Rechnen mit Summenzeichen

Summen spielen in der Statistik eine große Rolle und der sichere Umgang mit dem Summenzeichen $\sum$ ist für das Folgende unverzichtbar.

Wenn x_1, x_2, $\ldots$, x_n die Ausprägungen einer Variable x sind wird die Summe aller Variablenwerte geschrieben als

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

wobei i der Summationsindex ist, der in diesem Fall von der unteren Summationsgrenze 1 zur oberen Summationsgrenze n läuft ($i = 1, 2, \ldots, n$)

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2

$$\sum_{i=3}^{6} x_i = 8 + 4 + 6 + 2 = 20$$

Der Summationsindex kann auch als Variable dienen

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \times i = 9 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 3 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=6}^{8} x_i^i = 2^6 + 1^7 + 2^8$$

Beachte, dass hier der tiefgestellte Index die Position in der Tabelle angibt, und der hochgestellte Index gibt die Potenz des entsprechenden Tabellenwertes an.

Manchmal wird auch verkürzt geschrieben

$$\sum_{i} x_i$$

für "Summe über alle möglichen Ausprägungen von i"; oder

$$\sum_{x} x$$

für "Summe über alle möglichen Ausprägungen von x".

Einige Rechenregeln für Summen

1. Wenn a eine Konstante ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a = na}$$

   weil

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{-mal}} = na$$

2. Wenn a eine Konstante und x eine Variable ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a x_i &= a x_1 + a x_2 + \cdots + a x_n \\ &= a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

3. Wenn x und y zwei Variablen sind ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

weil

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n) \\ &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\end{aligned}$$

4. Wenn x und y zwei Variablen und a, b und c Konstanten sind ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a x_i + b y_i + c) = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} y_i + nc}$$

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2
y	2	1	3	4	5	7	6	9

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^{8} (3x_i + 2y_i) &= (3 \times 2 + 2 \times 7) + (3 \times 1 + 2 \times 6) + (3 \times 2 + 2 \times 9) = 59 \\ &= 3 \sum_{i=6}^{8} x_i + 2 \sum_{i=6}^{8} y_i \\ &= 3(2 + 1 + 2) + 2(7 + 6 + 9) = 59\end{aligned}$$

Doppelsummen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{ik})\\ &= x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1k}+\\ &\quad x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2k}+\\ &\qquad\qquad\vdots\\ &\quad x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nk}\end{aligned}$$

Beispiel: Kontingenztabellen (Häufigkeitstabellen)

Wenn X insgesamt n und Y insgesamt k Ausprägungen hat (mit Laufindizes $i = 1,\ldots,n$ und $j = 1,\ldots,k$), und h_{ij} die absoluten Häufigkeiten angibt

$$\begin{array}{cc|ccc|c} & & & Y & & \\ & & y_1 & \cdots & y_k & \\ \hline & x_1 & h_{11} & \cdots & h_{1k} & h_{1\bullet} \\ X & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & x_n & h_{n1} & \cdots & h_{nk} & h_{k\bullet} \\ \hline & & h_{\bullet 1} & \cdots & h_{\bullet k} & h_{\bullet\bullet} = h \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} h_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(h_{i1}+h_{i2}+\cdots+h_{ik}) = h$$

Beispiel: Nächtigungen nach Nationalität und Unterbringungsart ($n = 4$ und $k = 6$):

$_i\backslash^j$		1 Hotel	2 Camping	3 BB	4 Appart	5 Room	6 Farm	Sum
1	AUT	71	11	39	18	12	7	158
2	DEU	99	19	34	33	31	14	230
3	ITA	46	14	8	4	4	2	78
4	AND	294	100	53	50	27	10	534
	Sum	510	144	134	105	74	33	1000

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} h_{ij} &= (71+11+\cdots+7)+\\ &\quad (99+19+\cdots+14)+\\ \vdots &\qquad\qquad\vdots\\ &\quad (294+100+\cdots+10)\\ &= 1000\\ &= \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{4} h_{ij}\end{aligned}$$

Wie man hier einfach erkennen kann können die Summationszeichen 'vertauscht' werden (es spielt keine Rolle, ob zuerst über Zeilen und dann Spalten oder zuerst über Spalten und dann Zeilen summiert wird):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}$$

Es können auch Summen über Teile einer Tabelle gebildet werden, z.B.:
Summe aller Personen, die Unterbringungsart 'Camping' oder 'BB' wählten:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=2}^{3} h_{ij} = (11+39)+(19+34)+(14+8)+(100+53)$$

Summe aller Personen mit Nationalität 'ITA' oder 'AND', die Unterbringungsart 'Camping' oder 'BB' wählten:

$$\sum_{i=3}^{4}\sum_{j=2}^{3} h_{ij} = 175$$

Natürlich kann der Summationsindex auch wieder als Variable verwendet werden. Beispiel:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2}(2i+j^2) &= 2\times 1+0^2+2\times 1+1^2+2\times 1+2^2+\\
&\quad 2\times 2+0^2+2\times 2+1^2+2\times 2+2^2+\\
&\quad 2\times 3+0^2+2\times 3+1^2+2\times 3+2^2\\
&= 11+17+23=51
\end{aligned}$$

Das Produkt zweier Summen ist die Doppelsumme der Produkte:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j}$$

Beispiel 1: für $n=3$ und $k=2$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} y_j\right) &= (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2)\\
&= x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1+y_2)+x_3(y_1+y_2)\\
&= x_1y_1+x_1y_2+\\
&\quad x_2y_1+x_2y_2+\\
&\quad x_3y_1+x_3y_2\\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j
\end{aligned}$$

Beispiel 2:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	9	7	8	4	6	2	1	2
y	2	1	3	4	5	7	6	9

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=6}^{8} x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{3} y_j\right) &= (2+1+2)(1+3) = 20 \\ &= \sum_{i=6}^{8}\sum_{j=2}^{3} x_i y_j = 2(1+3) + 1(1+3) + 2(1+3) = 20\end{aligned}$$

Achtung: im allgemeinen

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

z.B. für $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 \;\neq\; \left(\sum_{i=1}^{2} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Übungsbeispiele

Zeigen Sie, dass

1. $\sum_{i=2}^{4} i^2 = 29$;
2. $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} i \times j = 18$
3. $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{4}(2j + i) = 45$
4. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j$