endogenen Variablen (bzw. aller Gleichungen) im Modell minus Eins.*

Wie wir bereits erläutert haben läuft das Argument im Kern darauf hinaus, dass das Strukturmodell *a priori Restriktionen* erfüllen muss, damit eine Gleichung identifizierbar ist. Die häufigste Form sind Nullrestriktionen, d.h., dass bestimmte Parameter in manchen Gleichungen aus theoretischen Gründen den Wert Null haben müssen, also in diesen Gleichung nicht vorkommen dürfen!.

Das Abzählkriterium (*order condition*) ist nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für Identifizierbarkeit. Selbst wenn das Abzählkriterium erfüllt ist kann es nur als Faustregel für die Identifizierbarkeit einer Gleichung gelten. Stellen wir uns z.B. vor, dass im Angebots- Nachfragemodell

$$\begin{aligned} \text{Angebot:} \quad Q_t &= \alpha_1 + \alpha_2 P_t + u_t \\ \text{Nachfrage:} \quad Q_t &= \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + v_t \end{aligned}$$

das Einkommen Y_t kaum schwankt, bzw. dass der Koeffizient β_3 annähernd Null ist. In diesem Fall ist das Abzählkriterium zwar erfüllt, aber trotzdem wird es nur schwer möglich sein zwischen Nachfrage- und Angebotsfunktion verlässlich zu unterscheiden.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Identifizierbarkeit ist das **Rang-Kriterium** (*rank condition*), auf welches hier nicht näher eingegangen wird.

10.7 Instrumentvariablen Schätzer für multiple Regressionen

Die grundlegende Idee kann leicht verallgemeinert werden für multiple Regressionen mit mehreren Instrumenten.

Im multivariaten Fall muss *mindestens* für jeden *endogenen* Regressor eine Instrumentvariable zur Verfügung stehen.

Allgemeiner, die IV Schätzer sind

- *exakt identifiziert*, wenn die Anzahl der Instrumente *gleich* der Anzahl der endogenen Regressoren ist.
- *überidentifiziert*, wenn die Anzahl der Instrumente *größer* ist als die Anzahl der endogenen Regressoren.
- *unteridentifiziert*, wenn die Anzahl der Instrumente *kleiner* ist als die Anzahl der endogenen Regressoren.

Unteridentifizierte Systeme können nicht geschätzt werden!

10.7.1 IV-Schätzer für den multivariaten Fall bei exakter Identifikation

Für den den multivariaten Fall haben wir bereits gezeigt

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

woraus folgt

$$\operatorname{plim}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right) \cdot \operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon})\right)$$

Wenn wir wieder annehmen, dass $\operatorname{plim}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}/n) = \boldsymbol{\Sigma}_{XX}$ eine positiv definite Matrix mit vollem Rang ist und $\operatorname{plim}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}/n) = \boldsymbol{\Sigma}_{X\varepsilon} \neq 0$, dann ist

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{X\varepsilon}$$

kein konsistenter Schätzer, da einer oder mehrere der Regressoren mit dem Störterm $\boldsymbol{\varepsilon}$ der Grundgesamtheit korreliert ist.

Das Modell ist also $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ mit $\operatorname{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$, aber mit $\operatorname{plim}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}/n \neq 0$!

Die Methode der Instrumenten-Variablen liefert zumindest konsistente Schätzer, wann immer der Störterm $\boldsymbol{\varepsilon}$ mit den erklärenden Variablen $\boldsymbol{X}$ korreliert ist. Wir fassen die Instrumente in einer $n \times k$ Matrix $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_k)$ zusammen, wobei für jede erklärende Variable ein Instrument mit n Beobachtungen existieren muss.[11] Diese Matrix $\boldsymbol{Z}$ darf nicht singulär sein und muss folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}\right) &= 0 \\
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right) &= \boldsymbol{\Sigma}_{ZX} \quad \text{existiert und ist nicht singulär.} \\
\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}\right) &= \boldsymbol{\Sigma}_{Zy} \quad \text{existiert und ist nicht singulär}
\end{aligned}$$

[11] Allerdings kann (und muss) eine Variable x, die nicht mit dem Störterm korreliert ist, als ihr eigenes Instrument verwendet werden!

Die erste Bedingung garantiert, dass die Korrelation zwischen Störterm und Instrumenten–Variable *'in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert'*. Die zweite Annahme garantiert eine positive Korrelation zwischen den X und den Z. Die dritte Gleichung ist lediglich eine Definition und unproblematisch.

Wir prämultiplizieren die ursprüngliche Gleichung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ mit der transponierten Instrument-Matrix $\boldsymbol{Z}$ und erhalten

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

anschließend dividieren wir beide Seiten durch n und bilden das *probability limit*

$$\begin{aligned} \operatorname{plim} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}}{n} &= \operatorname{plim} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}}{n}\boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{Zy} &= \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{0} \end{aligned}$$

da $\operatorname{plim}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}/n) = 0$ können wir nach $\boldsymbol{\beta}$ lösen

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{Zy}$$

Auf diese Gleichung können wir die Methode der Momente anwenden und die Momente der Grundgesamtheit $\boldsymbol{\Sigma}_{yX}$ und $\boldsymbol{\Sigma}_{Zy}$ durch die aus der Stichprobe berechneten Momente $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}/n$ und $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}/n$ ersetzen. Dies gibt uns den Instrumentvariablen-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} = \left(\frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}}{n}\right)^{-1} \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}}{n} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$$

Wie man einfach sehen kann resultiert der OLS–Schätzer als Speziallfall, wenn $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}$, d.h. wenn jede x Variable als Instrument für sich selbst dient. Dies ist erlaubt, wenn die x exogen sind. Wenn hingegen die Instrumente überhaupt nicht mit den ursprünglichen Variablen korreliert sind, d.h. wenn $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$, bricht dieser Ansatz zusammen. Aber auch wenn die Korrelation zwischen den x und z Variablen gering ist liefert dieser Ansatz sehr schlechte Resultate $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})$!

