

Kurze Einführung in die Methode der finiten Elemente

Ergänzung zum Skriptum zur Vorlesung Baustatik 1

1 Einleitung

Die strenge oder analytische Lösung von Aufgaben der Festigkeitslehre und Baustatik ist selbst bei Beschränkung auf kleine Verschiebungen und kleine Verzerrungen sowie linear-elastisches Materialverhalten nur für relativ einfache Probleme möglich. Ist die strenge Lösung eines Problems nicht möglich oder zu aufwändig, greift man auf Näherungslösungen zurück. Die Methode der finiten Elemente (FEM) zählt zu den numerischen Verfahren zur näherungsweise Lösung von Aufgaben der Naturwissenschaften und Technik. Ursachen für die Anwendung numerischer Methoden zur Lösung von Aufgaben der Festigkeitslehre und Baustatik sind

- komplizierte geometrische Eigenschaften einer Struktur (z. B. Wandscheiben oder Deckenplatten mit komplizierter Form der Berandung und/oder Durchbrüchen),
- komplizierte statische Randbedingungen (z. B. der auf ein Schalentragerwerk wirkende Winddruck) und/oder komplizierte kinematische Randbedingungen (z. B. punktgestützte Decke mit unregelmäßigem Stützenraster),
- der Aufbau einer Struktur aus Werkstoffen mit unterschiedlichen Eigenschaften (Verbundkonstruktionen).

Weitere Ursachen für den Einsatz numerischer Methoden sind die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearen Verhaltens und/oder werkstofflich nichtlinearen Verhaltens und/oder zeitabhängigen Verhaltens.

2 Ausgangspunkt

Als Ausgangspunkt zur Bestimmung von Näherungslösungen für Aufgaben der Festigkeitslehre und Baustatik kann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV) dienen. Die mathematische Formulierung dieses Prinzips lautet:

$$-\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{S^t} \bar{t}_i^{(n)} \delta u_i dS^t + \int_V f_i \delta u_i dV = 0 \quad (1)$$

und besagt, dass die Summe der bei einer virtuellen Verschiebung eines Körpers aus der Gleichgewichtslage heraus von den inneren und äußeren Kräften geleisteten virtuellen Arbeit gleich Null ist.

Macht man in (1) von der Identität $\sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$ sowie von $\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{j i,j} \delta u_i$ Gebrauch, so folgt aus dem ersten Term

$$\int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_{ji} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{j i,j} \delta u_i dV . \quad (2)$$

Anwendung des Divergenztheorems für den ersten Term der rechten Seite von (2) führt auf

$$\int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_S \sigma_{ji} n_j \delta u_i dS - \int_V \sigma_{j i,j} \delta u_i dV . \quad (3)$$

Da δu_i auf dem Teil S^u der Oberfläche S mit vorgegebenen Verschiebungsrandbedingungen verschwindet, kann im ersten Term auf der rechten Seite von (3) S durch S^t ersetzt werden. Einsetzen von (3) in (1) führt dann auf die alternative Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:

$$\int_V (\sigma_{j i,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_{S^t} (\bar{t}_i^{(n)} - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i dS^t = 0 . \quad (4)$$

Der erste Term in runden Klammern sind die Gleichgewichtsbedingungen, der zweite Term in runden Klammern die Cauchy'schen Formeln. (4) ist also für beliebige virtuelle Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ erfüllt, wenn für den betreffenden Körper in jedem Punkt $\mathbf{x} \in V$ die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{j i,j} + f_i = 0 \quad (5)$$

und für jeden Punkt $\mathbf{x} \in S^t$ die statischen Randbedingungen

$$\bar{t}_i^{(n)} - \sigma_{ji} n_j = 0 \quad (6)$$

erfüllt sind.

Die Gleichgewichtsbedingungen (5) und die statischen Randbedingungen (6) werden für die strenge (analytische) Lösung einer Aufgabe in jedem Punkt $\mathbf{x} \in V$ bzw. $\mathbf{x} \in S^t$ erfüllt. Im Falle einer Näherungslösung sind die Gleichgewichtsbedingungen (5) und die statischen Randbedingungen (6) nicht in jedem Punkt $\mathbf{x} \in V$ bzw. $\mathbf{x} \in S^t$ erfüllt. Für einen bestimmten Punkt $\mathbf{x} \in V$ erhält man Fehler (oder Residuen) r_i^V in den Gleichgewichtsbedingungen und für einen Punkt $\mathbf{x} \in S^t$ erhält man Fehler (oder Residuen) r_i^S in den statischen Randbedingungen. (5) und (6) sind also durch

$$\sigma_{j i,j} + f_i = r_i^V \quad (7)$$

und

$$\bar{t}_i^{(n)} - \sigma_{ji} n_j = r_i^S \quad (8)$$

zu ersetzen. Einsetzen von (7) und (8) in (4) ergibt

$$\int_V r_i^V \delta u_i dV + \int_{S^t} r_i^S \delta u_i dS^t = 0 . \quad (9)$$

Die Gleichung (9) kann im Rahmen der Methode der gewichteten Residuen folgendermaßen interpretiert werden. Die durch eine Näherungslösung bedingten Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen r_i^V und die Fehler den statischen Randbedingungen r_i^S , gewichtet mit den Testfunktionen δu_i , müssen in der Summe der Integrale über das Volumen V und über den Teil S^t der Oberfläche gleich null sein. Man spricht dann von der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen und der statischen Randbedingungen im gewogenen Integralmittel und bezeichnet die solcherart erhaltene Lösung als schwache Lösung.

