

Anhang C

Matrixalgebra

In der Ökonometrie wie in vielen anderen Wissenschaften spielen lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle. Diese lassen sich mit Hilfe von Matrizen und Vektoren sehr viel einfach anschreiben und lösen.

C.1 Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen. Wenn die Matrix n Zeilen und k Spalten hat spricht man von einer n -Kreuz- k Matrix, geschrieben $(n \times k)$. Sie hat folgendes Aussehen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Man sagt auch, die Matrix \mathbf{A} hat die Ordnung (oder Dimension) $n \times k$. Die einzelnen Zahlen werden die *Elemente* der Matrix genannt. Jedes Element ist eindeutig durch die Zeile und Spalte definiert, in der es steht. Das Element a_{23} bezeichnet z.B. die Zahl in der 2. Zeile und 3. Spalte (die Reihenfolge ist immer zuerst Zeile dann Spalte).

Zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} sind gleich, wenn jedes Element gleich ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{wenn und nur wenn } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i \text{ und } j$$

C.2 Spezielle Matrizen

Eine Matrix mit nur einer Zeile (z.B. eine $1 \times k$ Matrix) wird **Zeilenvektor** genannt, eine Matrix mit nur einer Spalte (eine $n \times 1$ Matrix) wird **Spaltenvektor** genannt.

Eine **quadratische Matrix** hat gleich viele Zeilen wie Spalten.

⁰Zuletzt bearbeitet am 17. November 2011.

Die **Einheitsmatrix** der Ordnung n (\mathbf{I}_n) ist eine quadratische Matrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale und Nullen sonst, d.h. $a_{ii} = 1$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$, oder ausführlicher

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix \mathbf{I} spielt die Rolle der 1 im System der reellen Zahlen, denn für jede $n \times n$ Matrix \mathbf{A} gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Symmetrische Matrizen sind symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i und j . Symmetrisch können nur quadratische Matrizen sein.

Beispiele für symmetrische Matrizen sind:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente mit Ausnahme der Hauptdiagonale den Wert Null haben: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Eine **Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente über *oder* unter der Hauptdiagonale den Wert Null haben.

Notation: Es ist üblich Matrizen und Vektoren mit fettgedruckten Symbolen zu schreiben. Häufig werden Matrizen mit Großbuchstaben und Vektoren mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

C.3 Rechenregeln für Matrizen

C.3.1 Matrizenaddition:

Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} Matrizen der selben Dimension, dann ist $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

z.B.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizenaddition:

Für geeignet dimensionierte Matrizen gilt

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix ist, d.h. aus lauter Nullen besteht.
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. $(c_1 + c_2)\mathbf{A} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}$ (c_1 und c_2 sind Skalare)
6. $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$

C.3.2 Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})$$

z.B.

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

1. $(c_1 + c_2)\mathbf{A} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}$, mit c_1, c_2 reelle Zahlen.
2. $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$

C.3.3 Matrizenmultiplikation:

Sei \mathbf{A} der Dimension $(n \times k)$ und \mathbf{B} der Dimension $(k \times m)$, dann ist \mathbf{AB} eine Matrix der Dimension $(n \times m)$ mit

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

mit $i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k$

Um ein Element c_{ij} des Matrizenprodukts $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ zu erhalten multiplizieren wir jedes Element der i -ten Zeile von \mathbf{A} mit dem entsprechenden Element der j -ten Spalte von \mathbf{B} und addieren dann alle Produkte.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & \cdots & a_{ih} & \cdots & a_{ik}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nh} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{g1} & \cdots & b_{gj} & \cdots & b_{gm} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & \boxed{b_{kj}} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass das Matrizenprodukt \mathbf{AB} nur definiert ist, wenn die Anzahl der Spalten in \mathbf{A} gleich der Anzahl der Zeilen in \mathbf{B} ist.

$$\underbrace{(n \times k)}_{\text{Spalten in } \mathbf{A}} \underbrace{(k \times m)}_{\text{Zeilen in } \mathbf{B}}$$

Die Ordnung des resultierenden Matrizenprodukts ist gleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{A} Kreuz der Anzahl der Spalten von \mathbf{B} , d.h. $n \times m$.

