universität
innsbruck

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen: Asymptotik

Grundlagen der Ökonometrie

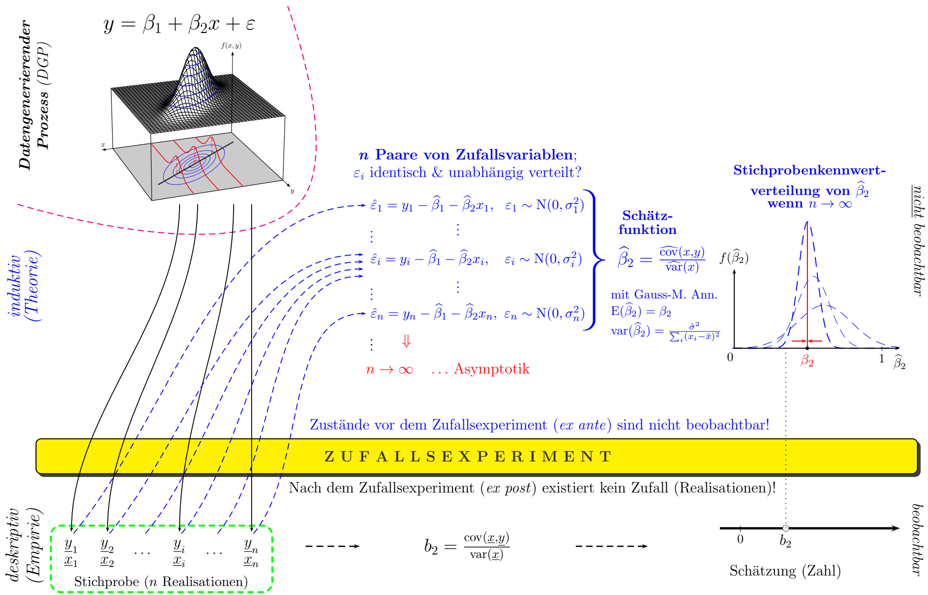
herbert.stocker@uibk.ac.at

www.hsto.info/econometrics

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Bisher: Verteilung der Stichprobenkennwertverteilung spielte keine Rolle, wir interessierten uns nur für deren ersten beiden Momente (Erwartungswert und Varianz)!
- Erwartungstreue & Effizienz: Beweise sind unabhängig von Stichprobengröße n!
- Diese Beweise erfordern strenge Annahmen, in komplexeren Fällen können Erwartungstreue & Effizienz häufig nicht bewiesen werden!
- $\Rightarrow$ Asymptotik!

Stochastische Regressionsanalyse: Asymptotik



Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotik: z.B. für arithm. Mittel μ

Folge von Schätzfunktionen $\{\hat{\mu}_n\}$, wenn sequentiell eine weitere Beobachtung dazukommt:

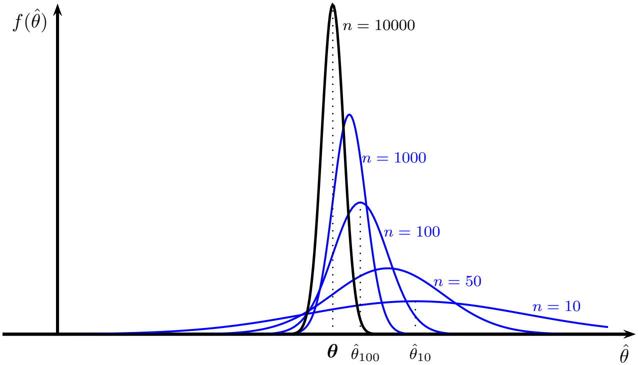
$$\{\hat{\mu}_n\} = \left\{x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right\}$$

Wie entwickelt sich diese Folge, wenn $n \to \infty$?

$\Rightarrow$ Asymptotik!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz:



Konsistente Schätzfunktionen *können* in kleinen Stichproben verzerrt sein, konvergieren aber mit steigendem Stichprobenumfang ($n \to \infty$) der Wahrscheinlichkeit nach gegen den wahren Wert θ.

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Definition:

Konsistenz

Wenn θ ein Parameter des DGP und $\hat{\theta}_n$ entsprechende Schätzfunktion für Stichprobe der Größe n, dann ist $\hat{\theta}_n$ eine *konsistente* Schätzfunktion für θ wenn für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta\right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

$\Rightarrow$ die Wahrscheinlichkeit, dass mit $n \to \infty$ der Absolutbetrag der Differenz zwischen $\hat{\theta}_n$ und θ kleiner als *eine beliebig kleine Zahl* $\delta > 0$ wird, konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen 1.