3 Grundlegende Schritte der FEM

Die grundlegenden Schritte der Verschiebungsformulierung der FEM werden der Einfachheit halber anhand der Berechnung einer Scheibe (Abb. 1) erläutert. Die Methode der finiten Elemente ist durch die Unterteilung des betrachteten Körpers, im gegebenen Fall durch die Unterteilung der in der Abb. 1(a) gegebenen Scheibe, in Elemente von endlicher Größe, sogenannte finite Elemente, gekennzeichnet (Abb. 1(b)). Während die Verschiebungen in jedem Punkt des Kontinuums (Abb. 1(a)) unbekannt sind, sind bei der mit finiten Elementen diskretisierten Scheibe (Abb. 1(b)) nur die Verschiebungen (d. h. die Verschiebungskomponenten u_1 und u_2) in den mit kleinen Kreisen gekennzeichneten Knotenpunkten der finiten Elemente unbekannt. Der Verlauf der Verschiebungen innerhalb eines einzelnen finiten Elementes wird durch Interpolation der Verschiebungen der Knotenpunkte (Knotenverschiebungen) des betreffenden Elementes näherungsweise beschrieben. Auf diese Weise wird die unendlich große Anzahl von Verschiebungsfreiheitsgraden der Scheibe näherungsweise durch eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden ersetzt.

Für die vorliegende Diskretisierung bietet sich zur Interpolation der Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 innerhalb eines einzelnen Elements ein durch die Knotenverschiebungen festgelegter linearer Verlauf an. Zu diesem Zweck verwendet man Interpolationsfunktionen (Verlaufsfunktionen), die in jeweils einem Knotenpunkt den Wert 1 und den beiden anderen Knotenpunkten des Elementes den Wert 0 annehmen (Abb. 1(d)).

Einsetzen der elementweisen Approximation des Verschiebungszustandes in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen führt (auf ähnliche Weise wie beim Weggrößenverfahren

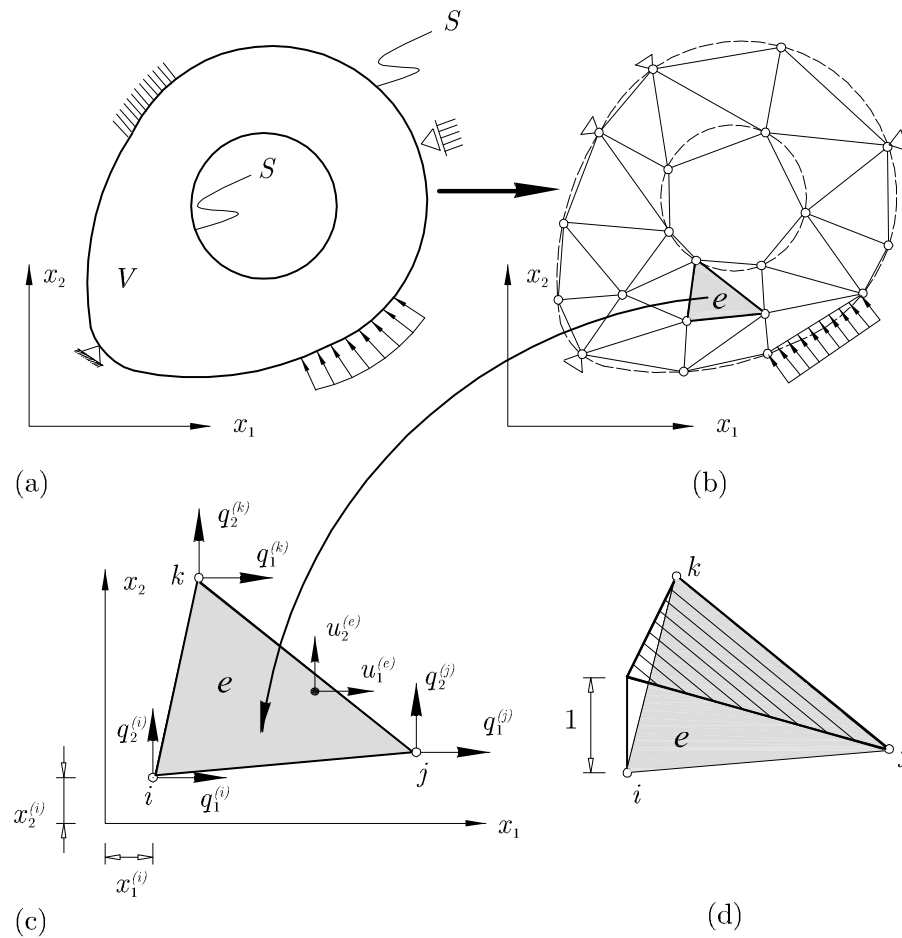


Abb. 1: Zur Anwendung der Methode der finiten Elemente zur Berechnung einer Scheibe: (a) gegebene Scheibe, (b) Diskretisierung mit finiten Elementen, (c) finites Element e , (d) Verlaufsfunktion für den Knoten i des Elements e

für Stabtragwerke) nach mehreren Zwischenschritten auf ein lineares algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Knotenverschiebungen. Die Anzahl der Unbekannten dieses Gleichungssystems ist gleich der Anzahl der unbekanntenen Komponenten der Knotenverschiebungen.