Beispiel:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{2 \times 2} = \mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 22 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation:

Für geeignet dimensionierte Matrizen gilt

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (Assoziativgesetz)
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (linksseitiges Distributivgesetz)
3. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ (rechtsseitiges Distributivgesetz)

Achtung: das Kommutativgesetz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt im allgemeinen *nicht!!!* Deshalb muss bei Matrizen zwischen *Vor- und Nachmultiplikation* unterschieden werden.

Zum Beispiel:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

C.3.4 Die Transponierte einer Matrix

Die Transponierte einer Matrix \mathbf{A} , geschrieben \mathbf{A}' , erhält man durch Austauschen von Zeilen und Spalten, z.B.

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}'_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} ist symmetrisch wenn und nur wenn gilt $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Beispiele:

Sei $\boldsymbol{\varepsilon}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor

$$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'$ wird auch das **äußere Produkt** des Spaltenvektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ genannt.

Sei $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \cdots \quad \hat{\varepsilon}_n) \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \hat{\varepsilon}_1^2 + \hat{\varepsilon}_2^2 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$$

Die Quadratsumme $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist natürlich ein Skalar wird auch das **innere Produkt** des Spaltenvektors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ genannt.

Rechenregeln für Transponierte:

für geeignet dimensionierte Matrizen gilt:

1. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
3. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$, bzw. $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$
4. $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$ (mit $\mathbf{I} \dots$ Einheitsmatrix)
5. $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}'$ (wenn λ ein Skalar; außerdem: $\lambda' = \lambda$)

Wenn \mathbf{X} eine $n \times k$ Matrix ist, dann ist $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ immer eine symmetrische Matrix der Dimension $k \times k$.

C.4 Die geometrische Darstellung von Vektoren

Bisher haben wir Vektoren als spezielle Matrizen betrachtet, die entweder nur aus einer Spalte (Spaltenvektoren) oder nur aus einer Zeile (Zeilenvektoren) bestehen.

In der Geometrie versteht man unter einem **Vektor** eine Menge von Pfeilen mit der Eigenschaft Länge (Betrag) und Richtung. Alle gleich langen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile gehören zum selben Vektor. Ein **Skalar** ist im Gegensatz dazu eine ungerichtete Größe (d.h. eine Zahl).

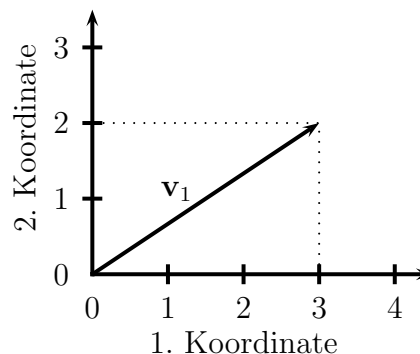
In der linearen Algebra sind Vektoren definiert als Elemente eines Vektorraums. Ein **Vektorraum** besteht aus einzelnen Vektoren, die addiert oder mit einer skalaren Zahl multipliziert werden können, so dass das Ergebnis jeweils wieder ein Vektor desselben Vektorraums ist.

Vektoren können als Koordinaten eines Punktes im Euklidischen Raum¹ dargestellt werden, wobei der Vektor als Pfeil vom Ursprung zu diesem Punkt gezeichnet wird.

Ein anschaulicher Vektorraum ist die 2-dimensionale Euklidische Ebene \mathbb{R}^2 , in der Vektoren als Pfeile dargestellt werden können. Die reellen Zahlen sind Skalare.

