# Anhang B

# Matrixalgebra

In der Ökonometrie wie in vielen anderen Wissenschaften spielen lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle. Diese lassen sich mit Hilfe von Matrizen und Vektoren sehr viel einfach anschreiben und lösen. Insbesondere Kreuz- und Quadratsummen lassen sich mit Matrizen sehr viel einfacher darstellen als mit dem Summenoperator.

## B.1 Matrizen

Eine Matrix ist ein rechteckige Anordnung von Zahlen. Wenn die Matrix $n$ Zeilen und $k$ Spalten hat spricht man von einer $n$-Kreuz-$k$ Matrix, geschrieben $(n \times k)$. Sie hat folgendes Aussehen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Man sagt auch, die Matrix $\mathbf{A}$ hat die Ordnung (oder Dimension) $n \times k$. Die einzelnen Zahlen werden die *Elemente* der Matrix genannt. Jedes Element ist eindeutig durch die Zeile und Spalte definiert, in der es steht. Das Element $a_{23}$ bezeichnet z.B. die Zahl in der 2. Zeile und 3. Spalte (die Reihenfolge ist immer zuerst Zeile dann Spalte).

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind gleich, wenn jedes Element gleich ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{wenn und nur wenn } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i \text{ und } j$$

## B.2 Spezielle Matrizen

Eine Matrix mit nur einer Zeile (z.B. eine $1 \times n$ Matrix) wird **Zeilenvektor** genannt, eine Matrix mit nur einer Spalte (eine $n \times 1$ Matrix) wird **Spaltenvektor** genannt.

[0]Zuletzt bearbeitet am 17. April 2012.

Eine **quadratische Matrix** hat gleich viele Zeilen wie Spalten.

Die **Einheitsmatrix** der Ordnung $n$ ($\mathbf{I}_n$) ist eine quadratische Matrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale und Nullen sonst, d.h. $a_{ii} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$, oder ausführlicher

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ spielt die Rolle der 1 im System der reellen Zahlen, denn für jede $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

**Symmetrische Matrizen** sind symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i$ und $j$. Symmetrisch können nur quadratische Matrizen sein. Beispiele für symmetrische Matrizen sind:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente mit Ausnahme der Hauptdiagonale den Wert Null haben: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Eine **Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente über *oder* unter der Hauptdiagonale den Wert Null haben.

**Notation:** Es ist üblich Matrizen und Vektoren mit fettgedruckten Symbolen zu schreiben. Häufig werden Matrizen mit Großbuchstaben und Vektoren mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

# B.3 Rechenregeln für Matrizen

## B.3.1 Matrizenaddition:

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Matrizen der selben Dimension, dann ist $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

z.B.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Rechenregeln für Matrizenaddition:**

Für geeignet dimensionierte Matrizen gilt

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
2. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$, wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix ist, d.h. aus lauter Nullen besteht.
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. $(c_1+c_2)\mathbf{A} = c_1\,\mathbf{A} + c_2\,\mathbf{A} \quad (c_1$ und $c_2$ sind Skalare)
6. $c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\,\mathbf{A} + c\,\mathbf{B}$

### B.3.2 Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})$$

z.B.

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

1. $(c_1+c_2)\mathbf{A} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}$, mit $c_1,\ c_2$ reelle Zahlen.
2. $c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$

### B.3.3 Matrizenmultiplikation:

Sei $\mathbf{A}$ der Dimension $(n\times k)$ und $\mathbf{B}$ der Dimension $(k\times m)$, dann ist $\mathbf{AB}$ eine Matrix der Dimension $(n\times m)$ mit

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

mit $i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,k$

Um ein Element $c_{ij}$ des Matrizenprodukts $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ zu erhalten multiplizieren wir jedes Element der $i$-ten Zeile von $\mathbf{A}$ mit dem entsprechenden Element der $j$-ten Spalte von $\mathbf{B}$ und addieren dann alle Produkte.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ih} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nh} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{g1} & \cdots & b_{gj} & \cdots & b_{gm} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass das Matrizenprodukt **AB** nur definiert ist, wenn die Anzahl der Spalten in **A** gleich der Anzahl der Zeilen in **B** ist.

$$(n \times k)(k \times m)$$

Die Ordnung des resultierenden Matrizenprodukts ist gleich der Anzahl der Zeilen von **A** Kreuz der Anzahl der Spalten von **B**, d.h. $n \times m$.

Beispiel:

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{C}} = \underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}}\underset{(3\times 2)}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 22 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Rechenregen für die Matrizenmultiplikation:**

Für geeignet dimensionierte Matrizen gilt

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (Assoziativgesetz)
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (linksseitiges Distributivgesetz)
3. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ (rechtsseitiges Distributivgesetz)

**Achtung:** das Kommutativegesetz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt im allgemeinen *nicht*!!! Deshalb muss bei Matrizen zwischen *Vor- und Nachmultiplikation* unterschieden werden.

Zum Beispiel:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

### B.3.4 Die Transponierte einer Matrix

Die Transponierte einer Matrix $\mathbf{A}$, geschrieben $\mathbf{A}'$, erhält man durch Austauschen von Zeilen und Spalten, z.B.

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underset{3\times 2}{\mathbf{A}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist symmetrisch wenn und nur wenn gilt $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

**Beispiele:**

Sei $\boldsymbol{\varepsilon}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor

$$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'$ wird auch das **äußere Produkt** des Spaltenvektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ genannt.

Sei $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & \cdots & \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix} = \hat{\varepsilon}_1^2 + \hat{\varepsilon}_2^2 + \cdots + \hat{\varepsilon}_n^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$$

Die Quadratsumme $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist natürlich ein Skalar wird auch das **innere Produkt** des Spaltenvektors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ genannt.

**Rechenregeln für Transponierte:**

für geeignet dimensionierte Matrizen gilt:

1. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
3. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$, bzw. $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$
4. $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$ (mit $\mathbf{I}$... Einheitsmatrix)
5. $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}'$ (wenn $\lambda$ ein Skalar; außerdem: $\lambda' = \lambda$)

Wenn $\mathbf{X}$ eine $n \times k$ Matrix ist, dann ist $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ immer eine symmetrische Matrix der Ordnung $k \times k$.

## B.4 Die geometrische Darstellung von Vektoren

Bisher haben wir Vektoren als spezielle Matrizen betrachtet, die entweder nur aus einer Spalte (Spaltenvektoren) oder nur aus einer Zeile (Zeilenvektoren) bestehen.