Um die Konsistenz zu prüfen gehen wir wie üblich vor. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} &= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(Z'\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{plim}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}) &= \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon})\right] \\ &= \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left[\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right] \\ &= \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}^{-1}\mathbf{0} = \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

womit gezeigt wurde, dass der Instrumentvariablen Schätzer tatsächlich konsistent ist.

Als nächstes müssen wir die asymptotische Varianz– Kovarianzmatrix $\boldsymbol{V}$ für $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}$ ermitteln. Unter Berücksichtigung von $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} - \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon})$ erhalten wir

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} - \boldsymbol{\beta})' = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

und

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}) = \left[\frac{1}{n}\,\text{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right]\left[\text{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{Z}\right)\right]\left[\text{plim}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\right]$$

woraus unter Bezugnahme auf die obigen Annahmen über die Instrumente folgt

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}) = \frac{1}{n}\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_{ZX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ZZ}\boldsymbol{\Sigma}_{ZX}^{-1}$$

Praktisch erfolgt die Schätzung einer konsistenten Varianz–Kovarianzmatrix durch

$$\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

wobei $\hat{\sigma}^2$ (ein konsistenter Schätzer für σ^2) folgendermaßen ermittelt wird:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n-k}$$

wobei es keine große Rolle spielt, ob wir durch n oder $n-k$ dividieren, da es sich um einen asymptotischen Test handelt.

Man beachte, dass all dies nur anwendbar ist, wenn für jede potentiell endogene x Variable genau eine Instrumentvariable zur Verfügung steht, weil sonst $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$ nicht definiert ist! Der GIVE Schätzer ist auch für überidentifizierte Systeme anwendbar.

10.7.2 Der Verallgemeinerte Instrumentvariablenschätzer (GIVE)

GIVE (*'Generalized Instrumental Variable Estimator'*) ist ein Instrumentvariablenschätzer für den Fall, dass die Anzahl der Instrumente größer ist als die Zahl der Regressoren.

Bisher haben wir stets angenommen, dass wir exakt gleich viele Instrumente wie Regressoren haben, d.h. dass die Instrumenten Matrix $\boldsymbol{Z}$ und die Regressor Matrix $\boldsymbol{X}$ beide die gleiche Dimension $(n \times k)$ haben, wobei exogene X als Instrumente für sich selbst verwendet werden.

Wenn die Anzahl der Instrumente l größer ist als die Anzahl der X-Variablen k kann man die ursprüngliche Gleichung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ mit $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$ vormultiplizieren

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

Wenn der letzte Term in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert und wir mit der Matrix $[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}']^{-1}$ vormultiplizieren erhalten wir nach Anwendung der Methode der Momente einen allgemeineren Instrumentvariablen Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} = \left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$$

Wenn wir $\boldsymbol{P}_Z := \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$ definieren können wir dies einfacher anschreiben

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} = [\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y}$$

Die entsprechende Varianz-Kovarianzmatrix der Parameter ist

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})^{-1}$$

wobei ein Schätzer $\hat{\sigma}^2$ für σ^2 wie üblich aus den Residuen berechnet werden kann (zeigen Sie, dass $\boldsymbol{P}_Z$ symmetrisch und idempotent ist).

Die Intuition dahinter wird klarer, wenn man beachtet, dass $\boldsymbol{P}_Z := \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$ eine Projektionsmatrix ist!

Wenn die die Matrix $\boldsymbol{X}$ mit der Projektionsmatrix $\boldsymbol{P}_Z$ vormultipliziert wird, werden die $\boldsymbol{X}$ in den Spaltenraum der Instrumente $\boldsymbol{Z}$ projiziert, d.h.

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}$$

Daraus folgt eine alternative Möglichkeit den den IV Schätzer herzuleiten. Man kann eine einfache Datentransformation vornehmen, indem man das Modell $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ mit der Projektionsmatrix $\boldsymbol{P}_Z$ vormultipliziert

$$\underbrace{\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y}}_{\widehat{\boldsymbol{y}}} = \underbrace{\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}}_{\widehat{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{\beta} + \underbrace{\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{\varepsilon}}_{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

und für die derart transformierten Daten $\widehat{\boldsymbol{y}} = \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\beta} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ den OLS Schätzer anwendet. Der OLS Schätzer auf die derart transformierten Daten ist der IV Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}} = (\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}})^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\mathbf{y}}$$

weil

$$\begin{aligned}
[(\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}(\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y} &= \\
[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y} &= \\
[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y} &= \\
\left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} &= \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}
\end{aligned}$$

($\boldsymbol{P}_Z$ ist symmetrisch und idempotent, d.h. $\boldsymbol{P}_Z = \boldsymbol{P}_Z'$ und $\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{P}_Z = \boldsymbol{P}_Z$)

Die geschätzte Varianz-Kovarianzmatrix des Koeffizientenvektors $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \hat{\sigma}^2(\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}})^{-1} \\
&= \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

Achtung 1: Die IV Residuen, die u.a. zur Berechnung von $\hat{\sigma}^2$ benötigt werden, werden als

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}$$

berechnet, und nicht wie manchmal irrtümlich angenommen aus $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}$ oder $\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}$!

Achtung 2: Die meisten Programme geben für Instrumentvariablenschätzer ein Bestimmtheitsmaß R^2 aus, aber dieses R^2 darf *nicht* wie beim OLS-Schätzer als Anteil der durch die Regressoren erklärten Variation von y interpretiert werden! Außerdem kann das R^2 von Instrumentvariablenschätzungen negativ sein!