Nebenstehende Abbildung zeigt zum Beispiel den Vektor

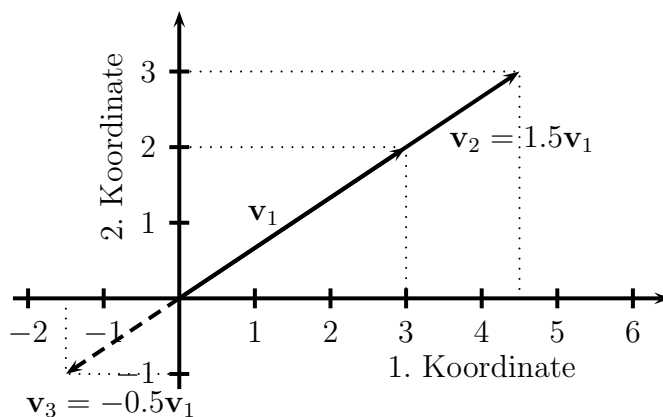
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Vektoren können mit beliebigen Zahlen multipliziert werden.

Untenstehende Abbildung zeigt ein Beispiel

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = 1.5\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = -0.5\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

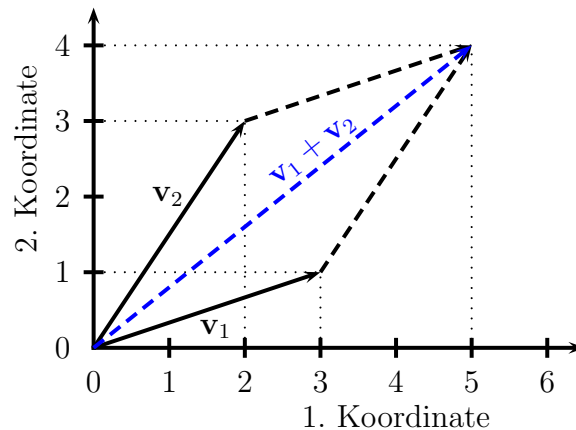


¹“Der Begriff Euklidischer Raum (nach Euklid von Alexandria) bezeichnet einen reellen Vektorraum mit einem Skalarprodukt, so dass man Längen und Winkel messen kann. In der Regel wird er für endlichdimensionale Räume, insbesondere für die Räume \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt verwendet. Der Spezialfall \mathbb{R}^2 wird auch Euklidische Ebene genannt.” (Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Raum)

Wenn ein Vektor mit einem Skalar größer als Eins multipliziert wird ist der dadurch entstehende Vektor ‘länger’, aber er hat die gleiche Richtung. Wird er mit einer Zahl kleiner als Eins multipliziert ist der Vektor ‘kürzer’. Wird der Vektor mit einer negativen Zahl multipliziert dreht sich die Richtung um.

Vektoren können auch addiert werden. Dazu wird ein Vektor an das Ende des anderen verschoben. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Natürlich können Vektoren auch subtrahiert werden. Man kann sich dies zweistufig vorstellen, zuerst wird der zu subtrahierende Vektor mit -1 multipliziert und anschließend addiert.

Eine **Basis eines Vektorraums** ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten zu beschreiben. Dadurch wird das Rechnen in Vektorräumen erleichtert. Die Anzahl der Basisvektoren wird **Dimension des Vektorraums** genannt.

C.4.1 Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist *linear abhängig*, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Umgekehrt, eine Menge von Vektoren ist linear *unabhängig* wenn und nur wenn gilt, dass die einzige Lösung der Gleichung

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ist

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Das bedeutet, dass sich kein Vektor der Menge als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen lässt. Die Basisvektoren eines Vektorraums müssen linear unabhängig sein.

C.4.2 Länge (bzw. Betrag oder Norm) eines Vektors

Nach dem Satz von Pythagoras ist in allen ebenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates, d.h. $c^2 = a^2 + b^2$. Daraus folgt die Länge der Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Entsprechend dazu ist die Länge (bzw. Betrag oder Norm) eines Vektors (geschrieben $\|\mathbf{v}\|$) definiert

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_i v_i^2} = \sqrt{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$$

C.4.3 Orthogonalität

Zwei von Null verschiedene Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 sind **orthogonal** (geschrieben $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$) wenn und nur wenn gilt

$$\mathbf{v}_1' \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' \mathbf{v}_1 = 0$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, also einen rechten Winkel einschließen.

