

# FORMELSAMMLUNG

## FESTIGKEITSLEHRE

Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften  
Fakultät für Bauingenieurwissenschaften  
Leopold Franzens Universität Innsbruck

©2009

# Kapitel 3

## 3.1 Kinematische Beziehungen

Komponenten des Green'schen Verzerrungstensors

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right]$$

Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Gleitungen

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j$$

Transformation der Komponenten des Verzerrungstensors

$$\varepsilon'_{kl} = \varepsilon_{ij} n_{ki} n_{lj}$$

Hauptnormalverzerrungen und Verzerrungshauptrichtungen

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j &= 0 \\ n_k n_k &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_1^\varepsilon \lambda^2 - I_2^\varepsilon \lambda + I_3^\varepsilon = 0$$

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Hauptnormalverzerrungen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_{11} = \lambda^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon'_{22} = \lambda^{(2)}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon'_{33} = \lambda^{(3)}$$

mittlere Normalverzerrung

$$\varepsilon^m = \frac{1}{3} \varepsilon^{vol} = \frac{1}{3} I_1^\varepsilon$$

deviatorischer Verzerrungstensor

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^m \delta_{ij}$$

Transformationsbeziehungen für den ebenen Verzerrungszustand

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \varepsilon'_{12} &= (-\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Verzerrungshaupttrichtungen (ebener Verzerrungszustand)

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}$$

Hauptnormalverzerrungen (ebener Verzerrungszustand)

$$\varepsilon_{1(2)} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

### 3.2 Kinetische Beziehungen

Grundgesetz der Dynamik

$$d\mathbf{R} = dm \mathbf{b}$$

Cauchy'sche Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho b_i$$

Cauchy'sche Formeln

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$$

Normal- und Schubspannung in der Ebene mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$

$$\sigma_{nn} = \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ji} n_j n_i, \quad \sigma_{nt} = \pm \sqrt{\mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{t}^{(n)} - \sigma_{nn}^2}$$

Transformationsbeziehungen für die Komponenten des Spannungstensors

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{ij} n_{ki} n_{lj}$$

Hauptnormalspannungen und Spannungshaupttrichtungen

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) n_j = 0$$

$$n_k n_k = 1$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + I_1^\sigma \sigma^2 - I_2^\sigma \sigma + I_3^\sigma = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_1^\sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
 I_2^\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\
 I_3^\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Haupt Schubspannungen

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \quad \tau_2 = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}, \quad \tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

Normalspannungen in den Ebenen der Haupt Schubspannungen

$$\sigma_{nn}^{(1)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{nn}^{(2)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{nn}^{(3)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Aufteilung des Spannungstensors in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil

$$\sigma_{ij} = \sigma^m \delta_{ij} + s_{ij}$$

mittlere Normalspannung

$$\sigma^m = \frac{1}{3} I_1^\sigma$$

Transformationsbeziehungen für den ebenen Spannungszustand

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\
 \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\
 \sigma'_{12} &= (-\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)
 \end{aligned}$$

Spannungshauptrichtungen (ebener Spannungszustand)

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

Hauptnormalspannungen (ebener Spannungszustand)

$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

Richtungen der Ebenen, in denen Haupt Schubspannungen wirken (ebener Spannungszustand)

$$\tan 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\sigma_{12}}$$

Haupt Schubspannungen (ebener Spannungszustand)

$$\tau_{\max(\min)} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \pm \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$$

### 3.3 Konstitutive Beziehungen

	$\lambda, G$	$K, G$	$G, \nu$	$E, \nu$	$E, G$
$\lambda =$	$\lambda$	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$G =$	$G$	$G$	$G$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$G$
$K =$	$\lambda + \frac{2}{3}G$	$K$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
$E =$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2G(1+\nu)$	$E$	$E$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{E}{2G} - 1$

Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für orthotrope Werkstoffe, formuliert in den Hauptrichtungen des orthotropen Werkstoffs

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}$$

Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für isotrope Werkstoffe mit Berücksichtigung von Wärmedehnungen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ & & & & 1/G & 0 \\ & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_T \\ \alpha_T \\ \alpha_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (T - T_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T(T - T_0) \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T(T - T_0) \\ \varepsilon_{33} - \alpha_T(T - T_0) \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}$$

Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ & 1/E & 0 \\ & & sym. & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha_T(T - T_0)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_T(T - T_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & sym. & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_T(T - T_0) \\ \varepsilon_{22} - \alpha_T(T - T_0) \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Verallgemeinertes Hooke'sches Gesetz für den ebenen Verzerrungszustand

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & sym. & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - E\alpha_T(T - T_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & sym. & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - (1+\nu)\alpha_T(T - T_0) \\ \varepsilon_{22} - (1+\nu)\alpha_T(T - T_0) \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

# Kapitel 6

## Lineare Stabtheorie

### 6.2 Spannungen und Schnittgrößen

Schnittgrößen

$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA, \\ M_y = \int_A z \sigma_x dA, \quad M_z = - \int_A y \sigma_x dA, \quad M_T = \int_A (-z' \tau_{xy} + y' \tau_{xz}) dA$$

### 6.4 Normalspannungen

Bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem mit dem Ursprung im Querschnittsschwerpunkt und den Achsen  $y$  und  $z$  in der Querschnittsebene

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen  $\eta$  und  $\zeta$  mit den Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_\zeta}{I_\zeta} \eta + \frac{M_\eta}{I_\eta} \zeta$$

#### Flächenmomente 1. Ordnung

um in der Querschnittsebene gelegene Koordinatenachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$

$$S_{\bar{y}} = \int_A \bar{z} dA, \quad S_{\bar{z}} = \int_A \bar{y} dA$$

Koordinaten des Schwerpunkts des Querschnitts

$$\bar{z}_S = \frac{S_{\bar{y}}}{A}, \quad \bar{y}_S = \frac{S_{\bar{z}}}{A}$$

#### Flächenmomente 2. Ordnung

um in der Querschnittsebene gelegene Koordinatenachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$

$$I_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}^2 dA, \quad I_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}^2 dA, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = \int_A \bar{y}\bar{z} dA$$

**Satz von Steiner**

$$I_{\bar{y}} = \bar{z}_S^2 A + I_y, \quad I_{\bar{z}} = \bar{y}_S^2 A + I_z, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = \bar{y}_S \bar{z}_S A + I_{yz}$$

mit den Flächenmomenten 2. Ordnung

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A yz dA$$

um die Koordinatenachsen  $y$  und  $z$ , die durch den Querschnittsschwerpunkt gehen und zu den Koordinatenachsen  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  parallel sind.

Winkel  $\alpha_H$  zwischen der  $y$ -Achse und der  $\eta$ -Achse eines Querschnitts

$$\tan 2\alpha_H = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Extremwerte der Flächenmomente 2. Ordnung

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Haupttradien des Querschnitts

$$i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}, \quad i_\zeta = \sqrt{\frac{I_\zeta}{A}}$$

Polares Flächenmoment 2. Ordnung

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y$$

**Längenänderung eines Stabes bei axialer Beanspruchung**

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x(x) dx = \int_l \frac{N(x)}{E(x)A(x)} dx$$

**Reine Biegung um die  $\eta$ -Achse**

$$\kappa_\zeta = \frac{1}{\rho_\zeta} = -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_\eta}{EI_\eta}$$

$$\varepsilon_x = \kappa_\zeta \zeta$$

**Reine Biegung um die  $\zeta$ -Achse**

$$\kappa_\eta = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}$$

$$\varepsilon_x = -\kappa_\eta \eta$$



**Reine Biegung um eine beliebige Querschnittsachse**

Bezug auf die Hauptachsen des Querschnitts

Winkel  $\delta_H$ , den die Nulllinie mit der  $\eta$ -Achse einschließt

$$\tan \delta_H = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{I_\eta}{I_\zeta} \tan \gamma_H$$

Bezug auf die Achsen eines beliebigen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems mit dem Ursprung im Querschnittsschwerpunkt

Winkel  $\delta$ , den die Nulllinie mit der  $y$ -Achse einschließt

$$\tan \delta = \frac{z}{y} = \frac{I_y \tan \gamma + I_{yz}}{I_z + I_{yz} \tan \gamma}$$