Instrumentvariablenschätzer und die Methode 2-stufigen Kleinsten Quadrate (2SLS)

Da $\boldsymbol{P}_Z$ eine Projektionsmatrix ist kann der vorhin entwickelte IV Schätzer auch als eine zweistufige Anwendung des OLS-Schätzers begriffen werden

- **1. Stufe:** Regressiere jede der Variablen in der X-Matrix auf die Instrumente $\boldsymbol{Z}$ und forme daraus die Matrix der gefitteten Werte $\widehat{\boldsymbol{X}}$

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}$$

  mit $\boldsymbol{P}_Z = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$, wobei die Projektionsmatrix $\boldsymbol{P}_Z$ symmetrisch und idempotent ist.

- **2. Stufe:** Regressiere $\boldsymbol{y}$ auf die gefitteten $\widehat{\boldsymbol{X}}$ um um einen Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ für $\boldsymbol{\beta}$ zu erhalten

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{2SLS}} &= (\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}})^{-1}(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y}) \\
&= [\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}\,\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z'\boldsymbol{y} \\
&= [\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X}]^{-1}\,\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{y} \\
&= \left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \\
&= \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\text{IV}}
\end{aligned}$$

Deshalb ist der 2SLS Schätzer ein Spezialfall des IV Schätzers.

10.8 Praktische Hinweise

Gute Instrumente sollten etwas ähnliches leisten, wie die Intervention in einem Experiment, sie sollten *nur* über die Regressoren auf y wirken, also einen isolierten Eingriff

Woher kommen 'gute' Instrumente?

- Gesetzliche Regelungen, Regulierung, etc. Diese sollten das 'Assignment' unabhängig vom 'Outcome' beeinflussen.

- Natur (Geographie, Klima (Wetter), Biologie, ...)
- Falls verfügbar, RCT (*Randomized Controlled Trials*; → *'intention to treat'*)
- Opportunitätskosten, die sich zwischen Individuen unterscheiden;
- ...

Für die Wahl 'guter' Instrumente ist meist eine fundierte Kenntnis des datengenerierenden Prozesses (DGP) erforderlich!

Interne Validität Die *'exclusion restriction'* kann nicht empirisch getestet werden, deshalb muss 'Überzeugungsarbeit' geleistet werden! Wie?

- Die wichtigste Grundlage bildet vermutlich immer noch gründliches Nachdenken, d.h. die ökonomische Theorie
- Stellen Sie sich ein (randomisiertes) Experiment vor, welches geeignet wäre, die Frage zu beantworten;
- Etablierte Normen und Konventionen, denen in gut publizierten (!) Studien gefolgt wird;
- Sowohl für die Spezifikation als auch für die Publikation beachten Sie die folgenden Punkte:
  - Diskutieren Sie die identifizierenden Annahmen!
  - Überprüfen und diskutieren Sie die *reduzierte Form*: wenn Sie dort nichts finden, ist möglicherweise nichts da.
  - Überprüfen und diskutieren Sie die *1. Stufe*: stimmen die Vorzeichen und Größenordnungen mit den Erwartungen überein?
  - Überprüfen und diskutieren Sie die F-Statistik der 'ausgeschlossenen' (*excluded*) Instrumente (die tatsächliche Verteilung etwas komplexer, aber als Faustregel sollte sie mindestens größer als 10 sein).
  - Überprüfen und diskutieren Sie den Unterschied zwischen OLS und IV Schätzung. Entspricht der Unterschied den Erwartungen? Hüten Sie sich vor HARKing (*'Hypothesizing After the Results are Known'*)
  - Diskutieren Sie, inwieweit externe Validität gegeben sein könnte.

10.9 Das Neyman-Rubin Kausalmodell

Die Debatte um die Messung kausaler Effekte hat sich in den vergangenen 25 Jahren grundlegend geändert, der Fokus rückte von der Schätzung komplexer interdependenter Modelle zunehmend auf einfachere Modelle und eine konsistente Schätzung von *'parameters of interest'*.

Besonders einflussreich erwies sich dabei das sogenannte *Rubin Kausalmodell* (RCM, für *Rubin Causal Model*, benannt nach Donald Rubin), dessen Ursprünge sich in einem experimentellen Zusammenhang auf die Masterarbeit von Jerzy Neyman (1923) zurück verfolgen lassen. Für eine ausführliche Darstellung siehe Imbens and Rubin (2015).

Dieses aus einer statistischen Richtung hervorgegangene Modell beruht auf einer kontrafaktischen Definition von Kausalität und verdeutlicht vor allem, welche Konsequenzen endogene Entscheidungen haben können, und unter welchen Bedingungen die Effekte von Maßnahmen kausal interpretiert werden können.

Während der früher besprochene 'konventionelle' Ansatz im wesentlichen eine 'homogene' Wirkung der Instrumentvariablen auf die potentiell endogenen Regressoren unterstellte, erlaubt das im Rahmen von RCTs formulierte *Neyman-Rubin Modell* eine Modellierung *heterogener treatment Effekte*, und damit eine reichhaltigere Interpretation sowie eine transparentere Darstellung der identifizierenden Annahmen.

Am Anfang dieser Überlegungen steht eine Intervention, die hier aufgrund der Ursprünge in der Medizin meist 'Treatment' (T) genannt wird.

Ein Individuum i (wobei ein Individuum auch eine Firma, Region, etc. sein kann) wird diesem Treatment entweder ausgesetzt oder nicht, und das Ergebnis (*outcome*) bezeichnen wir mit

y_{1i} für Individuum i *mit* Treatment;
y_{0i} für Individuum i *ohne* Treatment; und

$T_i \in \{0, 1\}$ bezeichnet den Treatment Status von Individuum i, d.h.

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Individuum } i \text{ das Treatment erhält;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Treatment könnte z.B. ein Universitätsabschluss sein, und y_{0i} das Einkommen von Person i *ohne* Uniabschluss sein ($T_i = 0$), und y_{1i} das Einkommen der gleichen Person i, wenn sie einen Uniabschluss gemacht hat ($T_i = 1$).

