universität
innsbruck

Stochastische Regressionsanalyse für stetige ZV

Grundlagen der Ökonometrie

herbert.stocker@uibk.ac.at

www.hsto.info/econometrics

Stetige Zufallsvariablen (ZV)

Wiederholung:

- Univariate Dichtefunktion: (ZV y)

$$f(y) \qquad \text{mit} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$$

- Dichte und Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr(a < y < b) = \int_a^b f(y) dy \qquad \text{mit } \Pr(y = \underline{y}) = 0!$$

Stetige Zufallsvariablen (ZV)

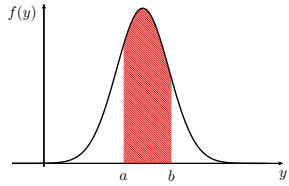
Wiederholung:

- Univariate Dichtefunktion: (ZV y)

$$f(y) \qquad \text{mit} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$$

- Dichte und Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr(a < y < b) = \int_a^b f(y) dy \qquad \text{mit } \Pr(y = \underline{y}) = 0!$$

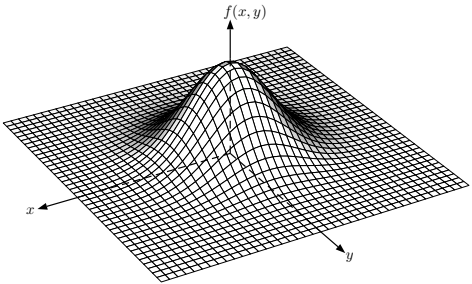


Stetige Zufallsvariablen

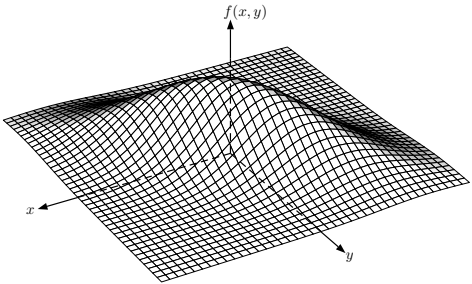
Wiederholung:

- Bivariate Dichtefunktion: (Zufallsvariablen y, x)

$$f(y,x) \qquad \text{mit} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,x)\, dy\, dx = 1$$



$\text{corr}(x,y) = 0$



$\text{corr}(x,y) = -0.7$

Stetige Zufallsvariablen

Wiederholung: Stetige ZV

- Randdichte: sei $f(y, x)$ eine gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen y und x, dann ist die Randdichte

$$f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y, x)\, dx$$

- (unbedingter) Erwartungswert:

$$\mathrm{E}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y)\, dy$$

Stetige Zufallsvariablen

Wiederholung: Stetige ZV

- Randdichte: sei $f(y, x)$ eine gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen y und x, dann ist die Randdichte

$$f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y, x)\, dx$$

- (unbedingter) Erwartungswert:

$$\mathrm{E}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y)\, dy$$

Stetige Zufallsvariablen

Wiederholung:

- Bedingte Dichte:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)}$$

- Bedingter Erwartungswert:

$$\mathrm{E}(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{y|x}(y|x)\, dy$$

- Stochastische Unabhängigkeit:

$$f(y,x) = f_y(y) f_x(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)} = \frac{f_y(y) f_x(x)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

Stetige Zufallsvariablen

Wiederholung:

- Bedingte Dichte:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)}$$

- Bedingter Erwartungswert:

$$\mathrm{E}(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{y|x}(y|x)\, dy$$

- Stochastische Unabhängigkeit:

$$f(y,x) = f_y(y) f_x(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)} = \frac{f_y(y) f_x(x)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

Stetige Zufallsvariablen

Wiederholung:

- Bedingte Dichte:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)}$$

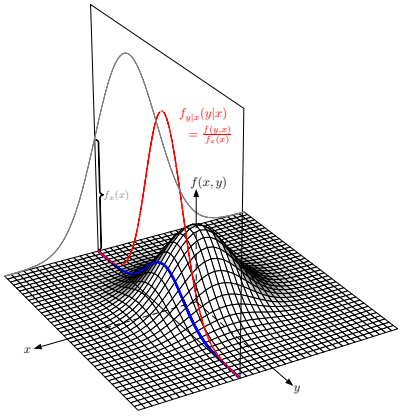
- Bedingter Erwartungswert:

$$\mathrm{E}(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{y|x}(y|x)\, dy$$

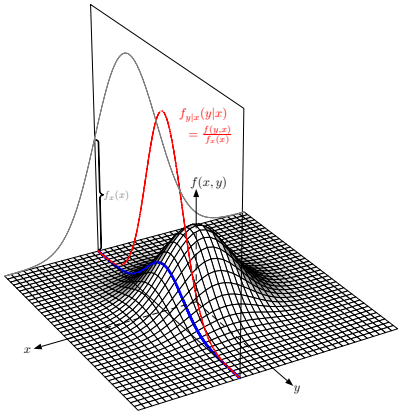
- Stochastische Unabhängigkeit:

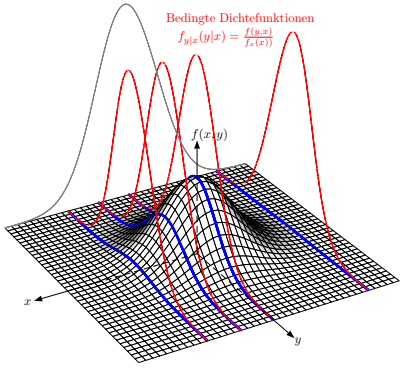
$$f(y,x) = f_y(y) f_x(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f_{y|x}(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_x(x)} = \frac{f_y(y) f_x(x)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

