Rechnen mit Summenzeichen

Wenn x_1, x_2, …, x_n die Ausprägungen einer Variable x sind wird die Summe aller Variablenwerte geschrieben als

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

wobei i der Summationsindex ist, der in diesem Fall von der unteren Summationsgrenze 1 zur oberen Summationsgrenze n läuft ($i = 1, 2, \ldots, n$)

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2

$$\sum_{i=3}^{6} x_i = 8 + 4 + 6 + 2 = 20$$

Der Summationsindex kann auch als Variable dienen

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \times i = 9 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 3 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=6}^{8} x_i^i = 2^6 + 1^7 + 2^8$$

Manchmal wird auch verkürzt geschrieben

$$\sum_{i} x_i$$

für “Summe über alle möglichen Ausprägungen von i”; oder

$$\sum_{x} x$$

für “Summe über alle möglichen Ausprägungen von x”.

Einige Rechenregeln für Summen

1. Wenn a eine Konstante ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a = na}$$

weil

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{-mal}} = na$$

2. Wenn a eine Konstante und x eine Variable ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ax_i &= ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n \\ &= a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= a\sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

3. Wenn x und y zwei Variablen sind ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

4. Wenn x und y zwei Variablen und a und b zwei Konstanten sind ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2
y	2	1	3	4	5	7	6	9

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^{8}(3x_i + 2y_i) &= (3\times 2 + 2\times 7) + (3\times 1 + 2\times 6) + (3\times 2 + 2\times 9) = 59 \\ &= 3(2+1+2) + 2(7+6+9) = 59\end{aligned}$$

Doppelsummen:

5.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 + x_i y_2 + \cdots + x_i y_n \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + \cdots + x_1 y_n \\ &\quad + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_2 y_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n y_1 + x_n y_2 + \cdots + x_n y_n\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2}(2i+j^2) = 2\times 1+0^2+2\times 1+1^2+2\times 1+2^2+$$
$$2\times 2+0^2+2\times 2+1^2+2\times 2+2^2+$$
$$2\times 3+0^2+2\times 3+1^2+2\times 3+2^2$$
$$= 11+17+23=51$$

6.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\right)}$$

weil

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{im})\\ &= (x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m})+\\ &\quad (x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m})+\\ &\quad \vdots\\ &\quad (x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nm})\\ &= (x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{n1})+\\ &\quad \vdots\\ &\quad (x_{1m}+x_{2m}+\cdots+x_{nm})\\ &= \sum_{j=1}^{m}(x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{nj})\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\right)\end{aligned}$$

7.

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_j}$$

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2
y	2	1	3	4	5	7	6	9

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=6}^{8}x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{3}y_j\right) &= (2+1+2)(1+3)=20\\ &= \sum_{i=6}^{8}x_i(1+3)=2(1+3)+1(1+3)+2(1+3)=20\end{aligned}$$

Achtung: im allgemeinen

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

z.B. für $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{2} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Übungsbeispiele

Zeigen Sie, dass

1. $\sum_{i=2}^{4} i^2 = 29$;
2. $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=1}^{3} i \times j = 18$
3. $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{4} (2j + i) = 45$
4. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j$