Ein Individuum erhält entweder dem Treatment, oder es erhält das Treatment *nicht*. Da es nur diese beiden Möglichkeiten gibt können wir das Ergebnis für Individuum i schreiben als

$$y_i = T_i y_{1i} + (1 - T_i) y_{0i}$$

Für jedes Individuum beobachten wir nur entweder y_{0i} oder y_{1i}, wir können nie beides gleichzeitig beobachten. Das jeweils nicht beobachtete Ergebnis ist das Kontrafaktum (*counterfactual*), mit dem wir das beobachtete Ergebnis gerne vergleichen würden. Das nicht beobachtete Ergebnis wird potentielles Ergebnis (*potential outcome*) genannt.

Der interessierende – aber immer unbeobachtbare – kausale Effekt des Treatments auf Individuum i ist

$$\delta_i = y_{1i} - y_{0i}$$

Dabei wird meist angenommen, dass das potentielle Ergebnis einer Person nicht vom Treatment anderer Personen beeinflusst wird. Diese Annahme wird SUTVA (für *Stable Unit Treatment Value Assumption*) genannt und erfüllt eine ähnliche Funktion wie die Annahme eines partiellen Gleichgewichts in der Ökonomik.

Da dieser individuelle kausale Effekt nicht beobachtet werden kann konzentriert sich die Literatur auf diverse *durchschnittliche* Effekte. Von besonderem Interesse ist dabei der durchschnittliche Effekt auf all diejenigen, die das Treatment erhalten haben, der *Average Treatment Effect on the Treated* (ATET), und der durchschnittliche Effekt auf Alle (*Average Treatment Effect* ATE, d.h. der durchschnittliche Effekt auf *treated and untreated*). Beginnen wir mit dem ATET.

Beobachten können wir nur den Unterschied zwischen den durchschnittlichen Einkommen von Uniabgängern mit Uniabschluss und den durchschnittlichen Einkommen von Nicht-Uniabgängern ohne Uniabschluss, also

$$\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0)$$

Diesen beobachteten Unterschied nennen wir *'Average Observed Difference'* (AOD).

Das Problem ist, dass die Selektion in die Gruppe der Uniabgänger nicht zufällig ist, Uniabsolventen unterscheiden sich vermutlich in zahlreichen Charakteristika von Nicht-Uniabsolventen (z.B. Einkommen der Eltern, Fähigkeiten, Wohnort, ...).

Deshalb bedeutet ein simpler Vergleich der Einkommen von Uniabsolventen mit den Einkommen von Nicht-Uniabsolventen immer ein Vergleich von Äpfel mit Birnen.

Können wir aus dem beobachteten Unterschieden etwas über den kausalen Effekt lernen?

Wir subtrahieren und addieren $\mathrm{E}(y_0|T=1)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0) &= \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=1) - \\
&\quad\ \mathrm{E}(y_0|T=0) + \mathrm{E}(y_0|T=1) \\
&= \underbrace{\mathrm{E}(y_1 - y_0|T=1)}_{\text{ATET}} + \underbrace{\mathrm{E}(y_0|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0)}_{\text{Selection Bias}}
\end{aligned}$$

oder

$$\text{ATET} = \text{AOD} - \text{Selection Bias}$$

Das sagt uns lediglich, dass es sich tatsächlich um einen Vergleich von Äpfel mit Birnen handelt, der interessierende Effekt der Wirkung eines Uni-Abschlusses auf die Gruppe aller potentiellen Uni-Abgänger ist nicht gleich dem beobachteten Unterschied.

Den ebenfalls unbeobachtbaren 'Selection Bias' kann man sich als Indikator dafür vorstellen, wie gut die Treatment-Gruppe als Kontrafaktum für die Non-Treatment Gruppe geeignet ist.

Der ATET ist wirtschaftspolitisch vor allem interessant um im Rahmen einer Kosten-Nutzen Analyse beurteilen zu können, ob ein Programm weitergeführt oder eingestellt werden soll.

Analog dazu kann man natürlich auch einen *Average Treatment Effect on the Untreated* (ATEU) berechnen, indem man $\mathrm{E}(y_1|T=0)$ addiert und subtrahiert

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0) &= \mathrm{E}(y_1|T=0) - \mathrm{E}(y_0|T=0) + \\ &\quad \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_1|T=0) \\ &= \underbrace{\mathrm{E}(y_1 - y_0|T=0)}_{\text{ATEU}} + \underbrace{\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_1|T=0)}_{\text{Selection Bias}} \end{aligned}$$

Etwas komplexer ist die Berechnung des durchschnittlichen Effekts auf *alle* Individuen, unabhängig davon, ob sie teilnehmen oder nicht (ATE, *Average Treatment Effect*). Im Beispiel entspricht dies den Auswirkungen eines

Unter Verwendung des *Law of Iterated Expectations* erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ATE} &= \mathrm{E}(y_1 - y_0) \\ &= [\mathrm{E}(y_1 - y_0|T=1)]\Pr(T=1) + [\mathrm{E}(y_1 - y_0|T=0)]\Pr(T=0) \\ &= [\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=1)][1 - \Pr(T=0)] + \\ &\quad [\mathrm{E}(y_1|T=0) - \mathrm{E}(y_0|T=0)][1 - \Pr(T=1)] \\ &= \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0) - \\ &\quad \mathrm{E}(y_1|T=1)\Pr(T=0) - \mathrm{E}(y_0|T=1)\Pr(T=1) + \\ &\quad \mathrm{E}(y_0|T=0)\Pr(T=1) + \mathrm{E}(y_1|T=0)\Pr(T=0) \\ &= \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0) - \\ &\quad [\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_1|T=0)]\Pr(T=0) - \\ &\quad [\mathrm{E}(y_0|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0)]\Pr(T=1) \end{aligned}$$

[noch nicht kontrolliert, bitte nachrechnen!!!]