In der Geometrie versteht man unter einem **Vektor** eine Menge von Pfeilen mit der Eigenschaft Länge (Betrag) und Richtung. Alle gleich langen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile gehören zum selben Vektor. Ein **Skalar** ist im Gegensatz dazu eine ungerichtete Größe (d.h. eine Zahl).

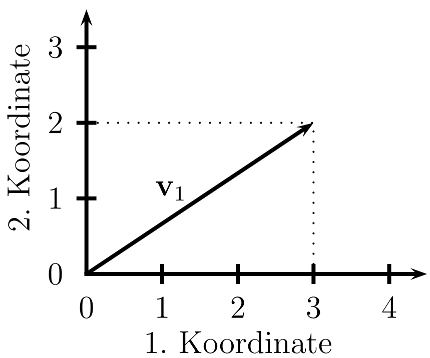
In der linearen Algebra sind Vektoren definiert als Elemente eines Vektorraums. Ein **Vektorraum** besteht aus einzelnen Vektoren, die addiert oder mit einer skalaren Zahl multipliziert werden können, so dass das Ergebnis jeweils wieder ein Vektor desselben Vektorraums ist.

Vektoren können als Koordinaten eines Punktes im Euklidischen Raum[1] dargestellt werden, wobei der Vektor als Pfeil vom Ursprung zu diesem Punkt gezeichnet wird.

Ein anschaulicher Vektorraum ist die 2-dimensionale Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$, in der Vektoren als Pfeile dargestellt werden können. Die reellen Zahlen sind Skalare.

Nebenstehende Abbildung zeigt zum Beispiel den Vektor

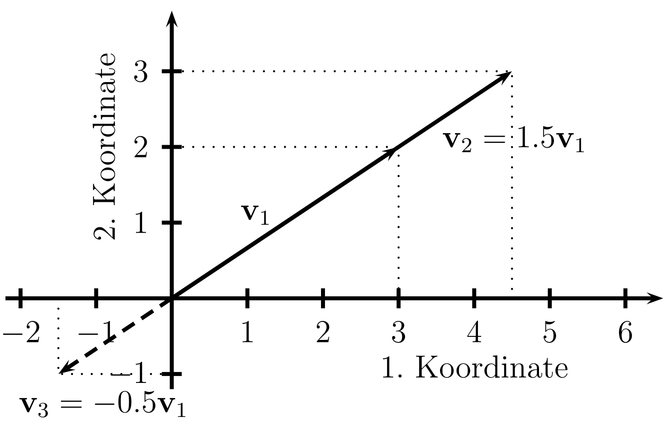
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$




Vektoren können mit beliebigen Zahlen multipliziert werden.

Untenstehende Abbildung zeigt ein Beispiel

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = 1.5\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = -0.5\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

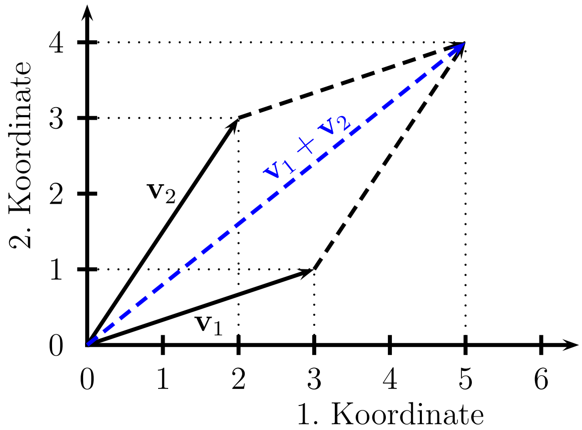



[1] "Der Begriff Euklidischer Raum (nach Euklid von Alexandria) bezeichnet einen reellen Vektorraum mit einem Skalarprodukt, so dass man Längen und Winkel messen kann. In der Regel wird er für endlichdimensionale Räume, insbesondere für die Räume $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt verwendet. Der Spezialfall $\mathbb{R}^2$ wird auch Euklidische Ebene genannt." (Wikipedia, `http://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Raum`

Wenn ein Vektor mit einem Skalar größer als Eins multipliziert wird ist der dadurch entstehende Vektor 'länger', aber er hat die gleiche Richtung. Wird er mit einer Zahl kleiner als Eins multipliziert ist der Vektor 'kürzer'. Wird der Vektor mit einer negativen Zahl multipliziert dreht sich die Richtung um.

Vektoren können auch addiert werden. Dazu wird ein Vektor an das Ende des anderen verschoben. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$




Natürlich können Vektoren auch subtrahiert werden. Man kann sich dies zweistufig vorstellen, zuerst wird der zu subtrahierende Vektor mit $-1$ multipliziert und anschließend addiert.

Eine **Basis eines Vektorraums** ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten zu beschreiben. Dadurch wird das Rechnen in Vektorräumen erleichtert. Die Anzahl der Basisvektoren wird **Dimension des Vektorraums** genannt.

### B.4.1 Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist *linear abhängig*, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Umgekehrt, eine Menge von Vektoren ist linear *un*abhängig wenn und nur wenn gilt, dass die einzige Lösung der Gleichung

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ist

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Das bedeutet, dass sich kein Vektor der Menge als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen lässt. Die Basisvektoren eines Vektorraums müssen linear unabhängig sein.

### B.4.2 Länge (bzw. Betrag oder Norm) eines Vektors

Nach dem Satz von Pythagoras ist in allen ebenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates, d.h. $c^2 = a^2 + b^2$. Daraus folgt die Länge der Hypothenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Entsprechend dazu ist die Länge (bzw. Betrag oder Norm) eines Vektors (geschrieben $||\mathbf{v}||$) definiert

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \;=\; \sqrt{\sum_i v_i^2} \;=\; \sqrt{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$$

### B.4.3 Orthogonalität

Zwei von Null verschiedene Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind **orthogonal** (geschrieben $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$) wenn und nur wenn gilt

$$\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2'\mathbf{v}_1 = 0$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, also einen rechten Winkel einschließen.

**Cosinus Gesetz:**[2] Für den Winkel $\alpha$, den zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ einschließen, gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_1|| \cdot ||\mathbf{v}_2||}$$

Der Kosinus von 90 Grad ist Null und der Kosinus von 0 Grad ist Eins, deshalb sind bei $\cos(\alpha) = 0$ die Vektoren orthogonal, und wenn $\cos(\alpha) = 1$ liegen die Vektoren 'aufeinander' (bzw. parallel).

Wenn die Vektoren zentriert sind (d.h. der Mittelwert abgezogen wurde, so dass der Mittelwert Null ist), dann ist $\cos(\alpha)$ auch der *Korrelationskoeffizient* zwischen den Variablen.