Cosinus Gesetz:² Für den Winkel α , den zwei Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 einschließen, gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}_1' \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}$$

Der Kosinus von 90 Grad ist Null und der Kosinus von 0 Grad ist Eins, deshalb sind bei $\cos(\alpha) = 0$ die Vektoren orthogonal, und wenn $\cos(\alpha) = 1$ liegen die Vektoren 'aufeinander' (bzw. parallel).

Wenn die Vektoren zentriert sind (d.h. der Mittelwert von den Elementen abgezogen wurde), dann ist $\cos(\alpha)$ auch der *Korrelationskoeffizient* zwischen den Variablen.

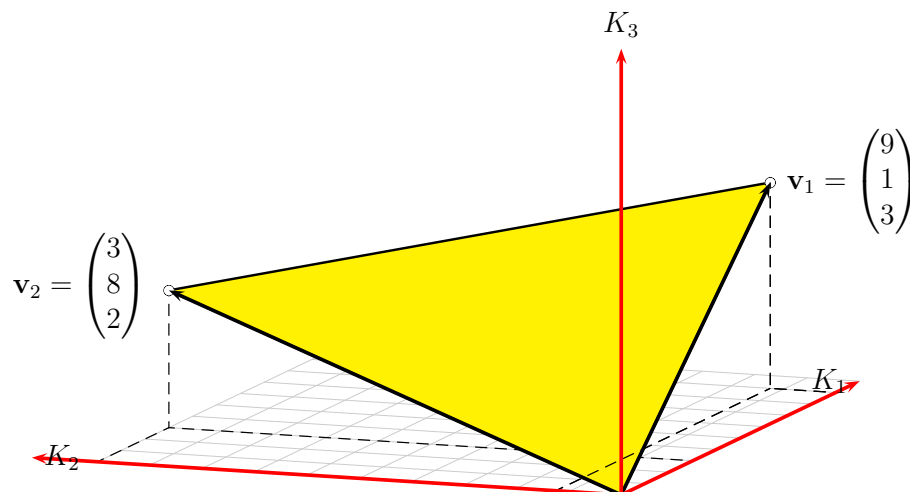
C.4.4 Unterräume (*subspaces*) des Euklidischen Raums E^n

Wie schon erwähnt können die n Elemente eines $n \times 1$ Vektors \mathbf{v} auch als Koordinaten eines Punktes im euklidischen Raum E^n dargestellt werden.

Ein *Unterraum* (*subspace*) von E^n hat eine niedrigere Dimension als n und wird von sogenannten *Basisvektoren* aufgespannt.

Die folgende Abbildung zeigt einen 2-dimensionalen Unterraum von E^3 (d.h. der Unterraum ist eine Ebene im 3-dimensionalen Raum), der durch die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 aufgespannt wird

²Der Kosinus eines Winkels ist das Verhältnis von Ankathete (die dem Winkel 'anliegende' Kathete) zur Hypotenuse.



C.5 Determinante einer Matrix

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine Funktion der Matrix, die nach einer eindeutigen Vorschrift berechnet wird und der Matrix einen Skalar zuordnet. Die Determinante der Matrix \mathbf{A} wird mit $|\mathbf{A}|$ bezeichnet.

Geometrisch kann man sich den Absolutbetrag der Determinante einer 2×2 Matrix als die *Fläche* eines Parallelogramms vorstellen, das durch die zwei Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird. Analog ist der Absolutbetrag der Determinante einer 3×3 Matrix das Volumen eines Parallelepipeds (3-dimensionales Analogon zum Parallelogramm), das durch diese Vektoren aufgespannt wird.