Der beobachtbare durchschnittliche Unterschied ist also

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0) &= \mathrm{ATE} + \\ &\quad \underbrace{[\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_1|T=0)]}_{\text{Selection Bias 1}}\Pr(T=0) + \\ &\quad \underbrace{[\mathrm{E}(y_0|T=1) - \mathrm{E}(y_0|T=0)]}_{\text{Selection Bias 2}}\Pr(T=1) \end{aligned}$$

Der beobachtbare Unterschied zwischen Treatment und Non-Treatment Gruppe ist also nur dann gleich dem kausalen Effekt auf die Gesamtheit, wenn beide *Selection Bias* gleich Null sind!

Der ATE ist im Rahmen einer Kosten-Nutzen Analyse vor allem für Programme mit *verpflichtender* Teilnahme relevant.

Für Maßnahmen mit *freiwilliger* Teilnahme stellt sich die Frage, wie die Auswirkungen einer marginalen Veränderung entlang einer Dimension sind. Wir werden dies im Zusammenhang mit Instrumentvariablen diskutieren, die häufig nur auf eine Teilgruppe von Teilnehmern wirken. Dahinter steht die Vorstellung einer unbeobachteten Heterogenität (*unobserved heterogeneity*) der potentiellen Teilnehmer. In diesem Fall kann jedes Instrument einen *Local Average Treatment Effect* (LATE) definieren, je nachdem, auf welche Teilgruppe es wirkt.

In diesem Zusammenhang spricht die Literatur von *'always takers'*, die immer an einem Programm teilnehmen, egal ob sie der Treatment- oder Kontrollgruppe zugewiesen wurden, und *'never takers'*, die unabhängig von der Zuweisung (*assignment*) nie teilnehmen. Sogenannte *'compliers'* folgen der geplanten Zuweisung, und wenn für eine Instrumentvariable z gilt $\Pr(T = 1|z = 1) \neq \Pr(T = 1|z = 0)$ (d.h. das Instrument in der ersten Stufe relevant ist) kann mit Hilfe der Instrumentvariable der durchschnittliche Effekt auf die *'complier'* geschätzt werden, also ein LATE (*Local Average Treatment Effect*).

Zum Beispiel werden von einer gesetzlichen Verlängerung der Pflichtschulzeit nur eine Teilmenge der in Frage kommenden Personen betroffen sein, nämlich solche Personen, die überlegten nach der Pflichtschulzeit die Ausbildung zu beenden. Der Treatment Effekt einer Verlängerung der gesetzlichen Pflichtschulzeit wird sich also nur auf Personen auswirken, die ohne Treatment aus der Schule ausgeschieden wären, aber nicht auf Personen, die unabhängig von der gesetzlichen Schulpflicht eine universitäre Ausbildung gewählt hätten.

Mit einer Monotonitätsannahme (*monotonicity assumption*) werden üblicherweise so genannte *'defiers'* ausgeschlossen, die sich immer entgegengesetzt zur Zuweisung verhalten, also am Programm teilnehmen, wenn sie der Kontrollgruppe zugewiesen werden, und nicht teilnehmen, wenn sie der Treatment Gruppe zugewiesen werden.

Kausale Effekte und Regressionen

Wir erinnern uns, dass das Ergebnis für ein Individuum i geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} y_i &= T_i y_{1i} + (1 - T_i) y_{0i} \\ &= y_{0i} + (y_{1i} - y_{0i}) T_i \end{aligned}$$

Wenn wir einen Störterm hinzufügen erhalten wir

$$\begin{aligned} y_i &= \underbrace{y_{0i}}_{\beta_1} + \underbrace{(y_{1i} - y_{0i})}_{\beta_2} T_i + \varepsilon_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 T_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

Um den Koeffizienten β_2 kausal interpretieren zu können müssen der Regressor T_i (d.h. das *assingnment*) und der Störterm ε_i unkorreliert sein! Falls die Teilnahme am Projekt von unbeobachtbaren Faktoren abhängt ist das Treatment endogen, d.h. mit dem Störterm korreliert, und deshalb verzerrt und nicht kausal interpretierbar!

10.9.1 Selektion und Zuweisung (*Assignment*)

Die Frage ist nun, unter welchen Umständen der Selektionsbias verschwindet und die beobachtbaren Effekte eine kausale Interpretation haben. Dabei spielt der Zuweisungs-Mechanismus (*assignment*) eine entscheidende Rolle.

Experimente und Randomisierung (*Random Assignment*)

Im Fall von Experimenten erfolgt die Zuweisung exogen und sollte deshalb nicht mit irgendwelchen anderen (unbeobachtbaren) Faktoren korreliert sein. Ebenso sollte bei perfekter Randomisierung die Zuweisung in Treatment- und Kontrollgruppe nicht von irgendwelchen anderen Faktoren beeinflusst sein. In diesen Fällen erwarten wir eine stochastische Unabhängigkeit der Zuweisung (*assignment*) mit den potentiellen Ergebnissen.

Im Fall stochastischer Unabhängigkeit sind die bedingten Erwartungswerte gleich den unbedingten Erwartungswerten, d.h. $\mathrm{E}(y_1|T=1) = \mathrm{E}(y_1)$ und $\mathrm{E}(y_1|T=0) = \mathrm{E}(y_1)$, woraus folgt

$$\mathrm{E}(y_1|T=1) - \mathrm{E}(y_1|T=0) = \mathrm{E}(y_1) - \mathrm{E}(y_1) = 0$$

und ebenso für y_0.

Damit verschwinden alle Verzerrungen aufgrund des *Selection Bias* und die Beobachtbaren Unterschiede können kausal interpretiert werden

$$\mathrm{ATE} = \mathrm{ATET} = \mathrm{ATEU}$$

Dies funktioniert bei *Beobachtungsdaten* leider nicht so einfach!