**Beanspruchung durch Normalkraft und Biegemoment**

Gleichung der Nulllinie

$$\frac{e_\eta}{i_\zeta^2} \eta + \frac{e_\zeta}{i_\eta^2} \zeta = -1$$

**Kern des Querschnitts**

Koordinaten des Kraftangriffspunktes bei bekannter Nulllinie

$$e_\eta = -\frac{i_\zeta^2}{\eta_N^{(i)}}, \quad e_\zeta = -\frac{i_\eta^2}{\zeta_N^{(i)}}$$

**Ausschluss von Zugspannungen (Versagende Zugzone)**

Abstand des Kraftangriffspunktes von der Nulllinie

$$e_n = \frac{I_n}{S_n}$$

**Berücksichtigung von Wärmedehnungen**

linearer Verlauf der Temperaturänderung über den Querschnitt

$$T(\eta, \zeta) = T_0 = T^{(s)} - T_0 + \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta} \eta + \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \zeta$$

mit

$$\Delta T_\eta = T_\eta^{(u)} - T_\eta^{(o)}, \quad \Delta T_\zeta = T_\zeta^{(u)} - T_\zeta^{(o)}$$

Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Schnittgrößen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{N}{EA} + \alpha_T (T^{(s)} - T_0) \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} - \alpha_T \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta}, \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{M_\eta}{EI_\eta} - \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \end{aligned}$$

## 6.5 Schubspannungen

**Beziehungen zwischen Belastung und Querkraft bzw. zwischen Querkraft und Biegemoment**

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -q_x + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial x} = -q_y + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_z}{\partial x} = -q_z + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z, \quad \frac{\partial M_z}{\partial x} = -Q_y$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = -q_z + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} = q_y - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

**Querkraftschubspannungen in dünnwandigen offenen Querschnitten**

$$\tau(s) = -\frac{Q_\eta S_\zeta(s)}{I_\zeta b(s)} - \frac{Q_\zeta S_\eta(s)}{I_\eta b(s)}$$

**Querkraftschubspannungen in Vollquerschnitten**

Maximalwert von  $\tau$  in der Schwerachse eines Rechteckquerschnitts für  $b \ll h$  mit  $b$  und  $h$  als der Breite und Höhe des Querschnitts

$$\tau_m = \frac{3 Q_\zeta}{2 A}$$

Maximal- und Minimalwert von  $\tau$  in der Schwerachse für beliebige Rechteckquerschnitte

b/h	0,25	0,5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{max}/\tau_m$	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988	2,582	3,770	6,740	15,65
$\tau_{min}/\tau_m$	0,996	0,983	0,940	0,856	0,805	0,800	0,800	0,800	0,800

Tabelle 6.1:  $\tau_{max}/\tau_m$  und  $\tau_{min}/\tau_m$  für die Schwerachse von Rechteckquerschnitten

**Schubspannungen zufolge reiner Torsion in Vollquerschnitten**

Zusammenhang zwischen dem Torsionsmoment und der Verwindung

$$\vartheta = \frac{M_T}{GI_T}$$

Beziehungen für einen Kreisquerschnitt vom Radius R

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r, \quad \tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} R, \quad I_T = \frac{R^4 \pi}{2}$$

$I_T$  für einen Kreisringquerschnitt mit  $R_a$  als dem Außen- und  $R_i$  als dem Innenradius

$$I_T = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)$$

**Schubspannungen zufolge reiner Torsion in schmalen Rechteckquerschnitten**  
 schmale Rechteckquerschnitte ( $L \gg b$ )

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} b, \quad I_T = \frac{Lb^3}{3}$$

mit  $L$  und  $b$  als der Länge und Breite des Rechtecks

beliebige Rechteckquerschnitte

$$I_T = \kappa_1 Lb^3, \quad \tau_{max} = \kappa_2 \frac{M_T}{b^2 L}$$

L/b	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3	4	5	10	$\infty$
$\kappa_1$	0,140	0,172	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333
$\kappa_2$	4,81	4,52	4,33	4,07	3,88	3,74	3,55	3,43	3,20	3,00

Tabelle 6.2: Reine Torsion prismatischer Stäbe mit Rechteckquerschnitt: Faktoren  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  zur Bestimmung von  $I_T$  und  $\tau_{max}$

**Schubspannungen zufolge reiner Torsion in allgemeinen dünnwandigen offenen Querschnitten**

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} b_{max}, \quad I_T = \frac{1}{3} \sum_i L_i b_i^3, \quad \vartheta = \frac{\tau_{max}}{G b_{max}}$$