Nach Lösung dieses Gleichungssystems kann mit den bekannten Knotenverschiebungen die Approximation des Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungszustandes für jeden beliebigen Punkt des Körpers berechnet werden. Die Verzerrungen erhält man durch Ableitung der Verschiebungen. Für das gegenständliche Beispiel folgt aus dem linearen Ansatz für den Verlauf der Verschiebungen innerhalb eines Elements ein konstanter Verlauf

der Verzerrungen und somit auch der Spannungen innerhalb des betreffenden Elements. Ein in Wirklichkeit z. B. auftretender starker Anstieg einer Spannungskomponente innerhalb eines Elements kann mit dieser Näherungslösung deshalb nicht dargestellt werden.

Stellt sich eine erhaltene Näherungslösung als unbefriedigend heraus (z. B. durch den Einsatz eines Fehlerschätzers oder durch den Vergleich von zwei Näherungslösungen, die mit FE-Netzen unterschiedlicher Feinheit erhalten wurden), dann kann entweder die Größe der finiten Elemente verkleinert werden, d. h. es wird die Anzahl der finiten Elemente erhöht (h-Verfeinerung), oder man verwendet Elemente mit höherwertigen Verlaufsfunktionen (p-Verfeinerung), z. B. finite Elemente mit quadratischen anstelle von linearen Verschiebungsansätzen oder finite Elemente mit kubischen anstelle von quadratischen Verschiebungsansätzen.

4 Typen von finiten Elementen

Die große Zahl unterschiedlicher finiter Elemente kann grob in Kontinuumselemente, Strukturelemente und spezielle Elemente unterteilt werden.

Kontinuumselemente werden zur Diskretisierung von ebenen (2D) und räumlichen (3D) Aufgabenstellungen der Kontinuumsmechanik verwendet (Abb. 1(c), Abb. 2, Abb. 3(a) und (b)). Sie weisen als Freiheitsgrade im Allgemeinen die Verschiebungskomponenten in den Knotenpunkten eines finiten Elements auf, sie können aber zusätzlich auch rotatorische Freiheitsgrade (“drilling degrees of freedom“) aufweisen.

Strukturelemente dienen zur Diskretisierung von Stäben, Platten und Schalen. Da diesen Elementen eine kinematische Hypothese zugrunde liegt, genügt es, Knotenpunkte der finiten Elemente nur auf der Achse eines Stabes bzw. auf der Mittelfläche einer Schale oder Platte anzuordnen, wobei die Freiheitsgrade in einem Knotenpunkt aus Verschiebungen und Verdrehungen bestehen. Schalenelemente können durch Degeneration des 3D Kontinuums erhalten werden (Abb. 3). Dabei werden ausgehend von einem 3D Kontinuumselement folgende Annahmen getroffen:

- Die lokalen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 liegen in der Mittelfläche der Schale. Somit sind die beiden Laibungen der Schale durch $\xi_3 = +1$ und $\xi_3 = -1$ festgelegt (Abb. 3).
- Es wird die kinematische Hypothese von Reissner-Mindlin zugrunde gelegt. Sie besagt, dass in jeder Konfiguration alle Punkte mit identen Werten von ξ_1 und ξ_2 , aber unterschiedlichen Werten von ξ_3 , auf einer Geraden liegen. Das bedeutet, dass - analog zum gedrunenen (d. h. schubweichen) Stab - über die Schalendicke konstante