Die Determinante einer 2×2 Matrix wird berechnet, indem das Produkt der Hauptdiagonalelemente gebildet wird, und davon das Produkt der Nebendiagonalelemente subtrahiert wird

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = [5 \times (-2)] - [1 \times 4] = -14$$

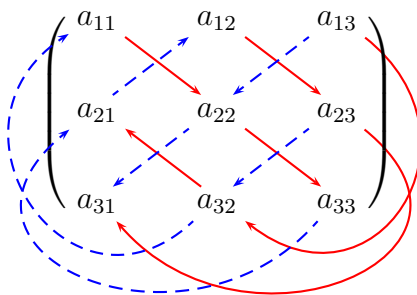
Man kann überprüfen, dass die Fläche des Parallelogramms, das im Beispiel Vektoraddition auf Seite 7 von den Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, gleich dem Wert der folgenden Determinante ist

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

Die Determinante einer 3×3 Matrix kann nach einem ähnlichen Muster berechnet werden, das durch folgende Abbildung veranschaulicht wird:



$$|\mathbf{D}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Dies gilt nur für 3×3 Matrizen und ist *nicht* verallgemeinerbar auf Matrizen höherer Ordnung!

Laplace Expansion

Determinanten von Matrizen höherer Ordnung können mit Hilfe des **Laplaceschen Entwicklungssatzes** berechnet werden. Dazu definieren wir zuerst Minoren und Cofaktoren einer Matrix.

Minoren Der Minor \mathbf{M}_{ij} einer quadratischen Matrix \mathbf{A} ist die Determinante einer quadratischen Untermatrix, die durch Streichen von Zeile i und Spalte j entsteht.

Beispiel: Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sind die Minoren

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

$$|\mathbf{M}_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{M}_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{M}_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Cofaktoren Aus den Minoren $|\mathbf{M}_{ij}|$ erhält man die Cofaktoren $|\mathbf{C}_{ij}|$, indem die Vorzeichen der Minoren nach einer bestimmten Regel geändert werden. Nach dieser Regel wird das Vorzeichen eines Minors geändert, wenn die Summe aus Zeilen- und Spaltenindex eine ungerade Zahl ist, und das Vorzeichen des Minors bleibt unverändert, wenn die Summe aus Zeilen- und Spaltenindex eine gerade Zahl ist.

$$|\mathbf{C}_{ij}| = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|$$

da $(-1)^{i+j} = 1$ wenn $i + j$ eine gerade Zahl ist, und $(-1)^{i+j} = -1$ wenn $i + j$ eine ungerade Zahl ist. Daraus ergibt sich ein typisches Schachbrettmuster der Vorzeichenänderungen.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Beispiel Die Matrix der Minoren \mathbf{M} einer Matrix \mathbf{A} sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ 3 & -7 & -57 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix mit den Cofaktoren erhält man durch die Beachtung der Vorzeichenänderungen

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} +0 & -0 & -27 \\ -3 & -7 & +57 \\ -3 & +2 & +3 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel ist $\mathbf{M}_{32} = -2$, deshalb ist $\mathbf{C}_{32} = +2$, denn $(-1)^{3+2} = -1$.

Adjunkte Matrix Als adjunkte Matrix bezeichnet man die transponierte Matrix der Cofaktoren (also die Transponierte der vorzeichenbehafteten Minoren).

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}'$$

Diese werden wir später für die Berechnung der *inversen Matrix* benötigen.

Der **Laplacesche Entwicklungssatz** besagt, dass man den Wert einer Determinante erhält, indem man eine Matrix "nach einer Zeile oder Spalte zu entwickelt". Dazu werden die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte mit den dazugehörigen Cofaktoren multipliziert und die Produkte aufsummiert.