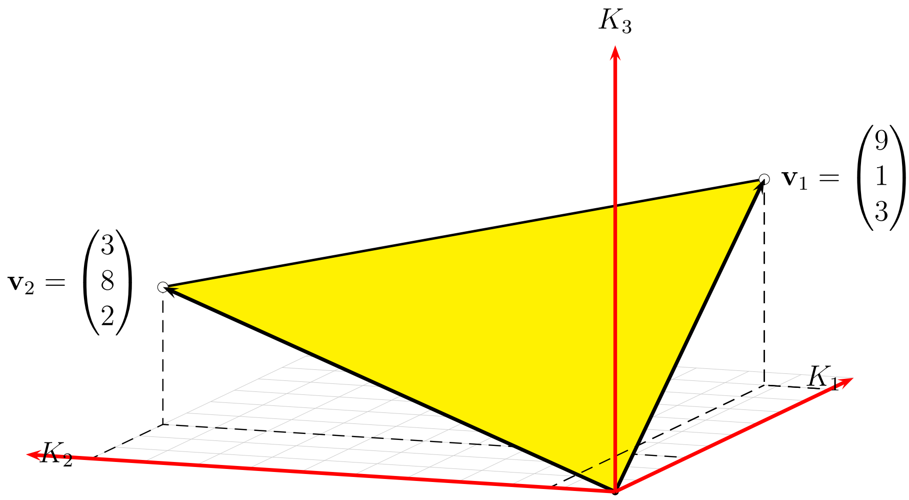
### B.4.4 Unterräume (*subspaces*) des Euklidischen Raums $E^n$

Wie schon erwähnt können die $n$ Elemente eines $n \times 1$ Vektors $\mathbf{v}$ auch als Koordinaten eines Punktes im euklidischen Raum $E^n$ dargestellt werden.

Ein *Unterraum* (*subspace*) von $E^n$ hat eine niedrigere Dimension als $n$ und wird von sogenannten *Basisvektoren* aufgespannt.

Die folgende Abbildung zeigt einen 2-dimensionalen Unterraum von $E^3$ (d.h. der Unterraum ist eine Ebene im 3-dimensionalen Raum), der durch die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannt wird

[2] Der Kosinus eines Winkels ist das Verhältnis von Ankathete (die dem Winkel 'anliegende' Kathete) zur Hypotenuse.




## B.5 Determinante einer Matrix

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine Funktion der Matrix, die nach einer eindeutigen Vorschrift berechnet wird und der Matrix einen Skalar zuordnet. Die Determinate der Matrix $\mathbf{A}$ wird mit $|\mathbf{A}|$ bezeichnet.

Geometrisch kann man sich den Absolutbetrag der Determinante einer $2 \times 2$ Matrix als die *Fläche* eines Parallelogramms vorstellen, das durch die zwei Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird. Analog ist der Absolutbetrag der Determinante einer $3 \times 3$ Matrix das Volumen eines Parallelepipeds (3-dimensionale Analogon zum Parallelogramm), das durch diese Vektoren aufgespannt wird.

Die Determinante einer $2 \times 2$ Matrix wird berechnet, indem das Produkt der Hauptdiagonalelemente gebildet wird, und davon das Produkt der Nebendiagonalelemente subtrahiert wird

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = [5 \times (-2)] - [1 \times 4] = -14$$

Man kann überprüfen, dass die Fläche des Parallelogramms, das im Beispiel Vektoraddition auf Seite 7 von den Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, gleich dem Wert der folgenden Determinante ist

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

Die Determinante einer $3 \times 3$ Matrix kann nach einem ähnlichen Muster berechnet werden, das durch folgende Abbildung veranschaulicht wird:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{pmatrix}
$$

$$|\mathbf{D}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Dies gilt nur für $3 \times 3$ Matrizen und ist *nicht* verallgemeinerbar auf Matrizen höherer Ordnung!

## Laplace Expansion

Determinanten von Matrizen höherer Ordnung können mit Hilfe des **Laplaceschen Entwicklungsatzes** berechnet werden. Dazu definieren wir zuerst Minoren und Cofaktoren einer Matrix.

**Minoren** Der Minor $\mathbf{M}_{ij}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist die Determinante einer quadratische Untermatrix, die durch Streichen von Zeile $i$ und Spalte $j$ entsteht.

**Beispiel:** Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sind die Minoren

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

$$|\mathbf{M}_{21}| == \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad |\mathbf{M}_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad |\mathbf{M}_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{usw.}$$

**Cofaktoren** Aus den Minoren $|\mathbf{M}_{ij}|$ können die Cofaktoren $|\mathbf{C}_{ij}|$ einfach ermittelt werden, indem die Vorzeichen der Minoren nach einer bestimmten Regel geändert werden. Nach dieser Regel wird das Vorzeichen eines Minors geändert, wenn die Summe aus Zeilen- und Spaltenindex eine ungerade Zahl ist, und das Vorzeichen des Minors bleibt unverändert, wenn die Summe aus Zeilen- und Spaltenindex eine gerade Zahl ist.

$$|\mathbf{C}_{ij}| = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$$

da $(-1)^{i+j} = 1$ wenn $i + j$ eine gerade Zahl ist, und $(-1)^{i+j} = -1$ wenn $i + j$ eine ungerade Zahl ist. Daraus ergibt sich ein typisches Schachbrettmuster der Vorzeichenänderungen.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

**Beispiel** Die Matrix der Minoren $\mathbf{M}$ einer Matrix $\mathbf{A}$ sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ 3 & -7 & -57 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix mit den Cofaktoren erhält man durch die Beachtung der Vorzeichenänderungen

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} +0 & -0 & -27 \\ -3 & -7 & +57 \\ -3 & +2 & +3 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass $\mathbf{M}_{32} = -2$, deshalb ist $\mathbf{C}_{32} = +2$, denn $(-1)^{3+2} = -1$.

**Adjunkte Matrix** Als adjunkte Matrix bezeichnet man die transponierte Matrix der Cofaktoren (also die Transponierte der vorzeichenbehafteten Minoren).

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}'$$

Diese werden wir später für die Berechnung der *inversen Matrix* benötigen.

Der **Laplacesche Entwicklungssatz** besagt, dass man den Wert einer Determinate erhält, indem man eine Matrix "nach einer Zeile oder Spalte zu entwickelt". Dazu werden die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte mit den dazugehörigen Cofaktoren multipliziert und die Produkte aufsummiert.