**Schubspannungen zufolge reiner Torsion in dünnwandigen einzelligen Hohlquerschnitten**

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2A_u b(s)}, \quad \vartheta = \frac{M_T}{4A_u^2 G} \oint_C \frac{ds}{b(s)}, \quad \varphi(s) = \varphi_0 + \frac{1}{G\vartheta} \int_0^s \frac{t}{b(s)} ds - \int_0^s p(s) ds$$

mit  $A_u$  als der von der Mittellinie des Hohlquerschnitts umschlossenen Fläche

**Schubspannungen zufolge reiner Torsion in dünnwandigen mehrzelligen Hohlquerschnitten**

$$M_T = \sum_{i=1}^n (M_T)_i = 2 \sum_{i=1}^n (A_u)_i t_i$$

Formänderungsbedingung für die Zelle  $i$

$$-t_{i-1} \int_{C_{i-1,i}} \frac{ds}{b(s)} + t_i \oint_{C_i} \frac{ds}{b(s)} - t_{i+1} \int_{C_{i,i+1}} \frac{ds}{b(s)} = 2G\vartheta(A_u)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**Querkraftschubspannungen in dünnwandigen geschlossenen Querschnitten**

Schubfluss

$$t(s) = -\frac{Q_\eta}{I_\zeta} S_\zeta(s) - \frac{Q_\zeta}{I_\eta} S_\eta(s) + t_0$$

Formänderungsbedingung

$$\oint_C \frac{t^*(s) + t_0}{b(s)} ds = 0 \quad \rightarrow \quad t_0 = \frac{-\oint_C \frac{t^*(s)}{b(s)} ds}{\oint_C \frac{1}{b(s)} ds}$$

**Schubmittelpunkt**

folgt aus der Beziehung

$$\int_s t(s) p(s) ds = \eta_M Q_\zeta - \zeta_M Q_\eta .$$

Koordinaten des Schubmittelpunkts bei Bezug auf einen beliebigen Punkt:

$$\eta_M^* = -\frac{1}{I_\eta} \int_l S_\eta(s) p^*(s) ds, \quad \zeta_M^* = \frac{1}{I_\zeta} \int_l S_\zeta(s) p^*(s) ds$$

## 6.7 Biegelinie

**Differentialgleichung der Biegelinie**

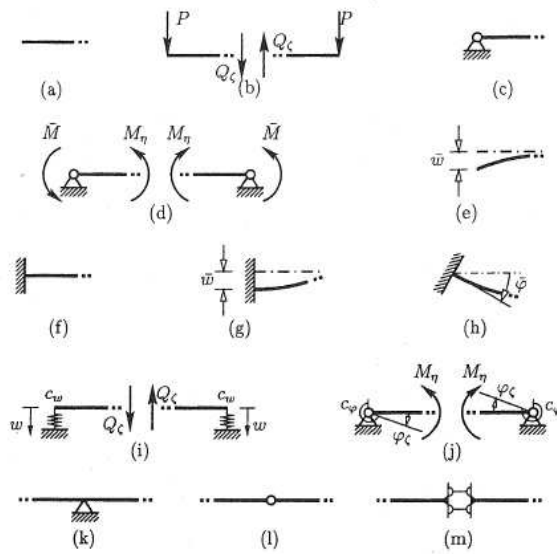
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= +q_\zeta - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_\zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= +q_\eta - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= -Q_\zeta, & \frac{\partial}{\partial x} \left( EI_\zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= -Q_\eta, \\ EI_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -M_\eta, & EI_\zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= +M_\zeta \end{aligned}$$

bei Berücksichtigung einer Temperaturänderung  $\Delta T_\eta$  bzw.  $\Delta T_\zeta$  über die Querschnittshöhe in Richtung der  $\eta$ - bzw. der  $\zeta$ -Koordinate:

$$EI_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_\eta - EI_\eta \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta}, \quad EI_\zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M_\zeta - EI_\zeta \alpha_T \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta}$$

Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie

Rand- und Übergangsbedingungen



		geometrisch		statisch	
		$w$	$\varphi_z$	$M_\eta$	$Q_z$
(a)	Freies Stabende			0	0
(b)	Einzellast $P$ am linken (rechten) freien Stabende			0	$-P$ ( $P$ )
(c)	Frei drehbares, unverschiebliches Stabende	0		0	
(d)	Biegemoment $\bar{M}$ am linken (rechten) frei drehbaren, unverschieblichen Stabende	0		$-\bar{M}$ ( $\bar{M}$ )	
(e)	Verschiebung $\bar{w}$ des frei drehbaren Stabendes	$\bar{w}$		0	
(f)	Eingespanntes Stabende	0	0		
(g)	Verschiebung $\bar{w}$ des eingespannten Stabendes	$\bar{w}$	0		
(h)	Drehung $\bar{\varphi}$ des eingespannten Stabendes	0	$\bar{\varphi}$		
(i)	Linkes (rechtes) frei drehbares, elastisch gestütztes Stabende mit der Federkonstante $c_w$			0	$c_w w$ ( $-c_w w$ )
(j)	Linkes (rechtes) elastisch eingespanntes, unverschiebliches Stabende mit der Drehfederkonstante $c_\varphi$			0	$-c_\varphi \varphi_z$ ( $c_\varphi \varphi_z$ )
(k)	Innenstütze	0	stetig		
(l)	Innengelenk mit Schubübertragung		stetig	0	
(m)	Innengelenk mit Momentenübertragung		stetig		0

## Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie mittels singulärer Funktionen

symbolische Funktion:

$$\langle x - x_i \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq x_i \\ (x - x_i)^n, & n = 0, 1, 2, \dots, \text{ für } x_i \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\int_0^x \langle x - x_i \rangle^n dx = \frac{\langle x - x_i \rangle^{n+1}}{n+1} \quad \text{für } n \geq 0$$

Gleichlast  $q_\zeta$  für  $x \geq x_i$ :

$$EI_\eta \frac{d^4 w}{dx^4} = \dots + q_\zeta \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

Temperaturdifferenz  $\Delta T_\zeta$  für  $x \geq x_i$ :

$$EI_\eta \frac{d^2 w}{dx^2} = \dots - EI_\eta \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

Angriff einer Einzellast  $P_i$  an der Stelle  $x_i$ :

$$EI_\eta \frac{d^3 w}{dx^3} = \dots + P_i \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

Angriff eines Biegemoments  $M_i$  an der Stelle  $x_i$ :

$$EI_\eta \frac{d^2 w}{dx^2} = \dots + M_i \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

Knick  $\Delta \varphi_i$  in der Biegelinie an der Stelle  $x_i$  (Innengelenk):

$$EI_\eta \frac{dw}{dx} = \dots + \Delta \varphi_i EI_\eta \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

Sprung  $\Delta w_i$  in der Biegelinie an der Stelle  $x_i$  (Schubgelenk):

$$EI_\eta w = \dots + \Delta w_i EI_\eta \langle x - x_i \rangle^0 + \dots$$

### Differentialgleichung der Biegelinie für elastisch gebettete Stäbe

Differentialgleichung der Biegelinie:

$$EI_\eta \frac{d^4 w}{dx^4} = q_\zeta - \bar{c}_w w$$

**Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegung**

Differentialgleichung der Biegelinie bei Berücksichtigung des Einflusses der Querkraft  $Q_\zeta$  auf die Durchbiegung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \left( \frac{M_\eta}{EI_\eta} + \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \right) - \frac{\kappa}{GA} q_\zeta$$

Schubbeiwert  $\kappa_\zeta$  für Vollquerschnitte:

$$\kappa_\zeta = \frac{A}{I_\eta^2} \int_A \left( \frac{S_\eta(s)}{b(s)} \right)^2 dA$$

Schubbeiwert  $\kappa_\zeta$  für dünnwandige Querschnitte:

$$\kappa_\zeta = \frac{A}{I_\eta^2} \int_l \frac{(S_0 - S_\eta(s))^2}{b(s)} ds \quad \text{mit} \quad S_0 = \frac{\int_C \frac{S_\eta(s)}{b(s)} ds}{\int_C \frac{1}{b(s)} ds}$$