Eine Entwicklung nach der ersten Zeile einer 3×3 Matrix gibt

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{C}_{11}| + a_{12}|\mathbf{C}_{12}| + a_{13}|\mathbf{C}_{13}| = \sum_{j=1}^3 a_{1j}|\mathbf{C}_{1j}|$$

Genaugut kann man sie z.B. nach der dritten Spalte entwickeln

$$|\mathbf{A}| = a_{13}|\mathbf{C}_{13}| + a_{23}|\mathbf{C}_{23}| + a_{33}|\mathbf{C}_{33}| = \sum_{i=1}^3 a_{i3}|\mathbf{C}_{i3}|$$

Dies gilt für Matrizen beliebiger hoher Ordnung. Indem man diese Operation wiederholt anwendet kann man die Determinante jeder Matrix damit berechnen, denn bei jedem ‘Durchgang’ wird die Ordnung der zu bestimmenden Determinante um Eins reduziert, bis man schließlich nur noch die Determinanten von 2×2 Matrizen berechnen muss.

Beispiel Wir haben vorhin die Cofaktoren der Matrix \mathbf{A} berechnet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ -3 & -7 & 57 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung nach der ersten Zeile gibt

$$|\mathbf{A}| = 5 \times 0 + 6 \times 0 - 1 \times 27 = -27$$

die Entwicklung nach der 2. Spalte gibt ebenso

$$|\mathbf{A}| = 6 \times 0 + 3 \times (-7) - 3 \times 2 = -27$$

Diese Methode ist insbesondere nützlich, wenn eine Matrix in einer Zeile oder Spalte viele Nullen enthält. In diesem Beispiel hat die dritte Spalte zwei Nullen, deshalb kann die Determinante besonders einfach berechnet werden, indem die Matrix nach der 3. Spalte entwickelt wird

$$|\mathbf{A}| = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-27) = -27$$

Lineare Abhängigkeit

Determinanten haben v.a. eine wichtige Eigenschaft: **Der Wert einer Determinante ist immer Null, wenn zwischen den Zeilen oder Spalten der Matrix eine lineare Abhängigkeit existiert.**

Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} &= 6 \times 3 \times 6 + 8 \times 5 \times 4 + 2 \times 7 \times 1 - \\ &\quad - 2 \times 3 \times 4 - 5 \times 7 \times 6 - 6 \times 1 \times 8 \\ &= 108 + 160 + 14 - 24 - 210 - 48 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Man beachte, dass die 3. Zeile der Matrix gleich $[0.5 \times \text{erste Zeile} + \text{zweite Zeile}]$ ist, also gibt es innerhalb der Zeilen eine lineare Abhängigkeit, weshalb der Wert der Determinante Null ist.

Im folgenden Beispiel ist die zweite Spalte das Doppelte der ersten Spalte, weshalb die Determinante wieder den Wert Null hat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Ein Matrix, deren Determinante den Wert Null hat, heißt **singuläre Matrix**.

Rechenregeln für Determinanten:

Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix \mathbf{A} mit der Determinante $|\mathbf{A}|$. Dann gilt:

1. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$, wobei \mathbf{A}' die Transponierte von \mathbf{A} ist.
2. Wenn alle Elemente einer Zeile oder Spalte gleich Null sind, dann ist $|\mathbf{A}| = 0$.
3. Wenn (mindestens) zwei der Zeilen (oder Spalten) von \mathbf{A} proportional (d.h. linear abhängig) sind, dann ist der Wert der Determinante Null ($|\mathbf{A}| = 0$).
4. Wenn zwei Spalten (oder Zeilen) von \mathbf{A} vertauscht werden wechselt die Determinante das Vorzeichen, der Absolutwert bleibt gleich.
5. Wenn das Vielfache einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) von \mathbf{A} addiert wird, bleibt der Wert der Determinante $|\mathbf{A}|$ unverändert.
6. Wenn alle Elemente in einer einzelnen Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl c multipliziert werden, wird die Determinante mit c multipliziert.
7. Wenn \mathbf{A} eine $n \times n$ Matrix und c eine reelle Zahl ist, dann gilt $|c\mathbf{A}| = c^n |\mathbf{A}|$.
8. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

Achtung: Gewöhnlich ist die Determinante einer Summe nicht die Summe der Determinanten

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

C.6 Inverse einer Matrix

Wenn c eine reelle Zahl ungleich Null ist, dann existiert eine eindeutige Zahl c^{-1} mit der Eigenschaft $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$. Man nennt c^{-1} die (multiplikative) Inverse von c . Das Matrizen-Äquivalent dazu ist die Inverse einer Matrix.