Eine Entwicklung nach der ersten Zeile einer $3 \times 3$ Matrix gibt

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{C}_{11}| + a_{12}|\mathbf{C}_{12}| + a_{13}|\mathbf{C}_{13}| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}|\mathbf{C}_{1j}|$$

Genausogut kann man sie z.B. nach der dritten Spalte entwickeln

$$|\mathbf{A}| = a_{13}|\mathbf{C}_{13}| + a_{23}|\mathbf{C}_{23}| + a_{33}|\mathbf{C}_{33}| = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}|\mathbf{C}_{i3}|$$

Dies gilt für Matrizen beliebiger hoher Ordnung. Indem man diese Operation wiederholt anwendet kann man die Determinante jeder Matrix damit berechnen, denn bei jedem 'Durchgang' wird die Ordnung der zu bestimmenden Determinante um Eins reduziert, bis man schließlich nur noch die Determinanten von $2 \times 2$ Matrizen berechnen muss.

**Beispiel** Wir haben vorhin die Cofaktoren der Matrix **A** berechnet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ -3 & -7 & 57 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung nach der ersten Zeile gibt

$$|\mathbf{A}| = 5 \times 0 + 6 \times 0 - 1 \times 27 = -27$$

die Entwicklung nach der 2. Spalte gibt ebenso

$$|\mathbf{A}| = 6 \times 0 + 3 \times (-7) - 3 \times 2 = -27$$

Diese Methode ist insbesondere nützlich, wenn eine Matrix in einer Zeile oder Spalte viele Nullen enthält. In diesem Beispiel hat die dritte Spalte zwei Nullen, deshalb kann die Determinante besonders einfach berechnet werden, indem die Matrix nach der 3. Spalte entwickelt wird

$$|\mathbf{A}| = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-27) = -27$$

**Lineare Abhängigkeit**

Determinanten haben v.a. eine wichtige Eigenschaft: **Der Wert einer Determinate ist immer Null, wenn zwischen den Zeilen oder Spalten der Matrix eine lineare Abhängigkeit existiert.**

Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} &= 6 \times 3 \times 6 + 8 \times 5 \times 4 + 2 \times 7 \times 1 - \\ &\quad -2 \times 3 \times 4 - 5 \times 7 \times 6 - 6 \times 1 \times 8 \\ &= 108 + 160 + 14 - 24 - 210 - 48 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Man beachte, dass die 3. Zeile der Matrix gleich [0.5× erste Zeile + zweite Zeile] ist, also gibt es innerhalb der Zeilen eine lineare Abhängigkeit, weshalb der Wert der Determinante Null ist.

Im folgenden Beispiel ist die zweite Spalte das Doppelte der ersten Spalte, weshalb die Determinante wieder den Wert Null hat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Ein Matrix, deren Determinante den Wert Null hat, heißt **singuläre Matrix**.

**Rechenregeln für Determinanten:**

Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ mit der Determinante $|\mathbf{A}|$. Dann gilt:

1. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|'$, wobei $\mathbf{A}'$ die Transponierte von $\mathbf{A}$ ist.
2. Wenn alle Elemente einer Zeile oder Spalte gleich Null sind, dann ist $|\mathbf{A}| = 0$.
3. Wenn (mindestens) zwei der Zeilen (oder Spalten) von $\mathbf{A}$ proportional (d.h. linear abhängig) sind, dann ist der Wert der Determinante Null ($|\mathbf{A}| = 0$).
4. Wenn zwei Spalten (oder Zeilen) von $\mathbf{A}$ vertauscht werden wechselt die Determinante das Vorzeichen, der Absolutwert bleibt gleich.
5. Wenn das Vielfache einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) von $\mathbf{A}$ addiert wird, bleibt der Wert der Determinante $|\mathbf{A}|$ unverändert.
6. Wenn alle Elemente in einer einzelnen Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl $k$ multipliziert werden, wird die Determinante mit $k$ multipliziert.
7. Wenn $\mathbf{A}$ eine $n \times n$ Matrix und $c$ eine reelle Zahl ist, dann gilt $|c\mathbf{A}| = c^n|\mathbf{A}|$.
8. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

*Achtung:* Gewöhnlich ist die Determinate einer Summe nicht die Summe der Determinanten

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

## B.6 Inverse einer Matrix

Wenn $c$ eine reelle Zahl ungleich Null ist, dann existiert eine eindeutige Zahl $c^{-1}$ mit der Eigenschaft $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$. Man nennt $c^{-1}$ die (multiplikative) Inverse von $c$. Das Matrizen-Äquivalent dazu ist die Inverse einer Matrix.

Eine quadratische $k \times k$ Matrix $\mathbf{A}$ hat eine Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ wenn gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_k$$

Berechnung der inversen Matrix für eine $2 \times 2$ Matrix $\mathbf{A}$:
Wir suchen eine Matrix $\mathbf{B}$ die die Gleichung $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ erfüllt, bzw. ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser vier Gleichungen nach den Elementen von $\mathbf{B}$ ist

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

Der Kehrwert der Determinante $|\mathbf{A}|$ in $\mathbf{A}^{-1}$ ist kein Zufall, sondern erscheint auch bei der Inversen von Matrizen höherer Ordnung!

Deshalb existiert die Inverse einer quadratischen Matrix nur, wenn die Matrix nicht singulär ist, oder in anderen Worten, eine Matrix ist nichtsingulär wenn und nur wenn die Inverse existiert.

Am einfachsten ist die Inverse einer Diagonalmatrix zu berechnen. Wenn

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{kk}} \end{pmatrix}$$

Allgemein kann die Inverse einer quadratischen Matrix mit Hilfe der Determinante und der adjunkten Matrix berechnet werden.

Es gilt nämlich

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A})}$$

Wir erinnern uns: die adjunkte Matrix ist die transponierte Matrix der Cofaktoren, und die Cofaktoren sind die vorzeichenbehafteten Minoren.

**Beispiel** Wir haben auf Seite 11 die folgenden Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ berechnet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 \\ -3 & -7 & 57 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von $\mathbf{A}$ ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ -27 & 57 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverse von Matrizen höherer Ordnung sind im allgemeinen etwas schwer per Hand zu berechnen, dies ist eine Domäne der Computer. Wichtig ist allerdings den Umgang mit Inversen zu beherrschen.

**Rechenregeln für Inverse:**

Die Inverse einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ wird geschrieben als $\mathbf{A}^{-1}$ und erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad (\text{mit } \mathbf{I} \ldots \text{Einheitsmatrix})$$

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare quadratische Matrizen, dann gilt

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ wenn beide Inversen existieren.
4. $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
5. $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$

# B.7 Lineare Gleichungssysteme

## B.7.1 Nicht homogene Gleichungssysteme

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times k$ Matrix, $\mathbf{x}$ ein $k \times 1$ Spaltenvektor mit den Unbekannten und $\mathbf{c}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor mit Konstanten dann definiert

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

ein System linearer Gleichungen, denn wie man einfach sehen kann ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

gleich

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + & = & c_n \end{array}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ wird in diesem Zusammenhang häufig *Koeffizientenmatrix* genannt.