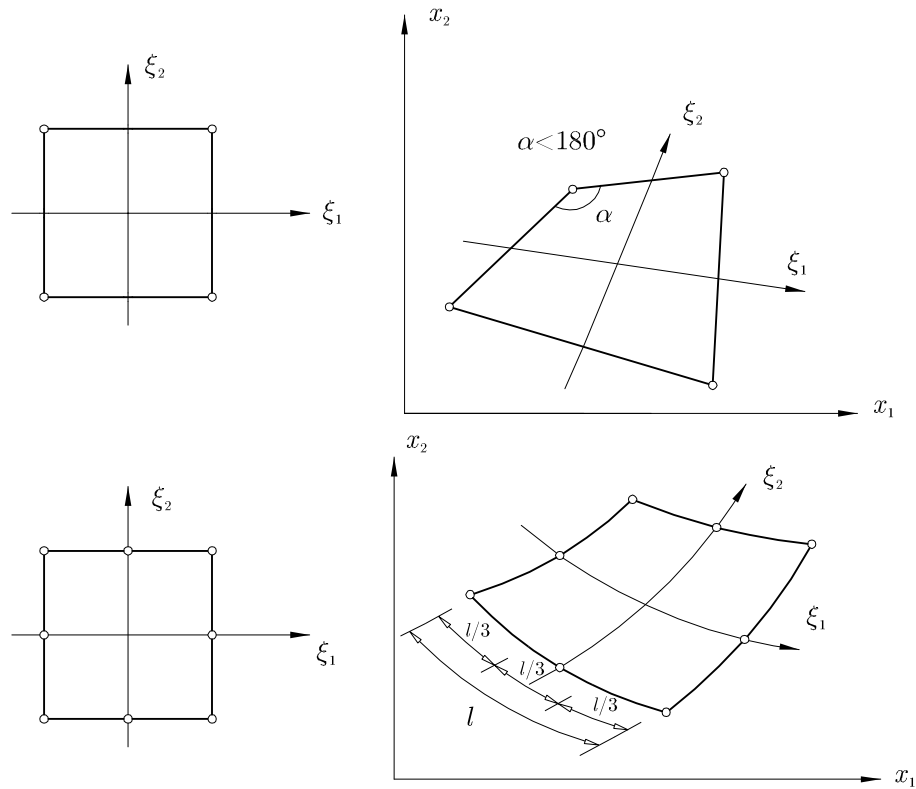


Abb. 2: Beispiele für 2D isoparametrische Kontinuums-elemente: Zulässige Abbildungen von Stammelementen in geometrisch verzerrte Elemente: 4-Knoten Element mit bilinearer Verschiebungsinterpolation (oben), 8-Knoten Element mit quadratischer Verschiebungsinterpolation (unten)

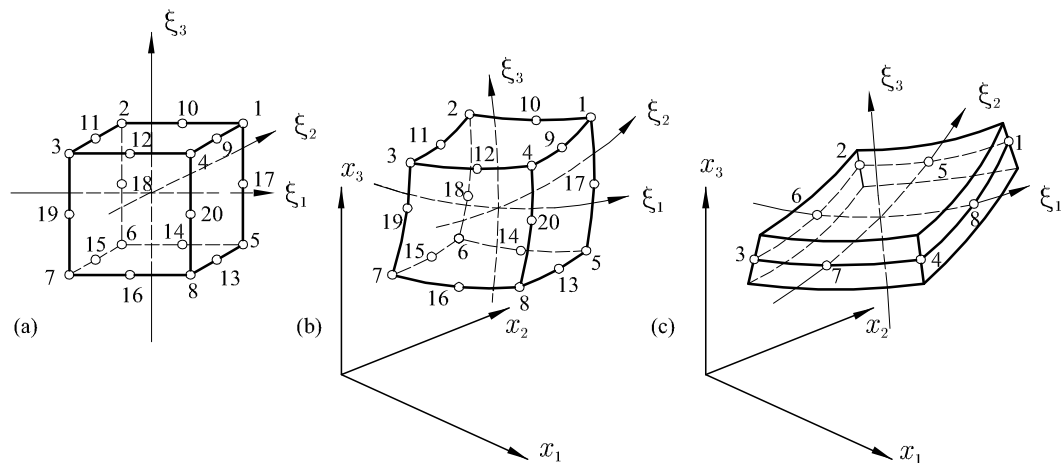


Abb. 3: Beispiel für ein 3D Kontinuums-element und ein Schalenelement: (a) 3D Stammelement, (b) 3D isoparametrisches Kontinuums-element mit 20 Knoten und quadratischer Verschiebungsinterpolation, (c) Schalenelement mit 8 Knoten

Schubverzerrungen berücksichtigt werden. Diese kinematische Hypothese hat zur Folge, dass die krummlinigen Koordinatenlinien ξ_3 zu geraden Linien degenerieren und - weil diese Annahme auch für den verformten Zustand gilt - das Verschiebungsfeld über die Dicke linear verläuft.

- Bei Beschränkung auf kleine Verzerrungen wird die Schalendicke als unveränderlich vorausgesetzt, d. h. die Verzerrung ε_{33} in Dickenrichtung wird vernachlässigt.

Da eine Platte als Sonderfall einer Schale mit ebener Mittelfläche betrachtet werden kann, können solche Schalenelemente natürlich auch für die Berechnung von Platten verwendet werden. Das im FE-Programm RFEM verfügbare Schalenelement (Abb. 4) beinhaltet einen Membran- und Biegeanteil (Abb. 5).