Eine quadratische $k \times k$ Matrix \mathbf{A} hat eine Inverse \mathbf{A}^{-1} wenn gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$$

Berechnung der inversen Matrix für eine 2×2 Matrix \mathbf{A} :

Wir suchen eine Matrix \mathbf{B} die die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ erfüllt, bzw. ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser vier Gleichungen nach den Elementen von \mathbf{B} ist

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

Der Kehrwert der Determinante $|\mathbf{A}|$ in \mathbf{A}^{-1} ist kein Zufall, sondern erscheint auch bei der Inversen von Matrizen höherer Ordnung!

Deshalb existiert die Inverse einer quadratischen Matrix nur, wenn die Matrix nicht singulär ist, oder in anderen Worten, eine Matrix ist nichtsingulär wenn und nur wenn die Inverse existiert.

Am einfachsten ist die Inverse einer Diagonalmatrix zu berechnen. Wenn

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{kk}} \end{pmatrix}$$

Allgemein kann die Inverse einer quadratischen Matrix mit Hilfe der Determinante und der adjunkten Matrix berechnet werden.

Es gilt nämlich

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj}(\mathbf{A})}$$

Wir erinnern uns: die adjunkte Matrix ist die transponierte Matrix der Cofaktoren, und die Cofaktoren sind die vorzeichenbehafteten Minoren.

Beispiel Wir haben auf Seite 11 die folgenden Kofaktoren der Matrix \mathbf{A} berechnet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ -3 & -7 & 57 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von \mathbf{A} ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ -27 & 57 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverse von Matrizen höherer Ordnung sind im allgemeinen etwas schwer per Hand zu berechnen, dies ist eine Domäne der Computer. Wichtig ist allerdings die Rechenregeln für Inverse zu beherrschen.

Rechenregeln für Inverse:

Die Inverse einer quadratischen Matrix \mathbf{A} wird geschrieben als \mathbf{A}^{-1} und erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{mit } \mathbf{I} \dots \text{Einheitsmatrix})$$

Seien \mathbf{A} und \mathbf{B} invertierbare quadratische Matrizen, dann gilt

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$
3. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ wenn beide Inversen existieren.
4. $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
5. $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$

C.7 Lineare Gleichungssysteme

C.7.1 Nicht homogene Gleichungssysteme

Sei \mathbf{A} eine $n \times k$ Matrix, \mathbf{x} ein $k \times 1$ Spaltenvektor mit den Unbekannten und \mathbf{c} ein $n \times 1$ Spaltenvektor mit Konstanten dann definiert

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

ein System linearer Gleichungen, denn wie man einfach sehen kann ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

gleich

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + &= c_n \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{A} wird in diesem Zusammenhang häufig *Koeffizientenmatrix* genannt. Mit Hilfe der Inversen kann dieses System einfach nach den unbekanntem \mathbf{x} gelöst werden, indem das Gleichungssystem mit der Inversen \mathbf{A}^{-1} vormultipliziert wird

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \\ \mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \end{aligned}$$

Beispiel: Folgendes Gleichungssystem sei mit Hilfe der Matrixalgebra zu lösen:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann in Matrixform folgendermaßen geschrieben werden $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ bzw. ausführlicher

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Inverse der Matrix \mathbf{A} (beachte: die Determinante eines Skalars ist der Skalar selbst)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & +1 \\ -2 & +5 \end{pmatrix}; \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ +1 & +5 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = -13$$

Die Inverse der Matrix \mathbf{A} ist also

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} + \frac{12}{13} \\ -\frac{4}{13} - \frac{30}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ -\frac{34}{13} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung kann man überprüfen, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

C.7.2 Homogene Gleichungssysteme

Homogene Gleichungssysteme spielen in der Ökonometrie eine wichtige Rolle. Sie haben die Form

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

und haben nur eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ wenn die Matrix \mathbf{A} singular ist, d.h. nicht vollen Rang hat.