FESTIGKEITSLERNE

# Kapitel 7

## Prinzipien der virtuellen Arbeiten in der linearen Stabtheorie

### 7.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV)

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für axiale Beanspruchung

$$-\int_l EA \left[ \frac{du}{dx} - \alpha_T(T^{(S)} - T_0) \right] \frac{d(\delta u)}{dx} dx + \int_l q_x \delta u dx = 0$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für ideale Fachwerke

$$-\sum_{e=1}^s N_e \delta(\Delta l_e) + \sum_{i=1}^k \mathbf{P}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)} = 0$$

mit der Stabkraft

$$N = EA \left[ \frac{du}{dx} - \alpha_T(T^{(S)} - T_0) \right] = EA \left[ \frac{\Delta l}{l} - \alpha_T(T^{(S)} - T_0) \right]$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für reine Biegung um eine Querschnittshauptachse

$$-\int_l EI_\eta \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \right) \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx + \int_l q_\zeta \delta w dx = 0$$

Prinzip der virtuellen Verschiebungen für zusammengesetzte Beanspruchung

$$\begin{aligned} & -\int_l EA \left[ \frac{du}{dx} - \alpha_T(T^{(S)} - T_0) \right] \frac{d(\delta u)}{dx} dx \\ & - \int_l EI_\eta \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \right] \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} dx - \int_l EI_\zeta \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha_T \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta} \right] \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dx \\ & + \int_l q_x \delta u dx + \int_l q_\eta \delta v dx + \int_l q_\zeta \delta w dx = 0 \end{aligned}$$



## 7.2 Prinzip der virtuellen Kräfte (PVK)

### Prinzip der virtuellen Kräfte für axiale Beanspruchung

$$-\int_l \delta N \left[ \frac{N}{EA} + \alpha_T (T^{(S)} - T_0) \right] dx + \int_l \delta q_x \bar{u} dx = 0$$

### Prinzip der virtuellen Kräfte für ideale Fachwerke

$$-\sum_{e=1}^s \delta N_e \Delta l_e + \sum_{i=1}^k \delta \mathbf{P}^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{(i)} = 0$$

mit der Längenänderung eines Fachwerkstabes

$$\Delta l = \left[ \frac{N}{EA} + \alpha_T (T^{(S)} - T_0) \right] l$$

### Prinzip der virtuellen Kräfte für reine Biegung um eine Querschnittshauptachse

$$-\int_l \delta M_\eta \left( \frac{M_\eta}{EI_\eta} + \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \right) dx + \int_l \delta q_\zeta \bar{w} dx = 0$$

### Prinzip der virtuellen Kräfte für zusammengesetzte Beanspruchung

$$\begin{aligned} & -\int_l \delta N \left[ \frac{N}{EA} + \alpha_T (T^{(S)} - T_0) \right] dx - \int_l \delta M_\eta \left( \frac{M_\eta}{EI_\eta} + \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta} \right) dx \\ & - \int_l \delta M_\zeta \left( \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} - \alpha_T \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta} \right) dx + \int_l \delta q_x \bar{u} dx + \int_l \delta q_\eta \bar{v} dx + \int_l \delta q_\zeta \bar{w} dx = 0 \end{aligned}$$

# Kapitel 8

## Stabilitätsprobleme

### 8.3 Biegeknicken

#### Biegeknicken bei linear elastischem Materialverhalten

Differentialgleichung der Biegelinie für einen geraden Stab, der durch die zentrische Druckkraft  $P$  beansprucht wird:

$$\frac{d^4(\delta w)}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2(\delta w)}{dx^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI_\eta}$$

kritische Last (Knicklast):  $P_k = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_k^2}$       kritische Spannung:  $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$   
Schlankheit des Stabes:  $\lambda = l_k / i_{min}$

#### Eulersche Knickfälle für einen Stab mit der Länge $l$

Lagerung	Knicklänge $l_k$
beidseitig gelenkige Lagerung	$l$
Ein Ende gelenkig gelagert, das andere Ende eingespannt	$0,7 l$
Beide Enden eingespannt	$0,5 l$
Ein Ende eingespannt, das andere frei	$2 l$

#### Biegeknicken bei nichtlinearem Materialverhalten

kritische Spannung:  $\sigma_k = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}$