Selektion anhand beobachtbarer Variablen

Im Prinzip könnte das Problem auch gelöst werden, wenn *alle* Variablen, die die Selektion in Treatment- und Kontrollgruppe beeinflussen, gemessen werden können (*Selection on observed variables*, bei Statistikern auch *unconfoundedness* genannt).

Wenn z.B. eine beobachtbare Variable darüber entscheidet, ob jemand eine Universität besuchen wird oder nicht (z.B. ein Parteibuch in einem diktatorischen System), kann dies verwendet werden, um den Effekt auf das Einkommen zu schätzen (allerdings nur, wenn die Parteibücher vorher verlost wurden, d.h. der Besitz eines Parteibuches nicht von unbeobachtbaren Faktoren abhängt).

In diesem Fall ist das Treatment für gegebene Variablen $\boldsymbol{x}_i$ *'as good as randomly assigned'*, d.h.

$$\mathrm{E}(y_{0i}|\boldsymbol{x}_i, T_i) = \mathrm{E}(y_{0i}|\boldsymbol{x}_i)$$

Dies ist allerdings eine *sehr* strenge Annahme, die selten erfüllt sein dürfte.

Allerdings kann durch die Berücksichtigung solcher Kontrollvariablen $\boldsymbol{x}$ das Endogenitätsproblem manchmal zumindest gemildert werden.

Selektion anhand unbeobachtbarer Variablen

Perfekte Kontrolle im Sinne von Experimenten, Randomisierung oder Berücksichtigung *aller* das Treatment beeinflussenden Faktoren dürfte selten möglich sein.

In diesem Fall spricht man von *Selection on Unobservables.* Als Konsequenz ist es aufgrund der verfügbaren Beobachtungsdaten unmöglich, ein vergleichbares *counterfactual* zu finden. Der beobachtbare Unterschied vergleicht Äpfel mit Birnen!

Mögliche Auswege aus dieser Situation bieten

- Instrumentvariablen: wenn Instrumente auf einzelne Individuen unterschiedlich wirken (also Heterogenität vorliegt) kann meist nur ein *Local Average Treatment Effect* (LATE) gemessen werden.
- Paneldaten (*fixed effects*) mit *Difference-in-differences* Schätzern;
- *Regression Discontinuity* Schätzer.

Alle diese Methoden erfordern relativ strenge Annahmen und sollten reflektiert angewandt werden!

Zahlreiche Anwendungen dieser Methoden werden z.B. in Kugler et al. (2014) diskutiert (Ökonometrische Methoden zur Evaluierung kausaler Effekte der Wirtschaftspolitik).

10.10 Zusammenfassung

Endogene Regressoren sind mit den Störtermen korreliert, dies führt dazu, dass OLS Schätzer *weder erwartungstreu noch konsistent* sind!

Folgende Fälle führen zu endogenen Regressoren:

- **Fehlende relevante Variablen** (*'omitted variable bias'*)
- **Simultane Kausalität** (*'reverse causality'*, *'omitted equation bias'*)
- **Messfehler in den x Variablen**
- **Autokorrelation in Modellen mit verzögerten endogenen Variablen**
- **Selektionsprobleme** (*'selection bias'*)
- **Unbeobachtete Heterogenität** (*'unobserverved heterogeneity'*)

wobei die letzten beiden Fälle häufig als Spezialfälle der ersten beiden Fälle dargestellt werden können, und deshalb hier nicht extra diskutiert werden.

Geeignete Instrumentvariablen sollen ähnlich wie eine Intervention in einem Experiment wirken, d.h. *nur* über den endogenen Regressor auf y einwirken. Technisch ausgedrückt, Instrumentvariablen müssen *relevant* (d.h. $\text{cov}(x, z) \neq 0$, oder besser, möglichst groß), und *exogen* (d.h. $\text{cov}(z, \varepsilon) = 0$) sein!

Tatsächlich ist es äußerst schwierig geeignete Instrumentvariablen zu finden, und 'schwache' Instrumentvariablen führen nicht selten dazu, dass man vom Regen in die Traufe gerät.

Literaturverzeichnis

Angrist, J. D. and Pischke, J.-S. (2008), *Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist's Companion*, Princeton University Press.

Bound, J., Jaeger, D. A. and Baker, R. M. (1995), 'Problems with Instrumental Variables Estimation When the Correlation Between the Instruments and the Endogeneous Explanatory Variable is Weak', *Journal of the American Statistical Association* **90**(430), 443–450.

Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005), *Microeconometrics: Methods and Applications*, Cambridge University Press.

Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2008), *Microeconometrics Using Stata*, 1st edn, Stata Press.

Davidson, R. and MacKinnon, J. G. (1989), 'Testing for consistency using artificial regressions', *Econometric Theory* **5**(3), 363–384.
URL: *http://www.jstor.org/stable/3532374*

Deaton, A. and Cartwright, N. (2016), Understanding and misunderstanding randomized controlled trials, Working Paper 22595, National Bureau of Economic Research.

Graddy, K. (1995), 'Testing for imperfect competition at the fulton fish market', *The RAND Journal of Economics* **26**(1), pp. 75–92.

Graddy, K. (2006), 'Markets: The fulton fish market', *The Journal of Economic Perspectives* **20**(2), pp. 207–220.

Graddy, K. and Kennedy, P. (2010), 'When are supply and demand determined recursively rather than simultaneously?', *Eastern Economic Journal* **36**(2), pp. 188–197.

Granger, C. W. J. (1969), 'Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods', *Econometrica* **37**(3), 424–438.

Greene, W. (2003), *Solutions Manual: Econometric Analysis*, 5$^{\text{th}}$ edn, Pearson Education.

Hausman, J. A. (1978), 'Specification tests in econometrics', *Econometrica* **46**(6), 1251–1271.
URL: *http://www.jstor.org/stable/1913827*

Hess, J. (2001), 'Unidentifiable relationships in conceptual marketing models', *Review of Marketing Science* **WP No. 316**.