Mit Hilfe der Inversen kann dieses System einfach nach den unbekannten $\mathbf{x}$ gelöst werden, indem das Gleichungssystem mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ vormultipliziert wird

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ax} & = & \mathbf{c} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \\ \mathbf{Ix} & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \\ \mathbf{x} & = & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \end{array}$$

**Beispiel:** Folgendes Gleichungssystem sei mit Hilfe der Matrixalgebra zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ -x_1 - 3x_2 & = & 6 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann in Matrixform folgendermaßen geschrieben werden $\mathbf{Ax} = c$ bzw. ausführlicher

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$ (beachte: die Determinante eines Skalars ist der Skalar selbst)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & +1 \\ -2 & +5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ +1 & +5 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{A}| = -13$$

Die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$ ist also

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} + \frac{12}{13} \\ -\frac{4}{13} - \frac{30}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ -\frac{34}{13} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung kann man überprüfen, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

### B.7.2 Homogene Gleichungssysteme

Homogene Gleichungssysteme spielen in der Ökonometrie eine wichtige Rolle. Sie haben die Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

und haben nur eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ wenn die Matrix $\mathbf{A}$ singulär ist, d.h. nicht vollen Rang hat.

## B.8 Matrixfunktionen in Excel

Excel hat mehrere Matrixfunktionen, deren Eingabe allerdings etwas umständlich ist. Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. markieren Sie den Ausgabebereich in der richtigen Dimension (wenn Sie z.B. eine $2 \times 5$ mit einer $5 \times 3$ Matrix multiplizieren hat die Ergebnismatrix die Dimension $2 \times 3$, Sie müssen also 2 Zeilen und 3 Spalten markieren),
2. geben Sie in den markierten Bereich die gewünschte Matrixfunktion ein (s.u.),
3. schließen Sie mit der Tastenkombination `<UMSCHALT>+<STRG>+<EINGABE>` ab.

Verfügbare Matrixfunktionen sind

| | | |
|---|---|---|
| `MTRANS`(*Matrix*) | ... | Transponierte der Matrix |
| `MMULT`(*M1;M2*) | ... | Matrizenmultiplikation |
| `MDET`(*Matrix*) | ... | Determinante der Matrix |
| `MINV`(*Matrix*) | ... | Inverse der Matrix |

**Beispiel:** Um eine $3 \times 3$ Matrix im Zellbereich (A1:C3) zu invertieren markiert man einen $3 \times 3$ Ausgabebereich, z.B. (E1:G3), gibt `=MINV`(A1:C3) ein und schickt dies mit der Tastenkombination `UMSCHALT+STRG+EINGABE` ab.

Matrixfunktionen können auch geschachtelt werden. Um z.B. ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten zu lösen, in dem die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ im Zellbereich (A1:C3) und der Vektor der Konstanten $\mathbf{c}$ im Zellbereich (E1:E3) steht, markiert man einen $1 \times 3$ Ausgabebereich, gibt für $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ in Excel `=MMULT(MINV`(A1:C3);E1:E3) ein und bestätigt mit `<UMSCHALT>+<STRG>+<EINGABE>`.

## B.9 Rang einer Matrix (*rank* rk)

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten) einer Matrix, oder die Dimension der größten Submatrix, deren Determinante ungleich Null ist.

Die Determinante einer Matrix ist dann und nur dann ungleich Null, wenn die Matrix *vollen Rang* hat.

Es gilt

1. $\text{rk}(\mathbf{A}') = \text{rk}(\mathbf{A})$
2. Wenn $\mathbf{A}$ ist $n \times k$ dann ist $\text{rk}(\mathbf{A}) \leq \min(n, k)$
3. Wenn $\mathbf{A}$ ist $k \times k$ und $\text{rk}(\mathbf{A}) = k$, dann ist $\mathbf{A}$ nichtsingulär.

## B.10 Spur einer Matrix (*trace* tr)

Die Spur einer quadratischen $k \times k$ Matrix ist die Summe der Hauptdiagonalemente

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{k} a_{kk}$$

Es gilt:

1. $\text{tr}(c\mathbf{A}) = c(\text{tr}(\mathbf{A}))$
2. $\text{tr}(\mathbf{A}') = \text{tr}(\mathbf{A})$
3. $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
4. $\text{tr}(\mathbf{I}_k) = k$
5. $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$
6. $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$

## B.11 Partitionierte Matrizen (*Partitioned Matrices*)

In manchen Fällen ist es nützlich eine Matrix in mehrere Teilmatrizen zu zerlegen. Beispiel:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 8 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{A}_{11} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{22} = 5$$

**Addition von partitionierten Matrizen:** Für passend partitionierte Matrizen gilt

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

**Multiplikation von partitionierten Matrizen:** Für passend partitionierte Matrizen gilt

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

Damit die Multiplikation möglich ist müssen die Anzahl der Spalten in den $\mathbf{A}$ Matrizen gleich der Anzahl der Zeilen in den $\mathbf{B}$ Matrizen sein.

**Block-diagonale Matrizen** Ein wichtiger Spezialfall sind block-diagonale Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{A}_{22}$ quadratische Matrizen sind.
Die Determinante einer block-diagonale Matrix ist

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}|$$

und die Inverse ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

## B.12 Idempotente Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist $\mathbf{A}$ idempotent wenn und nur wenn gilt $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$.
Die folgende Matrix ist ein Beispiel für eine idempotente $3 \times 3$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für eine idempotente Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

d.h. der Rang einer idempotenten Matrix ist gleich ihrer Spur.
Zwei in der Ökonometrie wichtige idempotente Matrizen sind

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{I}_n - \mathbf{P}$$

Wenn $\mathbf{X}$ die Ordnung $n \times k$ hat ist der Rang von $\mathbf{P}$ gleich $k$, weil

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}) = \mathrm{tr}(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \mathrm{tr}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{I}_k) = k$$

Daraus folgt weiter, dass der Rang von $\mathbf{M}$ gleich $n - k$ ist

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \mathrm{tr}(\mathbf{I}_n) - \mathrm{tr}(\mathbf{P}) = n - k$$