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem 'Gesetz der Großen Zahl'
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).
- wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich geht konvergiert die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Erfolge im Intervall $(|\hat{\theta}_n - \theta| - \delta),\ (|\hat{\theta}_n - \theta| + \delta)$ liegt, für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gegen Eins, und dass es außerhalb liegt, gegen Null!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).
- wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich geht konvergiert die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Erfolge im Intervall $(|\hat{\theta}_n - \theta| - \delta),\ (|\hat{\theta}_n - \theta| + \delta)$ liegt, für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gegen Eins, und dass es außerhalb liegt, gegen Null!
- Annahmen: variieren nach Gesetz; ziemlich sicher für $\mathrm{i.i.d.}$ verteilte ZV

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).
- wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich geht konvergiert die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Erfolge im Intervall $(|\hat{\theta}_n - \theta| - \delta),\ (|\hat{\theta}_n - \theta| + \delta)$ liegt, für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gegen Eins, und dass es außerhalb liegt, gegen Null!
- Annahmen: variieren nach Gesetz; ziemlich sicher für $\mathrm{i.i.d.}$ verteilte ZV
- Achtung: Annäherung ist nicht monoton! (Ausreißer immer möglich)

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

- Konsistente Schätzfunktionen folgen einem ‘Gesetz der Großen Zahl’
- **Gesetze der Großen Zahl:** mathematische Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie;
  $\Rightarrow$ unter welchen Umständen/Annahmen konvergiert eine Folge von Zufallsvariablen gegen eine Konstante (z.B. Erwartungswert der ZV).
- wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich geht konvergiert die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Erfolge im Intervall $(|\hat{\theta}_n - \theta| - \delta),\ (|\hat{\theta}_n - \theta| + \delta)$ liegt, für jedes noch so kleine $\delta > 0$ gegen Eins, und dass es außerhalb liegt, gegen Null!
- Annahmen: variieren nach Gesetz; ziemlich sicher für $\mathrm{i.i.d.}$ verteilte ZV
- Achtung: Annäherung ist nicht monoton! (Ausreißer immer möglich)
- *Beweis:* Chebychevs Ungleichung (s. Skript)

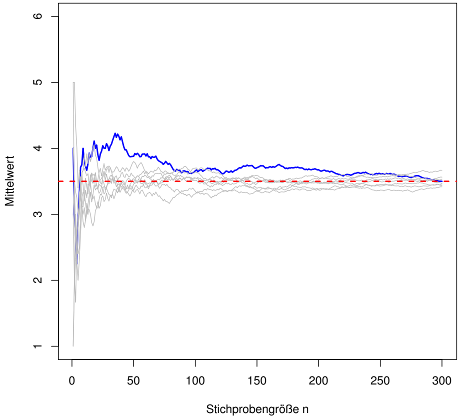
Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Beispiel Mittelwert der Augenzahl beim Würfeln (i.i.d.)

```
n <- 300; i <- 1:n
means <- cumsum(sample(x = 1:6, size = n, replace = TRUE))/i
```

z.B.

i	1	2	3	4	5	...
X	4	2	2	1	6	...
cumsum(X)	4	6	8	9	15	...
means	4.00	3.00	2.67	2.25	3.00	...



Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Schreibweisen

- Definition:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta\right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Schreibweisen

- Definition:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta\right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

- Kurzschreibweise 1: *'convergence in probability'*

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Konsistenz: Schreibweisen

- Definition:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \delta\right] = 1 \qquad \text{mit } \delta > 0$$

- Kurzschreibweise 1: *'convergence in probability'*

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

- Kurzschreibweise 2: *'probability limit'*

$$\operatorname{plim} \hat{\theta}_n = \theta$$

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Rechnen mit 'probability-limits':

Für $\hat{\theta}_n$ und $\widehat{\vartheta}_n$ ZV mit $\operatorname{plim}\hat{\theta}_n = \theta$ und $\operatorname{plim}\widehat{\vartheta}_n = \vartheta$ (θ: *theta* und ϑ: *vartheta*)

1. Für Konstante c: $\operatorname{plim} c = c$
2. $\operatorname{plim}(\hat{\theta}_n + \widehat{\vartheta}_n) = \operatorname{plim}\hat{\theta}_n + \operatorname{plim}\widehat{\vartheta}_n = \theta + \vartheta$
3. $\operatorname{plim}(\hat{\theta}_n \widehat{\vartheta}_n) = \operatorname{plim}\hat{\theta}_n \ \operatorname{plim}\widehat{\vartheta}_n = \theta\vartheta$
4. $$\operatorname{plim}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\widehat{\vartheta}_n}\right) = \frac{\operatorname{plim}\hat{\theta}_n}{\operatorname{plim}\widehat{\vartheta}_n} = \frac{\theta}{\vartheta} \qquad (\text{für } \vartheta \neq 0)$$
5. Wenn $\hat{\theta}$ eine konsistente Schätzfunktion für θ und $h(\hat{\theta})$ eine stetige Funktion von $\hat{\theta}$ gilt
$$\operatorname{plim} h(\hat{\theta}) = h(\theta)$$

(3), (4) & (5) gelten nicht für Erwartungswertoperator $\Rightarrow$ plim Beweise einfacher!

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotische Normalverteilung

Asymptotische Normalverteilung

Eine Schätzfunktion ist *asymptotisch normalverteilt*, wenn deren normierte Stichprobenkennwertverteilung mit zunehmender Stichprobengröße gegen die Normalverteilung konvergiert.