Hume, D. (1993), *Eine Untersuchung über den menschlichen Verstand*, 12 edn, Meiner Verlag. Hrsg. von Jens Kulenkampff, übersetzt von Raoul Richter.

Imbens, G. W. (2014), Instrumental Variables: An Econometrician's Perspective, Working Paper 19983, National Bureau of Economic Research.
URL: *http://www.nber.org/papers/w19983*

Imbens, G. W. and Rubin, D. B. (2015), *Causal Inference for Statistics, Social, and Biomedical Sciences: An Introduction*, Cambridge University Press, New York, NY, USA.

Kahneman, D. (2013), *Thinking, Fast and Slow*, reprint edn, Farrar, Straus and Giroux.

Kugler, F., Schwerdt, G. and Ludger, W. (2014), 'Ökonometrische Methoden zur Evaluierung kausaler Effekte der Wirtschaftspolitik', *Perspektiven der Wirtschaftspolitik* **15**(2), 105–132.
URL: *https://www.degruyter.com/view/j/pwp.2014.15.issue-2/pwp-2014-0013/pwp-2014-0013.xml?format=INT*

Lewis, D. (1973), 'Causation', *The Journal of Philosophy* **70**(17), 556–567.

Menzies, P. (2017), Counterfactual theories of causation, *in* E. N. Zalta, ed., 'The Stanford Encyclopedia of Philosophy', winter 2017 edn, Metaphysics Research Lab, Stanford University.
URL: *https://plato.stanford.edu/entries/causation-counterfactual/*

Murray, M. P. (2011), 'Avoiding the Pitfalls of Instrumental Variables Estimation with Few or Many Instruments', *SSRN* .
URL: *https://ssrn.com/abstract=1878602*

Pearl, J. (2000), *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, reprinted with corrections edn, Cambridge University Press.

Riedl, R. and Kaspar, R. (1981), *Biologie der Erkenntnis. Die stammesgeschichtlichen Grundlagen der Vernunft*, Verlag Paul Parey - Berlin und Hamburg.

Rubin, D. (1974), 'Estimating causal effects of treatments in randomized and nonrandomized studies', *Journal of Educational Psychology* **66**(5), 688–701.

Salsburg, D. (2002), *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*, 1st edition edn, Holt Paperbacks.

Sargan, D. (1988), *Lectures on Advanced Econometric Theory*, Blackwell Publishers.

Stinebrickner, R. and Stinebrickner, T. R. (2008), 'The Causal Effect of Studying on Academic Performance', *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy* **8**(1), 1–55.
URL: *http://ideas.repec.org/a/bpj/bejeap/v8y2008i1n14.html*

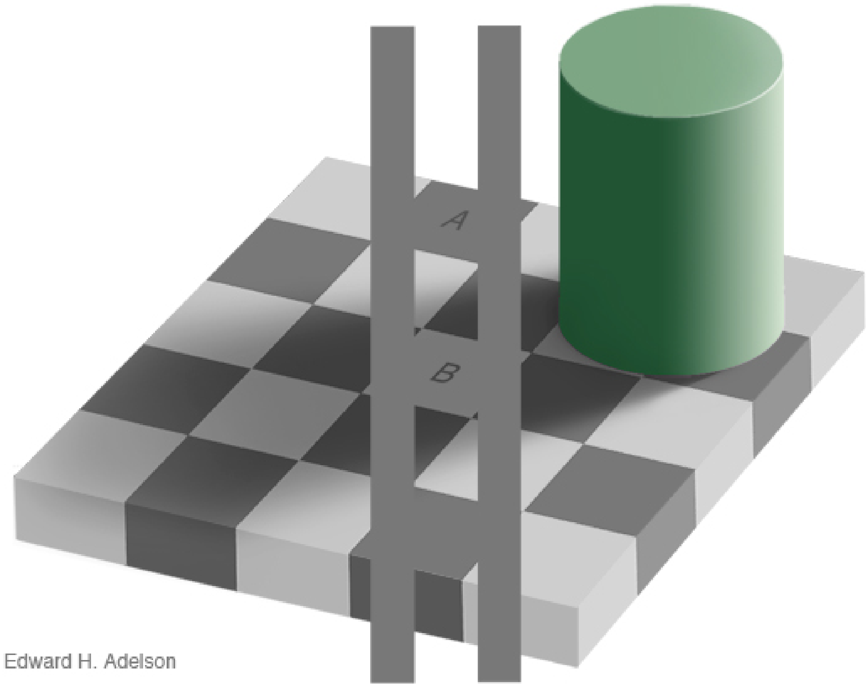
Stock, J. H. and Watson, M. W. (2006), *Introduction to Econometrics*, 2 edn, Addison Wesley.

von Hayek, F. A. (1972), *Die Theorie Komplexer Phänomene*, J.C.B. Mohr.

Woodward, J. (2016), Causation and Manipulability, *in* E. N. Zalta, ed., 'The Stanford Encyclopedia of Philosophy', winter 2016 edn, Metaphysics Research Lab, Stanford University.
URL: *https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/causation-mani/*

Appendix

Optische Täuschung



Quelle: Adelson, Edward H. (1995)
`http://web.mit.edu/persci/people/adelson/checkershadow_illusion.html`