C.8 Rang einer Matrix (*rank*, rk)

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten) einer Matrix, oder die Dimension der größten Submatrix, deren Determinante ungleich Null ist.

Die Determinante einer Matrix ist dann und nur dann ungleich Null, wenn die Matrix *vollen Rang* hat.

Es gilt

1. $\text{rk}(\mathbf{A}') = \text{rk}(\mathbf{A})$
2. Wenn \mathbf{A} ist $n \times k$ dann ist $\text{rk}(\mathbf{A}) \leq \min(n, k)$
3. Wenn \mathbf{A} ist $k \times k$ und $\text{rk}(\mathbf{A}) = k$, dann ist \mathbf{A} nichtsingulär.

C.9 Spur einer Matrix (*trace*, tr)

Die Spur einer quadratischen $k \times k$ Matrix ist die Summe der Hauptdiagonalelemente

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{h=1}^k a_{hh}$$

Es gilt:

1. $\text{tr}(c\mathbf{A}) = c(\text{tr}(\mathbf{A}))$
2. $\text{tr}(\mathbf{A}') = \text{tr}(\mathbf{A})$
3. $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
4. $\text{tr}(\mathbf{I}_k) = k$
5. $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$
6. $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$

C.10 Idempotente Matrizen

Sei \mathbf{A} eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist \mathbf{A} idempotent wenn und nur wenn gilt $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Die folgende Matrix ist ein Beispiel für eine idempotente 3×3 Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für eine idempotente Matrix \mathbf{A} gilt

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$$

d.h. der Rang einer idempotenten Matrix ist gleich ihrer Spur.

Zwei in der Ökonometrie wichtige idempotente Matrizen sind

$$\mathbf{P} := \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{M} := \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{I}_n - \mathbf{P}$$

Wenn \mathbf{X} die Ordnung $n \times k$ hat ist der Rang von \mathbf{P} gleich k , weil

$$\text{tr}(\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \text{tr}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{I}_k) = k$$

Daraus folgt weiter, dass der Rang von \mathbf{M} gleich $n - k$ ist

$$\text{tr}(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbf{I}_n) - \text{tr}(\mathbf{P}) = n - k$$

C.11 Matrixfunktionen in Excel

Excel hat mehrere Matrixfunktionen, deren Eingabe allerdings etwas umständlich ist. Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. markieren Sie den Ausgabebereich in der richtigen Dimension (wenn Sie z.B. eine 2×5 mit einer 5×3 Matrix multiplizieren hat die Ergebnismatrix die Dimension 2×3 , Sie müssen also 2 Zeilen und 3 Spalten markieren),
2. geben Sie in den markierten Bereich die gewünschte Matrixfunktion ein (s.u.),
3. schließen Sie mit der Tastenkombination <UMSCHALT>+<STRG>+<EINGABE> ab.

Verfügbare Matrixfunktionen sind

MTRANS(*Matrix*) ... Transponierte der Matrix
 MMULT(*M1*;*M2*) ... Matrizenmultiplikation
 MDET(*Matrix*) ... Determinante der Matrix
 MINV(*Matrix*) ... Inverse der Matrix

Beispiel: Um eine 3×3 Matrix im Zellbereich (A1:C3) zu invertieren markiert man einen 3×3 Ausgabebereich, z.B. (E1:G3), gibt =MINV(A1:C3) ein und schickt dies mit der Tastenkombination UMSCHALT+STRG+EINGABE ab.

Matrixfunktionen können auch geschachtelt werden. Um z.B. ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten zu lösen, in dem die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} im Zellbereich (A1:C3) und der Vektor der Konstanten \mathbf{c} im Zellbereich (E1:E3) steht, markiert man einen 1×3 Ausgabebereich, gibt für $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ in Excel =MMULT(MINV(A1:C3);E1:E3) ein und bestätigt mit <UMSCHALT>+<STRG>+<EINGABE>.