## B.13 Quadratische Formen und positiv definite Matrizen

Quadratische Formen spielen in der Ökonometrie eine wichtige Rolle. Die quadratische Form einer symmetrischen $n \times n$ Matrix $\mathbf{V}$ ist eine reellwertige Funktion definiert für alle $n \times 1$ Spaltenvektoren $\mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}$$

Beispiel:

Gegeben sei eine $2 \times 2$ symmetrische Matrix $\mathbf{V}$ und ein $2 \times 1$ Spaltenvektor $\mathbf{x}$. Dann ist die quadratische Form definiert als ein Skalar

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 v_{11} + x_2 v_{21} & x_1 v_{12} + x_2 v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 v_{11} + x_2 x_1 v_{21} + x_1 x_2 v_{12} + x_2^2 v_{22} \\
&= \begin{array}{ccc} v_{11} x_1^2 & + & 2 v_{12} x_1 x_2 \\ & + & v_{22} x_2^2 \end{array} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_{ij} x_i x_j
\end{aligned}$$

(aufgrund der angenommenen Symmetrie von $\mathbf{V}$ ist $v_{12} = v_{21}$).

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 3x_1 + 1x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= 2x_1^2 + 3x_2 x_1 + 3x_1 x_2 + 1x_2^2 \\
&= 2x_1^2 + 6x_1 x_2 + x_2^2
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die *Summe der Hochzahlen* von $x$ für jeden Term 2 ergibt, daher der Name quadratische Form.

Die quadratische Form einer symmetrischen $3 \times 3$ Matrix $\mathbf{V}$ und eines $3 \times 1$ Spaltenvektor $\mathbf{x}$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} &= \begin{array}{ccccc} v_{11} x_1^2 & + & 2 v_{12} x_1 x_2 & + & 2 v_{13} x_1 x_3 \\ & & v_{22} x_2^2 & + & 2 v_{12} x_1 x_2 \\ & & & + & v_{33} x_3^2 \end{array} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_{ij} x_i x_j
\end{aligned}$$

Schließlich ist die quadratische Form einer symmetrischen $n \times n$ Matrix $\mathbf{V}$ und eines $n \times 1$ Spaltenvektor $\mathbf{x}$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} & = & v_{11}x_1^2 & + & 2v_{12}x_1x_2 & + & 2v_{13}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2v_{1n}x_1x_n \\
& & & & v_{22}x_2^2 & + & 2v_{12}x_1x_2 & + & \cdots & + & 2v_{2n}x_2x_n \\
& & & & & + & v_{33}x_3^2 & + & \cdots & + & 2v_{3n}x_3x_n \\
& & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & & & & & & & & v_{nn}x_n^2
\end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j>i} v_{ij}x_ix_j$$

### B.13.1 Positiv definite Matrizen

Eine symmetrische Matrix $\mathbf{V}$ heißt **positiv definit** wenn

$$\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} > 0 \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \neq 0$$

d.h. wenn die quadratische Form für jeden beliebigen $\mathbf{x}$-Vektor – mit Ausnahme des Nullvektors – positiv ist.

Wenn $\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$ heißt die quadratische Form positiv semidefinit.

Umdrehen der Ungleichheitszeichen definiert negativ definite und negativ semidefinite quadratische Formen. Ist die quadratische Form schließlich positiv für manche $\mathbf{x} \neq 0$ Vektoren und negativ für andere heißt sie indefinit.

### B.13.2 Eigenschaften positiv definiter Matrizen

1. Die Hauptdiagonalelemente einer positiv definiten Matrix sind strikt positiv; die Hauptdiagonalelemente einer positiv semidefiniten Matrix sind nicht negativ.
2. Wenn $\mathbf{V}$ positiv definit ist existiert $\mathbf{V}^{-1}$ und ist ebenfalls positiv definit.
3. Wenn $\mathbf{V}$ eine $n \times k$ Matrix dann sind $\mathbf{V}'\mathbf{V}$ und $\mathbf{V}\mathbf{V}'$ positiv semidefinit.
4. Wenn $\mathbf{V}$ eine $n \times k$ Matrix und der Rang$(\mathbf{V}) = k$ dann ist $\mathbf{V}'\mathbf{V}$ positiv definit (und damit auch nichtsingulär) (siehe z.B. Johnston & DiNardo 1997, 484).

## B.14 Differentiation linearer und quadratischer Formen

Seien $\mathbf{x}$ und $\mathbf{c}$ $k \times 1$ Spaltenvektoren, dann ist die Ableitung der linearen Funktion

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} c_ix_i$$

nach $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}'$$

Sei $\mathbf{A}$ eine symmetrische $k \times k$ Matrix, dann ist die Ableitung der quadratischen Form

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$$

nach $\mathbf{x}$ gleich

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

ein $1 \times k$ Vektor.

## B.15 Eigenwerte und Eigenvektoren

Frage: Existiert für eine $k \times k$ Matrix $\mathbf{V}$ eine Skalar $\lambda$ und ein Vektor $\mathbf{x}$ der die folgende Gleichung erfüllt?

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Wenn ein solcher Skalar $\lambda$ existiert wird er Eigenwert (auch charakteristische oder latente Wurzel) der Matrix $\mathbf{V}$ genannt, und $\mathbf{x}$ heißt Eigenvektor oder charakteristischer Vektor der Matrix $\mathbf{V}$.

Die Matrixgleichung $\mathbf{V}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kann auch als $\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder

$$(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

geschrieben werden, bzw. ausgeschrieben

$$(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v_{11} - \lambda & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} - \lambda & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares *homogenes* Gleichungssystem.[3]

Eine nicht-triviale Lösung für $\mathbf{x}$ existiert nur, wenn die Matrix $(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I})$ – die charakteristische Matrix von $\mathbf{V}$ – singulär ist, das heißt, wenn die Determinante Null ist

$$|\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} v_{11} - \lambda & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} - \lambda & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dies liefert nach einer Laplace-Expansion ein Polynom vom Grad $k$ in der Variable $\lambda$. Dieses Polynom hat $k$ Nullstellen, die die Eigenwerte (charakteristischen Wurzeln) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ darstellen.

[3] Ein homogenes Gleichungssystem hat die Form $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{A}$ die Datenmatrix ist; ein nicht homogenes Gleichungssystem hat die Form $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} \neq 0$.

Wenn $\mathbf{V}$ symmetrisch ist sind die Eigenwerte immer reelle Zahlen, die positiv oder negativ sein können.

Da jeder Eigenwert $\lambda_i$ eine singuläre Matrix $|\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I}|$ erzeugt ist die Lösung nicht eindeutig, es existieren unendlich viele Lösungen.