Programmcode

R-Code zur Erzeugung der Abbildungen 10.12 und 10.13:

```
#################################
### Monte Carlo: Simultaneity ###
### Instrumental Variables    ###
#################################

library(AER) # for instrumental variables
rm(list = ls())
set.seed(1234567)

nobs = 50  # Observations
Rep <- 1000 # Replications for Monte Carlo

CoefMatrix <- matrix(c(-0.5, 1, 1, -1), nrow = 2, byrow = TRUE)
OLS_Coef <- vector(length = Rep)  # container
IV_Coef <- vector(length = Rep)

# function to generate data
```

```
genData <- function() {
  # create exogenous variables for all periods
  exogVar <- cbind(c_0 = 60 + runif(n = nobs, min = -30, max = +30),
                   Z = runif(n = nobs, min = +30, max = +80))
  # solve equation system for each period -> endog. Variables
  tmp <- apply(exogVar, MARGIN = 1, function(x) solve(CoefMatrix, x))
  endogVar <- t(as.matrix(tmp)) # transpose data matrix
  return(data.frame(Ys = endogVar[ ,1], Cs = endogVar[ ,2], Z = exogVar[, 2]))
}
# Monte Carlo
for (r in 1:Rep) {
  mydata <- genData() # generate variables, see above
  OLS_Coef[r] <- coef(lm(Cs ~ Ys, data = mydata))[2]
  IV_Coef[r]  <- coef(ivreg(Cs ~ Ys | Z, data = mydata))[2]
}

x11()
hist(IV_Coef, freq = FALSE, breaks = 30,
     main = "Histogram of estimated IV Slope Coef.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(IV_Coef), 3)),
     col = "grey", cex = 0.6)
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)


############################
### for 500 Observations ###
############################
nobs = 500  # Observations
OLS2_Coef <- vector(length = Rep)  # container
IV2_Coef <- vector(length = Rep)
for (r in 1:Rep) {
  mydata <- genData() # generate variables, see above
  OLS2_Coef[r] <- coef(lm(Cs ~ Ys, data = mydata))[2]
  IV2_Coef[r]  <- coef(ivreg(Cs ~ Ys | Z, data = mydata))[2]
}
# Graph
x11()
par(mfrow = c(2,2)) # 4 graphs (2x2)
hist(OLS_Coef, freq = FALSE, main = "OLS: 50 Obs.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(OLS_Coef), 3)),
     breaks = 30, col = "grey", cex = 0.6, xlim = c(0,1))
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)

hist(IV_Coef, freq = FALSE, main = "IV: 50 Obs.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(IV_Coef), 3)),
     breaks = 30, col = "gray", cex = 0.6, xlim = c(0,1))
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
```

```
hist(OLS2_Coef, freq = FALSE, main = "OLS: 500 Obs.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(OLS2_Coef), 3)),
     breaks = 30, col = "grey", cex = 0.6, xlim = c(0,1))
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)

hist(IV2_Coef, freq = FALSE, main = "IV: 500 Obs.",
     xlab = paste("True value = 0.5, mean = ", round(mean(IV2_Coef), 3)),
     breaks = 30, col = "gray", cex = 0.6, xlim = c(0,1))
abline(v = 0.5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)

# True Consumption Function and OLS Estimate
x11()
plot(mydata$Cs ~ mydata$Ys, cex=0.5, xlim=c(100, 400), ylim=c(50,300),
     main = "Consumption Function", xlab = "Income (Y)", ylab = "Consumption (c)")
abline(coef = c(60, 0.5), col = "red", lwd=2.5) # true
abline(lm(mydata$Cs ~ mydata$Ys), col="blue", lwd=2.5) # OLS
abline(coef = c(60+30, 0.5), col = "red", lty = 2) # restrictions
abline(coef = c(60-30, 0.5), col = "red", lty = 2)
abline(coef = c(-30, 1), col = "black", lty = 1)
abline(coef = c(-80, 1), col = "black", lty = 1)
```

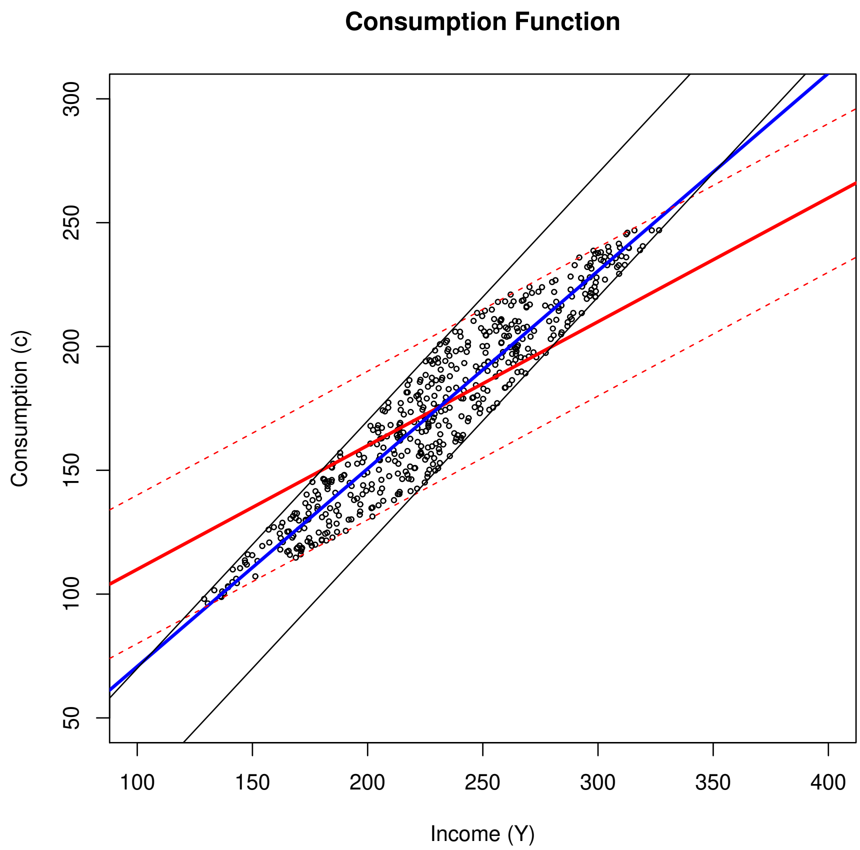


Abbildung 16: Endogenitätsbias bei Simultanität