5 Durchführung einer FE-Berechnung

Eine FE-Berechnung besteht im Wesentlichen aus drei Teilen:

1. **Erstellung der Eingabedatei:** Das sogenannte "Preprocessing" erfolgt mit Hilfe der grafischen Benutzeroberfläche des FE-Programms. Dabei sind (i) das finite Elemente Netz mit der Zuordnung der Knotenpunkte zu den einzelnen Elementen und den Koordinaten aller Knotenpunkte zu erstellen, weiters (ii) die Materialeigenschaften der finiten Elemente festzulegen und (iii) die Randbedingungen für die Verschiebungen und die Kräfte anzugeben.
2. **Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems:** Damit werden die Knotenwerte der Verschiebungen und Verdrehungen berechnet.
3. **Auswertung, Kontrolle und Interpretation der Ergebnisse:** Das sogenannte "Postprocessing" erfolgt wieder mit Hilfe der grafischen Benutzeroberfläche des FE-Programms. Eine erste Kontrolle der berechneten Knotenverschiebungen kann anhand einer Darstellung der verformten Struktur durchgeführt werden. Damit können die berechneten Verschiebungen auf Plausibilität überprüft werden. Globale Gleichgewichtskontrollen dienen zur Überprüfung, ob alle Lasten richtig erfasst wurden. Weiters können Verteilungen der Verzerrungen, Spannungen, Hauptverzerrungen und Hauptspannungen sowie die Hauptspannungstrajektorien für die gesamte Struktur oder für Teilbereiche dargestellt werden und diese Verteilungen sowie die Verteilung von Schnittgrößen in ausgewählten Schnitten dargestellt werden.

Zusammengesetztes Schalenelement

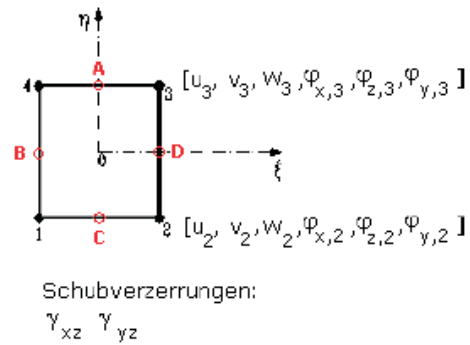
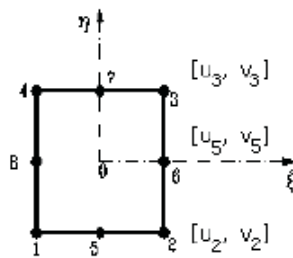


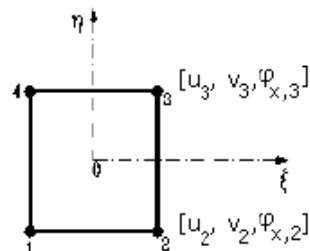
Abb. 4: Im FE-Programm RFEM verfügbares Schalenelement

Membrananteil

(Serendipity Ansätze)

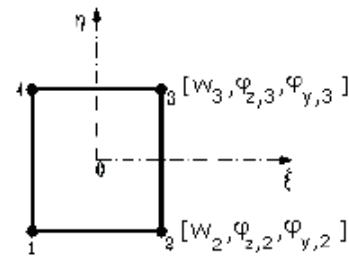


Elimination der Zwischenknoten



Biegeanteil (schubweich)

(MITC4 nach Bathe)



Anbindung der transversalen
Schubverzerrungen in den
Punkten A, B, C, D

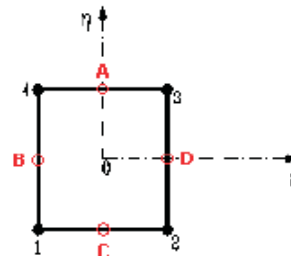


Abb. 5: Membran- und Biegeanteil des Schalenelements im FE-Programm RFEM

6 Beispiel: FE-Berechnung einer Scheibe mit Loch

Als Beispiel für die Anwendung der Methode der finiten Elemente dient eine Rechteckscheibe mit kreisrundem Loch unter konstanter Zugbelastung entlang der beiden vertikalen Ränder (Abb. 6). Die Abmessungen, die Belastung und die Materialparameter können der Tabelle 1 entnommen werden.

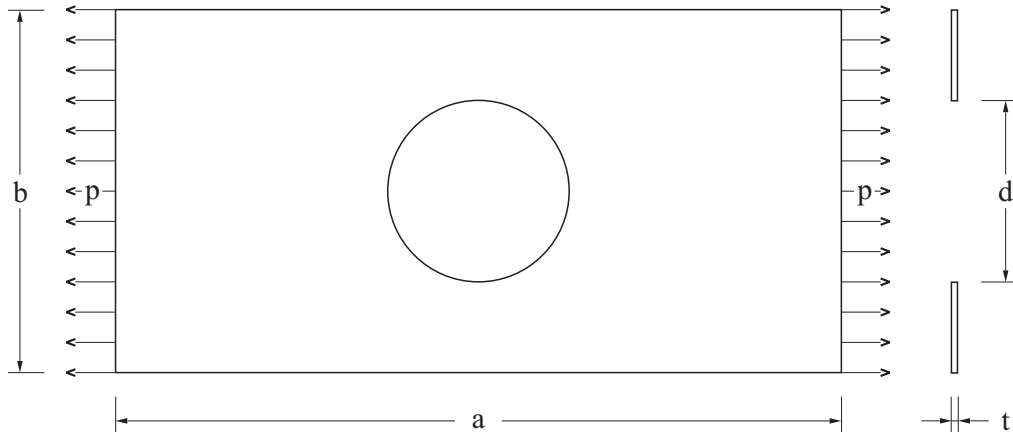


Abb. 6: Scheibe mit kreisförmigem Loch - Prinzipskizze

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge	a	120	cm
Breite	b	60	cm
Dicke	t	1	cm
Lochdurchmesser	d	30	cm
Belastung	p	5	kN/cm ²
E-Modul	E	20000	kN/cm ²
Querdehnzahl	ν	0.3	-