#### Exzentrischer Druck

Differentialgleichung der Biegelinie für einen geraden Stab, der durch eine mit der Exzentrizität  $e$  bezüglich der Stabachse angreifende Druckkraft  $P$  beansprucht ist:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = -\alpha^2 e, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI_\eta}$$

# Kapitel 9

## Anstrengungshypothesen

### 9.3 Fließhypothesen

Tresca:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = f_y$$

bzw. für die Stabtheorie

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = f_y$$

Mises:

$$\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = f_y$$

oder  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = f_y$

bzw. für die Stabtheorie

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = f_y$$

### 9.4 Bruchhypothesen

Rankine:

$$\sigma_1 = f_t, \quad \sigma_1 > 0$$

### 9.5 Versagenshypothesen

Mohr-Coulomb:

$$\sigma_{max} \frac{1 + \sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_{min} \frac{1 - \sin \varphi}{2c \cos \varphi} = 1$$

bzw.

$$\frac{\sigma_{max}}{f_t} - \frac{\sigma_{min}}{f_c} = 1$$

Drucker-Prager:

$$\sqrt{s_{ij} s_{ij}} + \frac{\mu}{\sqrt{3}} I_1^\sigma = \sqrt{2} \tau_y$$

bzw.

$$\alpha I_1^\sigma + \sqrt{I_2^s} - k = 0$$

# Kapitel 10

## Nichtlinear elastisches und anelastisches Materialverhalten

### 10.3 Anelastisches Materialverhalten

Maxwell'sches Modell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

mit der Nachgiebigkeitsfunktion und der Relaxationsfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \quad \text{und} \quad R(t) = E \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right)$$

Kelvin-Voigt'sches Modell:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\dot{\sigma}}{\eta}$$

mit der Nachgiebigkeitsfunktion und der Relaxationsfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \quad \text{und} \quad R(t) = E = \textit{konst.}$$

Boltzmann'sches Superpositionsprinzip:

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma^{(0)} + J(t - t_1) \Delta \sigma^{(1)} + J(t - t_2) \Delta \sigma^{(2)} + \dots + J(t - t_i) \Delta \sigma^{(i)}$$

Nachgiebigkeitsfunktion und Kriechfunktion für Beton

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_C(t_0)} + C(t, t_0), \quad C(t, t_0) = \frac{\phi(t, t_0)}{E_C(t_0)}$$

effektiver E-Modul des Betons

$$E_{C,eff}(t) = \frac{E_C(t_0)}{1 + \phi(t, t_0)}$$

# Kapitel 11

## Elasto-plastisches Materialverhalten bei Stäben

### NM-Interaktionsbeziehungen

Rechteckquerschnitte

$$\frac{M_\eta}{M_\eta^{(p)}} + \left( \frac{N}{N^{(p)}} \right)^2 = 1 \quad \text{mit} \quad M_\eta^{(p)} = \frac{1}{4} b h^2 f_y \quad \text{und} \quad N^{(p)} = b h f_y$$

I-Querschnitte mit vernachlässigbarer Stegfläche

$$\frac{M_\eta}{M_\eta^{(p)}} + \frac{N}{N^{(p)}} = 1 \quad \text{mit} \quad M_\eta^{(p)} = A_F h f_y \quad \text{und} \quad N^{(p)} = 2A_F f_y$$

### MQ-Interaktionsbeziehungen für I-Querschnitte

$$\frac{M_\eta}{M_\eta^{(p)}} = 1 - \frac{A_S}{2A - A_S} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{Q_\zeta}{Q_\zeta^{(p)}} \right)^2} \right]$$

$$\text{mit} \quad Q_\zeta^{(p)} = A_S \tau_y = A_S \frac{f_y}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad M_\eta^{(p)} = \frac{1}{4} A_S h f_y + A_F h f_y$$

$$\text{reduzierte Stegbreite} \quad s_{red} = s \sqrt{1 - \left( \frac{Q_\zeta}{Q_\zeta^{(p)}} \right)^2}$$

### NQ-Interaktionsbeziehungen für I-Querschnitte

$$\frac{N}{N^{(p)}} = 1 - \frac{A_S}{A} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{Q_\zeta}{Q_\zeta^{(p)}} \right)^2} \right] \quad \text{mit} \quad N^{(p)} = A_S f_y + 2A_F f_y$$