Für eine eindeutige Lösung muss zusätzlich eine *Normalisierung* erfolgen, d.h. eine zusätzliche Restriktion auferlegt werden. Diese zusätzliche Bedingung ist

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = 1$$

Durch Einsetzen von $\lambda$ und *Normalisierung* kann für jeden Eigenwert $\lambda_i$ ein eindeutiger Eigenvektor $\mathbf{x}|_{\lambda=\lambda_i}$ berechnet werden.

Die solcherart bestimmten Eigenvektoren $\mathbf{c}_i$ besitzen zwei wichtige Eigenschaften

1. Aus der Normalisierung folgt

$$\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = 1$$

2. Das skalare Produkt

$$\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j = 0 \qquad \text{für } i \neq j$$

oder kürzer

$$\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Achtung: Dies gilt nur, wenn die Matrix $\mathbf{V}$ symmetrisch ist und vollen Rang hat.

Vektoren, deren skalares Produkt gleich Null ist, heißen *orthogonal*. Da das skalare Produkt unterschiedlicher Eigenvektoren gleich Null ist ($\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j = 0$) sind Eigenvektoren symmetrischer Matrizen immer orthogonal. In der graphischen Abbildung bedeutet dies, dass sie rechtwinklig aufeinander stehen. Aufgrund der Normalisierung sind sie auch *orthonormal*.

*Beweis:* Wir betrachten zwei unterschiedliche Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{V}\mathbf{c}_1 = \lambda_1\mathbf{c}_1 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{V}\mathbf{c}_2 = \lambda_2\mathbf{c}_2$$

Wir (vor-)multiplizieren die erste Gleichung mit $\mathbf{c}_2'$ und die zweite Gleichung mit $\mathbf{c}_1'$

$$\mathbf{c}_2'\mathbf{V}\mathbf{c}_1 = \lambda_1\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c}_1'\mathbf{V}\mathbf{c}_2 = \lambda_2\mathbf{c}_1'\mathbf{c}_2$$

Transponieren der zweiten (rechten) Gleichung gibt $\mathbf{c}_2'\mathbf{V}\mathbf{c}_1 = \lambda_2\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1$, da $\mathbf{V}$ annahmegemäß symmetrisch ist. Daraus folgt

$$\lambda_1\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1 = \lambda_2\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1$$

Da die Eigenwerte symmetrischer Matrizen mit vollem Rang alle unterschiedlich sind folgt

$$\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1 = 0$$

Dies gilt für beliebige Paare von Eigenvektoren, d.h. die Eigenvektoren stehen paarweise orthogonal aufeinander.

**Beispiel:** Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Substitution in $(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gibt

$$(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte zu berechnen müssen wir die Determinante dieser Matrix berechnen und Null setzen

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Die Lösungen[4] dieses Polynoms 2. Grades sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$.
Für den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ist die Matrixgleichung $(\mathbf{V} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 2 \\ 2 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die zwei Zeilen linear abhängig sind (die Eigenwerte $\lambda$ wurden ja berechnet um eine singuläre Matrix zu erzeugen!) existieren unendlich viele Lösungen für die Eigenvektor, die die Bedingung der obigen Matrixgleichung

$$x_1 = 2x_2$$

erfüllen.
Für eine eindeutige Lösung wird mit $\sum_{i=1}^{2} x_i^2$ normalisiert, d.h. die Restriktion $x_1^2 + x_2^2 = 1$ auferlegt

$$x_1^2 + x_2^2 = (2x_2)^2 + x_2^2 = 5x_2^2 = 1$$

Daraus folgt $x_2 = 1/\sqrt{5}$ und $x_1 = 2x_2 = 2/\sqrt{5}$. Der erste Eigenvektor ist also

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ganz ähnlich kann für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -2$ der Eigenvektor

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

[4]Wenn $x^2 + px + q = 0$ ist $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

berechnet werden.

Diese Eigenvektoren erfüllen die Bedingungen $\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_i = 1$ und $\mathbf{c}_i'\mathbf{c}_j = 0$ für $i \neq j$

$$\mathbf{c}_1'\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$\mathbf{c}_1'\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{-2}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

Wir haben nun Eigenwerte $\lambda_i$ und Eigenvektoren $\mathbf{c}_i$, die die Gleichung

$$(\mathbf{V} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{V}\mathbf{c}_i - \lambda_i \mathbf{c}_i$$

erfüllen.

Wenn aus allen Eigenvektoren eine $k \times k$ Matrix $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1 \;\; \mathbf{c}_2 \;\; \cdots \mathbf{c}_k)$ geformt wird können alle Lösungen in der Matrizengleichung $\mathbf{VC} = \mathbf{C\Lambda}$ zusammengefasst werden, wobei $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_i$ auf der Hauptdiagonale ist.

Dies kann einfach gezeigt werden:

$$\mathbf{V}\left(\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \\ \vdots \\ c_{kk} \end{pmatrix}\right) = \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1k} \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2k} \end{pmatrix} \cdots \; \lambda_k \begin{pmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \\ \vdots \\ c_{kk} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{k1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1k} & c_{2k} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

oder kompakter

$$\mathbf{VC} = \mathbf{C\Lambda}$$

Wenn $\mathbf{C}$ nicht singulär ist kann diese Gleichung mit $\mathbf{C}^{-1}$ vormultipliziert werden um nach der Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\mathbf{\Lambda}$ zu lösen

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{VC}$$

wobei $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonale ist

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Eigenvektoren $\mathbf{C}$ kann also verwendet werden um die Matrix $\mathbf{V}$ zu diagonalisieren.

Wir erinnern uns, dass die Eigenvektoren symmetrischer Matrizen paarweise orthogonal sind $\mathbf{c}_2'\mathbf{c}_1 = 0$. Aufgrund der Normalisierung ($||\mathbf{c}_i|| = 1$) folgt zudem

$$\mathbf{C}'\mathbf{C} = \mathbf{I}$$

woraus weiter folgt

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C}^{-1}$$

Deshalb gilt für symmetrische Matrizen auch

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}'\mathbf{V}\mathbf{C}$$

oder

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}'$$

Dies kann verwendet werden um zu zeigen, dass für jede symmetrische und positiv definite Matrix eine nichtsinguläre Matrix $\mathbf{P}$ existiert, mit deren Hilfe $\mathbf{V}$ folgendermaßen zerlegt werden kann.

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$$

Beweis: Wenn $\mathbf{V}$ positiv definit ist sind alle Eigenwerte positiv. Deshalb kann die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\mathbf{\Lambda}$ faktorisiert werden

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$$

mit

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

Einsetzen gibt

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{C}' = (\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^{1/2})(\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^{1/2})'$$

Für $\mathbf{P} = (\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^{1/2})$ folgt deshalb $\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$.

## Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Abschließend seien noch einige Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren von positiv definiten Matrizen $\mathbf{V}$ ohne Beweis aufgezählt. Für eine ausführlichere Darstellung siehe jedes Lehrbuch für lineare Algebra oder Johnston/DiNardo 1997, S. 478ff.

1. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Spur von $\mathbf{V}$: $\sum \lambda_i = tr(\mathbf{V})$
2. Das Produkt der Eigenwerte ist gleich der Determinante von $\mathbf{V}$.
3. Der Rang der Matrix $\mathbf{V}$ ist gleich der Anzahl der Eigenwerte ungleich Null.
4. Die Eigenwerte von $\mathbf{V}^2$ sind das Quadrat der Eigenwerte von $\mathbf{V}$; die Eigenvektoren sind gleich.

5. Die Eigenwerte von $\mathbf{V}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{V}$; die Eigenvektoren sind gleich.

6. Jeder Eigenwert einer idempotenten Matrix hat entweder den Wert Null oder Eins.

7. Der Rang einer idempotenten Matrix ist gleich ihrer Spur.

8. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Matrix $\mathbf{V}$ positiv definit ist, ist dass alle Eigenwerte von $\mathbf{V}$ positiv sind.

## B.16 Verteilung Quadratischer Formen

Angenommen $\mathbf{x}$ sein ein $k \times 1$ Vektor mit standardnormalverteilten Zufallsvariablen $X$

$$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

dann ist

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \chi^2(k)$$

Wenn

$$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

ist

$$\frac{X_1^2}{\sigma_2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2} + \cdots + \frac{X_k^2}{\sigma_2} \sim \chi^2(k)$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \chi^2(k) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{x}'(\sigma^2 I)^{-1}\mathbf{x} \sim \chi^2(k)$$

Dabei ist die Matrix der quadratischen Form die Inverse der Varianzmatrix.

Wenn die Zufallsvariablen normalverteilt mit Erwartungswert Null, aber nicht notwendigerweise unabhängig verteilt sind

$$x \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$$

wobei $\mathbf{\Sigma}$ eine positiv definite Matrix ist, gilt immer noch

$$\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} \sim \chi^2(k)$$

aber der Beweis is komplizierter, da die $X$ nicht unabhängig sind.

Dazu ist werden die $X$ in standardnormalverteilte $Y$ Variablen transformiert.

Da $\mathbf{\Sigma}$ positiv definit ist kann die Matrix zerlegt werden in $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{P}'$ wobei $\mathbf{P}$ eine nichtsinguläre $k \times k$ Matrix ist.

Die Inverse ist

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{P}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{P}^{-1})'$$

Wir definieren mit Hilfe der $\mathbf{P}$ Matrix einen $k \times 1$ $\mathbf{y}$ Vektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

Diese $Y$ sind multivariat normalverteilt, da $\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{y}) &= \mathrm{E}\left[\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{x}'(\mathbf{P}^{-1})'\right] \\
&= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{P}^{-1})' \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Da die $Y$ standardnormalverteilt sind gilt

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} \sim \chi^2(k)$$

und weil $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'\mathbf{y} &= \mathbf{x}'(\mathbf{P}^{-1})'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} \sim \chi^2(k)
\end{aligned}$$

Wenn $\mathbf{A}$ eine symmetrische und idempotente Matrix vom Rang $r \leq k$ ist kann diese mit Hilfe der orthogonalen Matrix der Eigenvektoren $\mathbf{Q}$ zerlegt werden

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

d.h. $\mathbf{\Lambda}$ hat $r$ Einsen und $k - r$ Nullen auf der Hauptdiagonale.

Wir definieren wieder für $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}'\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Dann gilt wieder

$$\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{y}) &= \mathrm{E}(\mathbf{y}\mathbf{y}') \\
&= \mathrm{E}\left[\mathbf{Q}'\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{Q}'\right] \\
&= \mathbf{Q}'\mathbf{I}\mathbf{Q} \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ und

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

kann die quadratische Form $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ geschrieben werden als

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_R^2$$

woraus folgt

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \sim \chi^2(R)$$

oder allgemeiner:

> Wenn $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ und $A$ eine symmetrische und idempotente Matrix vom Rang $R$, dann gilt
>
> $$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \sim \chi^2(R)$$

Dieses Ergebnis kann verwendet werden, um die Verteilung der Quadratsumme der Residuen im OLS Modell zu bestimmen.

Wir erinnern uns

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'$$

wobei $\mathbf{M}$ symmetrisch und idempotent ist mit $\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Deshalb ist

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{M}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$$

und

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Wenn $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ folgt

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(r)$$

Da der Rang einer symmetrischen und idempotenten Matrix gleich der Spur (tr) ist folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}(\mathbf{M}) &= \mathrm{tr}\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\right] \\
&= n - \mathrm{tr}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\right] \\
&= n - k
\end{aligned}$$

weshalb

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

### B.16.1 Unabhängigkeit Quadratischer Formen

Sei wieder $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ und $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ symmetrische idempotente Matrizen mit den quadratischen Formen

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})'(\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{B}\mathbf{x})'(\mathbf{B}\mathbf{x})$$

Die Korrelation zwischen den Vektoren $\mathbf{A}\mathbf{x}$ und $\mathbf{B}\mathbf{x}$ ist Null, wenn sie statistisch unabhängig verteilt sind. Die Kovarianz zwischen $\mathbf{A}\mathbf{x}$ und $\mathbf{B}\mathbf{x}$ ist

$$\mathrm{E}\left[(\mathbf{A}\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{x})'\right] = \mathrm{E}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{B}) = \sigma^2\mathbf{A}\mathbf{B}$$

d.h. die Kovarianzen sind Null wenn $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

# B.17 Kronecker Produkt

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$ Matrix und $\mathbf{B}$ eine $k \times l$ Matrix, dann ist das *Kronecker Produkt* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert als

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Jedes einzelne Element der 'linken' Matrix wird mit der kompletten 'rechten' Matrix multipliziert. Das Ergebnis ist eine $mk \times nl$ Matrix.

## Eigenschaften des Kronecker Produkts

- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$

  für $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{k\times l}$, $\mathbf{C}_{n\times p}$, $\mathbf{D}_{l\times q}$.
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$.
- Seien $\mathbf{A}_{m\times m}$ und $\mathbf{B}_{k\times k}$ nichtsinguläre Matrizen, dann ist $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ebenfalls nichtsingulär und es gilt

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$$