Tabelle 1: Abmessungen, Belastung und Materialparameter

Da die in der Abb. 6 dargestellte Scheibe mit kreisförmigem Loch sowohl hinsichtlich der Geometrie als auch hinsichtlich der Belastung eine doppelte Symmetrie aufweist, genügt es, unter Berücksichtigung entsprechender Rand- bzw. Symmetriebedingungen für die Verschiebungen, ein Viertel der Scheibe mit finiten Elementen zu diskretisieren.

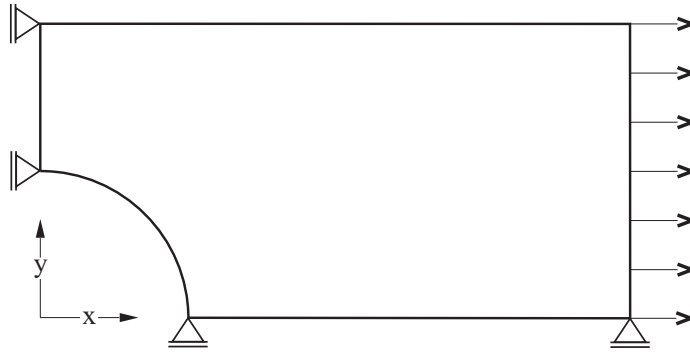


Abb. 7: Für die FE-Berechnung betrachteter Teil der Scheibe

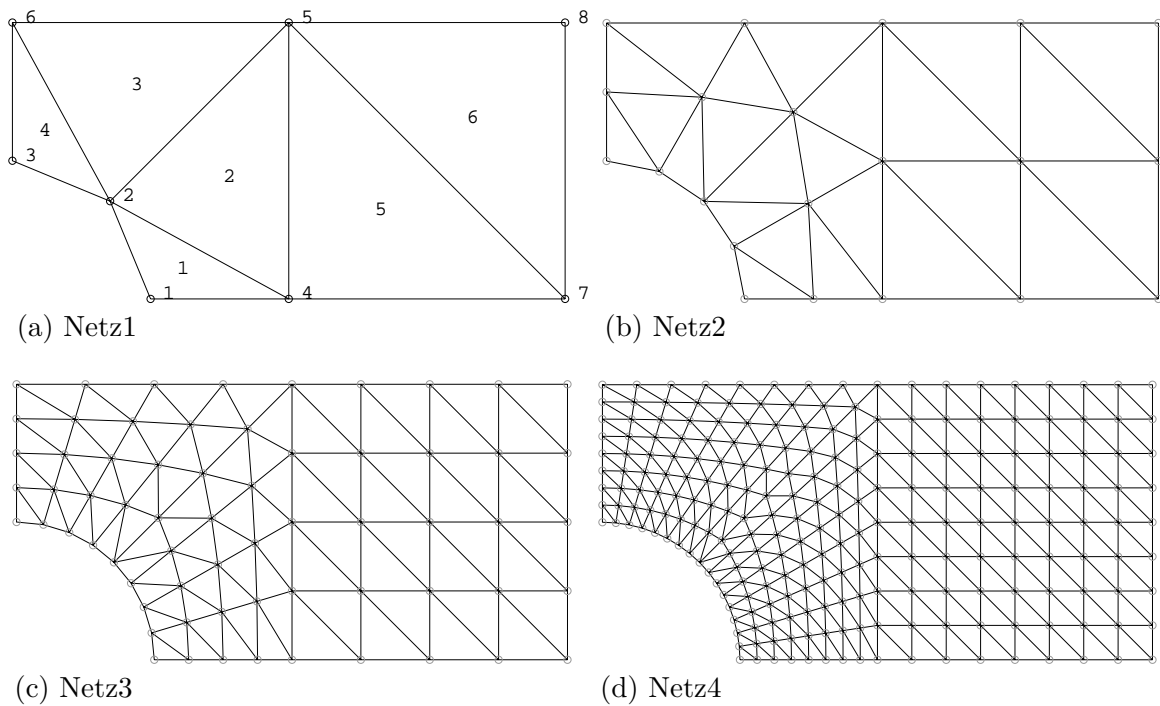


Abb. 8: Netze 1-4 für die Berechnung mit CST-Elementen

Das für die numerische Berechnung betrachtete Viertel der Scheibe ist mit dem gewählten Koordinatensystem und den entsprechenden Randbedingungen in der Abb. 7 wiedergegeben (die eingetragenen Verschiebungsrandbedingungen gelten jeweils für die gesamte Symmetrieachse). Dieser Berechnungsausschnitt wird mit Dreieckselementen mit linearen Verschiebungsansätzen (Abb. 1(c)) diskretisiert. Abb. 8(a) zeigt das größte FE-Netz.