Stetige Zufallsvariablen

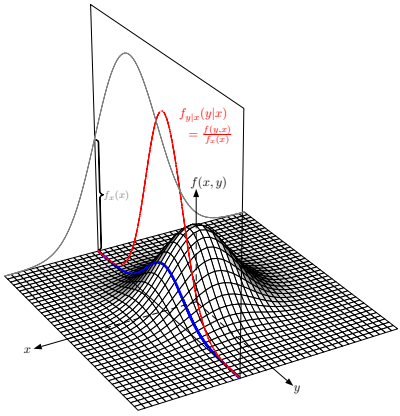


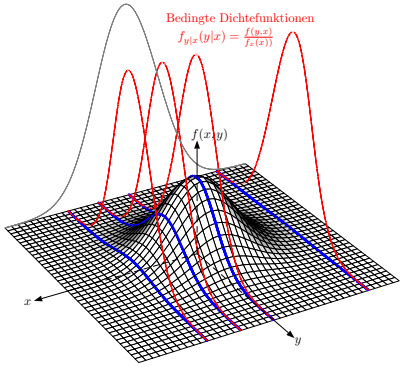
Stetige Zufallsvariablen





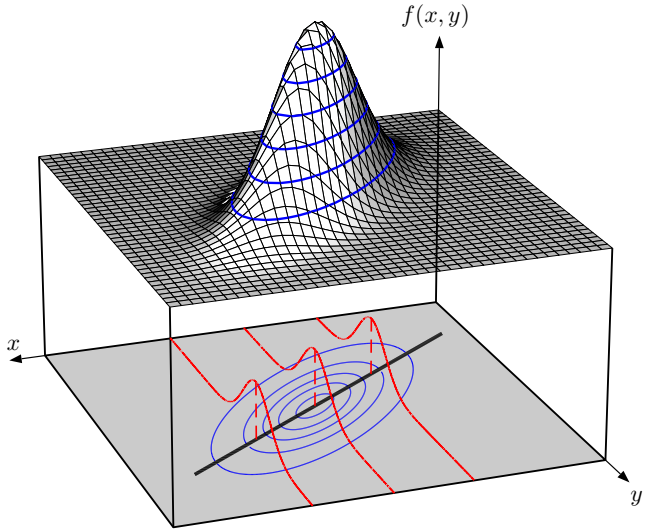
Stetige Zufallsvariablen





$$\mathrm{E}(y|x) = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{y|x}(y|x)\, dy$$

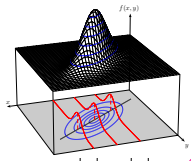
Datengenerierender Prozess und CEF mit Störtermen



Stochastische Regressionsanalyse

Datengenerierender Prozess (*DGP*)

$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$



induktiv (Theorie)

n Paare von Zufallsvariablen;
ε_i identisch & unabhängig verteilt?

$\hat{\varepsilon}_1 = y_1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_1, \quad \varepsilon_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_i^2)$

$\hat{\varepsilon}_n = y_n - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_n, \quad \varepsilon_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma_n^2)$

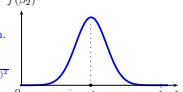
$n \to \infty$ … Asymptotik

Schätzfunktion

$\widehat{\beta}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(x,y)}{\widehat{\mathrm{var}}(x)}$

mit Gauss-M. Ann.
$\mathrm{E}(\widehat{\beta}_2) = \beta_2$
$\mathrm{var}(\widehat{\beta}_2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$

Stichprobenkennwertverteilung von $\widehat{\beta}_2$



nicht beobachtbar

Zustände vor dem Zufallsexperiment (*ex ante*) sind nicht beobachtbar!

Z U F A L L S E X P E R I M E N T

Nach dem Zufallsexperiment (*ex post*) existiert kein Zufall (Realisationen)!

deskriptiv (Empirie)

$\underline{y}_1 \; \underline{y}_2 \; \dots \; \underline{y}_i \; \dots \; \underline{y}_n$
$\underline{x}_1 \; \underline{x}_2 \qquad \underline{x}_i \qquad \underline{x}_n$

Stichprobe (n Realisationen)

$b_2 = \frac{\mathrm{cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\mathrm{var}(\underline{x})}$

Schätzung (Zahl)

beobachtbar

©H. Stocker

DGP $\rightarrow$ PRF $\rightarrow$ Stichprobenkennwertverteilung

- DGP und dessen gemeinsame Verteilung unbeobachtbar; meist komplizierte Verteilung mit oft heteroskedastischen Störtermen.
- Stichprobenkennwertverteilung:
  - Lage unbekannt!
  - Wir wissen: empirische Schätzung ist eine Realisation aus dieser Verteilung!
- Die Eigenschaften der Stichprobenkennwertverteilung sowie deren Parameter (Erwartungswert & Varianz) stehen im Zentrum des nächsten Kapitels!
- Stichprobenkennwertverteilungen werden für Hypothesentests benötigt!

DGP $\rightarrow$ PRF $\rightarrow$ Stichprobenkennwertverteilung

- DGP und dessen gemeinsame Verteilung unbeobachtbar; meist komplizierte Verteilung mit oft heteroskedastischen Störtermen.
- Stichprobenkennwertverteilung:
  - Lage unbekannt!
  - Wir wissen: empirische Schätzung ist eine Realisation aus dieser Verteilung!
- Die Eigenschaften der Stichprobenkennwertverteilung sowie deren Parameter (Erwartungswert & Varianz) stehen im Zentrum des nächsten Kapitels!
- Stichprobenkennwertverteilungen werden für Hypothesentests benötigt!

Thanx . . .