Dahinterliegendes Konzept: *Konvergenz hinsichtlich der Verteilung* (*'Convergence in Distribution'*):

$\Rightarrow$ die Verteilung einer Folge von Schätzfunktionen $\hat{\theta}_n$ konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang konvergiert unabhängig von der Verteilung des DGP gegen die Normalverteilung!
$\Rightarrow$ Zentrale Grenzwertsätze

Eigenschaften von OLS Schätzfunktionen

Asymptotische Normalverteilung: *'Convergence in Distribution'*

z.B. für arithmetisches Mittel $\hat{\theta}$ einer Folge von ZV x_i mit $x_i \sim \mathrm{i.i.d.}(\theta, \sigma^2)$ und $0 < \sigma^2 < \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left\{ \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma} \leq y \right\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-z^2/2} dz$$

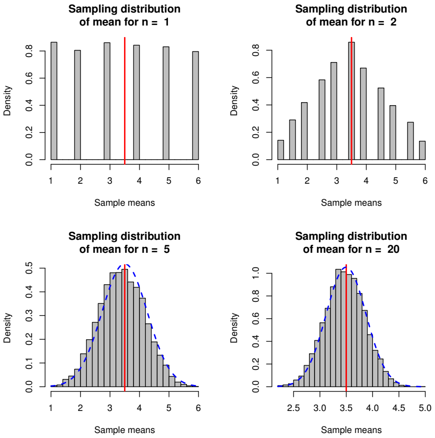
alternative Schreibweise

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

d.h. wenn $x_i \sim \mathrm{i.i.d.}(\theta, \sigma^2)$ und $0 < \sigma^2 < \infty$, dann konvergiert die Verteilung von $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ gegen die Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz σ^2

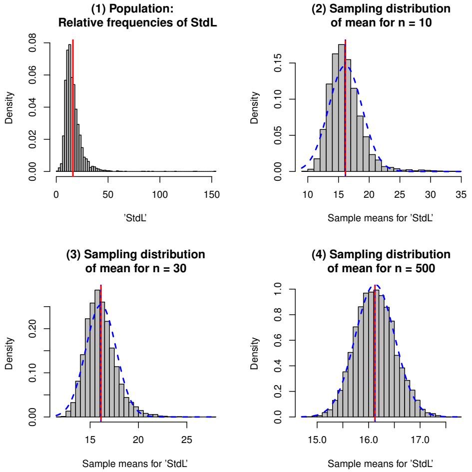
Asymptotische Normalverteilung

Beispiel 1: Würfeln, Vertlg. der Mittelw., je 10 000 Stichproben mit $n = 1, 2, 5, 20$



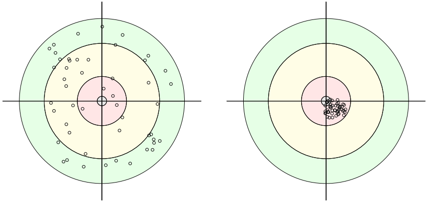
Asymptotische Normalverteilung

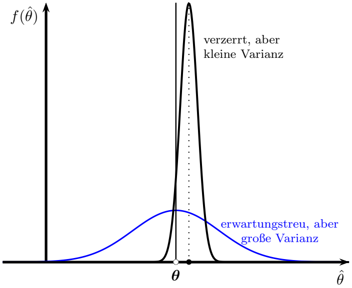
Beispiel 2: Stundenlöhne (EU-Silc AUT, 2015), Grundgesamtheit und Mittelwerte von je 10 000 Stichproben mit $n = 10, 30, 500$



Mean Square Error

Trade off zwischen Bias und Varianz:



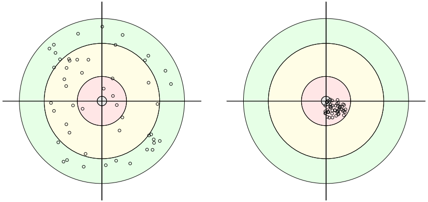


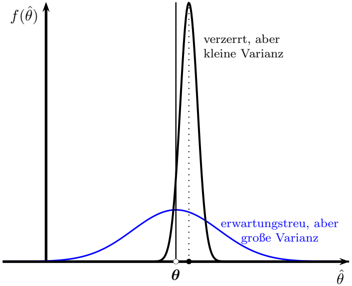
Mean Square Error: (siehe Skript)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathrm{E}(\hat{\theta}-\theta)^2 \\
&= \mathrm{E}[\hat{\theta}-\mathrm{E}(\hat{\theta})]^2 + [\mathrm{E}(\hat{\theta})-\theta]^2 \\
&= \mathrm{var}(\hat{\theta}) + [\mathsf{Bias}(\hat{\theta})]^2
\end{aligned}
$$

Mean Square Error

Trade off zwischen Bias und Varianz:





Mean Square Error: (siehe Skript)

$$\begin{aligned} \mathsf{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathrm{E}(\hat{\theta}-\theta)^2 \\ &= \mathrm{E}[\hat{\theta}-\mathrm{E}(\hat{\theta})]^2 + [\mathrm{E}(\hat{\theta})-\theta]^2 \\ &= \mathrm{var}(\hat{\theta}) + [\mathsf{Bias}(\hat{\theta})]^2 \end{aligned}$$

Thanx . . .