Das in der Abb. 8(b) dargestellte FE-Netz wird durch Halbierung der Seitenkanten des größten Netzes erhalten. Auf analoge Weise werden die beiden weiteren FE-Netze erhalten. Mit diesen sehr einfachen Dreieckselementen ist es nur möglich, die kreisförmige Berandung mittels eines Polygons zu approximieren und konstante Verzerrungen und Spannungen innerhalb eines Elementes darzustellen (tatsächlich würden sich für die Diskretisierung dieser Scheibe isoparametrische finite Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz anbieten, die eine genauere Erfassung der kreisförmigen Berandung des Loches ermöglichen).

Durch die Verwendung von mehreren FE-Netzen unterschiedlicher Feinheit (d. h. mit einer unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden) wird die Konvergenz der numerischen Lösung zu der für dieses Beispiel vorhandenen analytischen Lösung für eine unendlich lange Scheibe mit der selben Breite und Dicke und identischen Lochabmessungen gezeigt. Aufgrund des SAINT-VENANTSchen Prinzips kann in der Umgebung des Loches der Unterschied zwischen einer Rechteckscheibe mit den gegebenen Abmessungen und einem unendlich langen Streifen mit der selben Breite als hinreichend gering erachtet werden.

Einige Ergebnisse der FE-Berechnung sind im Folgenden dargestellt. Im Rahmen der Verschiebungsformulierung der FEM stellen die Verschiebungen der Knotenpunkte der finiten Elemente die primären Lösungsvariablen dar. Sie sind mit 150-facher Überhöhung in der Abb. 9 dargestellt (graue Linien...unverformtes Netz, schwarze Linien...verformtes Netz).

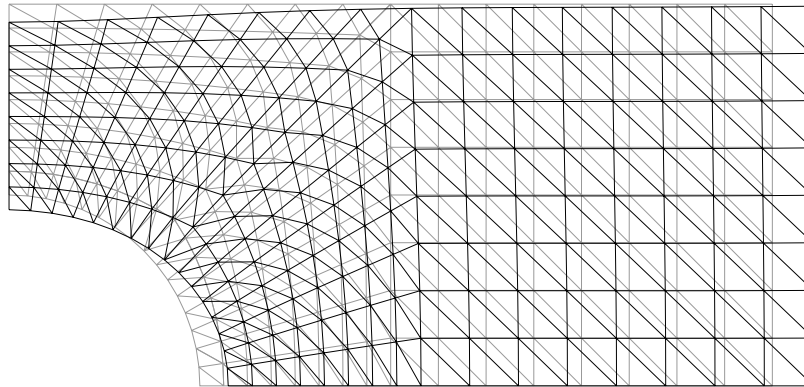


Abb. 9: Unverformte (grau) und verformte (schwarz) Struktur (Netz4)

Die Verläufe der Normalspannungen σ_x entlang der y -Achse in Abb. 10 zeigen deutlich die konstanten Spannungen innerhalb eines einzelnen finiten Elementes. Während bei der

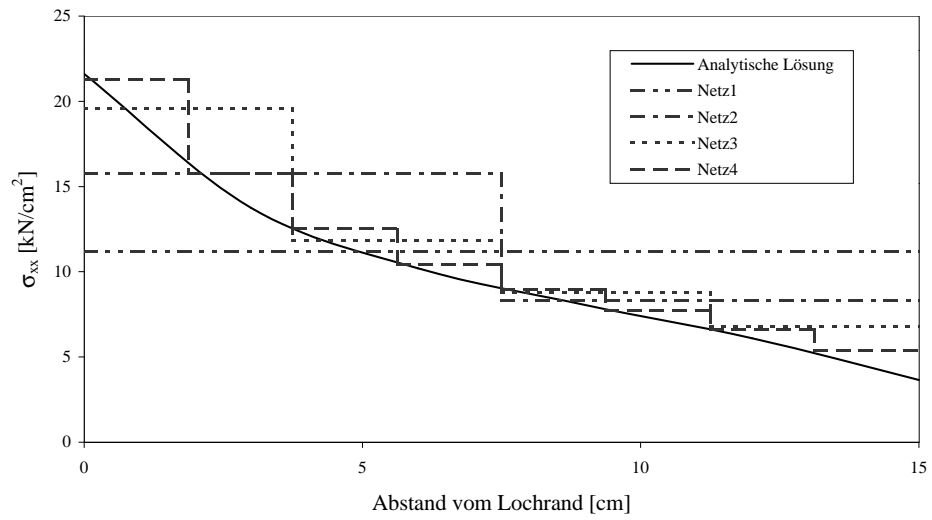
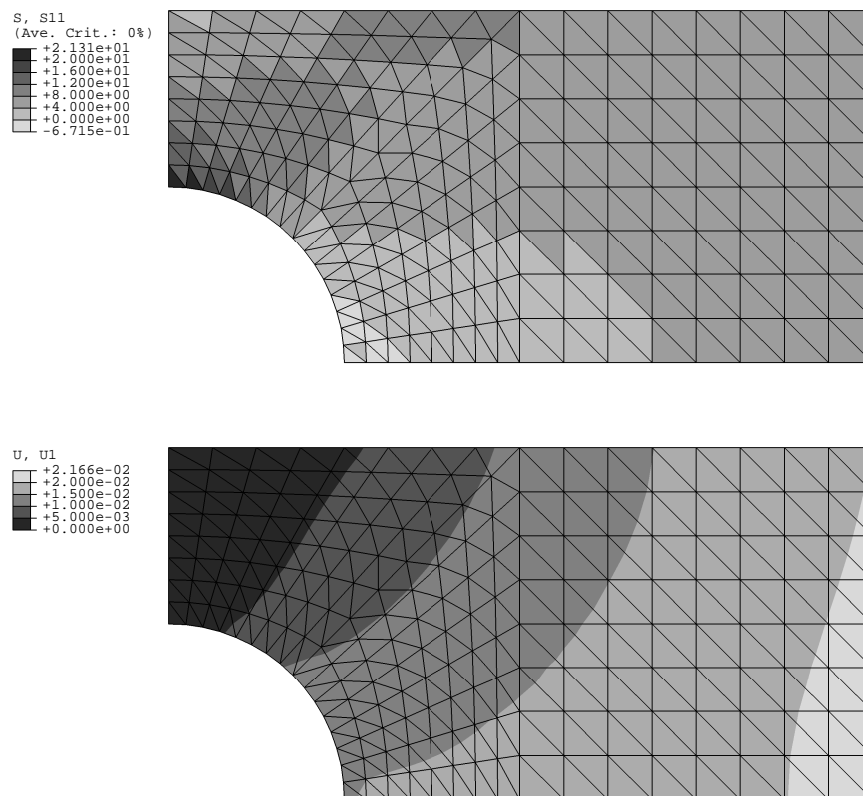
Abb. 10: σ_x entlang der y-Achse

Abb. 11: Normalspannungen und Verschiebungen in Richtung der x-Achse

Verwendung eines groben FE-Netzes damit der tatsächliche Verlauf der Spannungen nur unzureichend wiedergegeben werden kann, nähern sich die numerischen Ergebnisse mit zunehmender Netzfeinheit der analytischen Lösung an (siehe Abb. 10 sowie Tab. 2).

	Elemente	Knoten	Freiheitsgrade	$u_1(x = \frac{d}{2}, y = 0)$	$\sigma_x(x = 0, y = \frac{d}{2})$
Netz 1	6	8	11	$8,93 \cdot 10^{-3}$ cm	11,21 kN/cm ²
Netz 2	24	21	34	$11,92 \cdot 10^{-3}$ cm	15,77 kN/cm ²
Netz 3	96	65	116	$13,92 \cdot 10^{-3}$ cm	19,59 kN/cm ²
Netz 4	384	225	424	$14,86 \cdot 10^{-3}$ cm	21,31 kN/cm ²

Tabelle 2: Konvergenzstudie

Die beiden Konturplots in Abb. 11 zeigen die mittels des feinsten Netzes berechnete Verteilung der Normalspannung σ_x sowie die Verteilung der Verschiebungskomponente u_1 . Bei den dargestellten Spannungen ist zu erkennen, dass die Spannungen innerhalb eines Elementes konstant sind. Die zwischen den einzelnen Elementen auftretenden Spannungssprünge werden aber oftmals bei der Ergebnisdarstellung geglättet, so dass diese Eigenschaft der FE-Lösung für den Anwender nicht sichtbar ist.

Literatur

- [1] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, 6th ed., Elsevier, 2005.
- [2] Bathe K.-J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [3] Knothe K. und Wessels H.: *Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure*, 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [4] *A Finite Element Primer*, 3. Reprint, published by NAFEMS, Birniehill, East Kilbride, Glasgow, G75 0QU, 1992.
- [5] *Guidelines to Finite Element Practice*, published by NAFEMS, Birniehill, East Kilbride, Glasgow, G75 0QU, 1992.
- [6] *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, E. Hinton (Ed.), published by NAFEMS, Birniehill, East Kilbride, Glasgow, G75 0QU, 1992.

- [7] *A Finite Element Dynamics Primer*, D. Hitchings (Ed.), published by NAFEMS, Birniehill, East Kilbride, Glasgow, G75 0QU, 1992.
- [8] Hofstetter G., *Numerische Methoden der Festigkeitslehre*, Vorlesungsskriptum, Universität Innsbruck, 2005.
- [9] Wriggers P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [10] Belytschko T., Liu W. K. and Moran B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* J. Wiley & Sons, New York, 2000.
- [11] Rombach G.: *Anwendung der Finite Elemente Methode im Betonbau - Fehlerquellen und ihre Vermeidung*, 2. überarbeitete Auflage, Ernst und Sohn, Berlin, 2006.
- [12] Kemmler R. und Ramm E.: *Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente*, Betonkalender 2001, BK2, Ernst & Sohn, 2001, S. 143-208.