

Formelsammlung zur Vorlesung

B a u s t a t i k

Arbeitsbereich für Festigkeitslehre und Baustatik
Institut für Grundlagen der Technischen Wissenschaften

Version: 30. April 2019

2 Einteilung und Aufbau von Stabtragwerken

2.1 Regeln zur Konstruktion des Polplans

1. Ein Auflager einer Scheibe in Form eines unverschieblichen Gelenkes ist der Drehruhepunkt (oder Momentanpol bzw. Hauptpol) für diese Scheibe.
2. Ein Gelenk zwischen zwei Scheiben ist der gemeinsame relative Drehpol (Nebenpol) für diese beiden Scheiben.
3. Der Drehruhepunkt für eine Scheibe mit einem verschieblichen gelenkigen Auflager liegt auf einer Normalen zur Bewegungsrichtung, die durch dieses verschiebliche Auflager vorgegeben ist.
4. Die Hauptpole zweier Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden.
5. Die Nebenpole dreier Scheiben liegen auf einer Geraden.

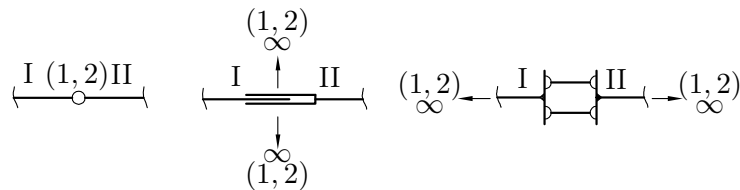


Abb. 1: Gelenktypen mit Nebenpolen: Biegemomentengelenk, Normalkraftgelenk, Querkraftgelenk.

2.2 Statische Unbestimmtheit eines Stabtragwerks

Abzählkriterium für den Grad der statischen Unbestimmtheit eines Stabtragwerks

$$n = (a + e \cdot s) - (k \cdot g + r)$$

- n Grad der statischen Unbestimmtheit
- a Anzahl der Auflagerreaktionen
- e Anzahl der Stabelemente
- s Anzahl der unabhängigen Stabendschnittgrößen pro Stabelement
- k Anzahl der Knoten
- g Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen
- r Anzahl der Nebenbedingungen

3 Berechnung statisch bestimmter Stabtragwerke

3.1 Ermittlung von Weggrößen

Prinzip der virtuellen Kräfte (PVK) für ebene Stabtragwerke

Bestimmung der Verschiebungskomponente $w^{(a)}$ an einer bestimmten Stelle a eines ebenen Stabtragwerks

$$\begin{aligned} \delta P^{(a)} w^{(a)} = & \sum_e \left[\int_{l_e} \delta N \frac{N}{EA} dx_e + \int_{l_e} \delta M_\eta \frac{M_\eta}{EI_\eta} dx_e + \int_{l_e} \delta Q_\zeta \frac{Q_\zeta}{GA_{Q_\zeta}} dx_e \right] \\ & + \sum_e \left[\int_{l_e} \delta N \varepsilon_0 dx_e + \int_{l_e} \delta M_\eta \kappa_{\zeta 0} dx_e \right] \\ & + \sum_i \delta N^{(i)} \frac{N^{(i)}}{c_u^{(i)}} + \sum_j \delta M^{(j)} \frac{M^{(j)}}{c_\varphi^{(j)}} \\ & + \sum_u \delta N^{(u)} \Delta l^{(u)} + \sum_v \delta M_\eta^{(v)} (-\Delta \varphi_\zeta^{(v)}) + \sum_w \delta Q_\zeta^{(w)} \Delta w^{(w)} \\ & - \sum_k \left(\delta P_x^{(k)} \bar{u}^{(k)} + \delta P_\zeta^{(k)} \bar{w}^{(k)} \right) - \sum_m \delta M_\eta^{(m)} \bar{\varphi}_\zeta^{(m)} \end{aligned}$$

Spannungsunabhängige Dehnung und Verkrümmung der Stabachse zufolge Temperaturänderungen

$$\varepsilon_0 = \alpha_T T^{(*)}, \quad \kappa_{\zeta 0} = \alpha_T \frac{\Delta T_\zeta}{h_\zeta}$$

mit

$$T^{(*)} = (T^{(S)} - T_0)$$

und

$$\Delta T_\zeta = T_\zeta^{(u)} - T_\zeta^{(o)}.$$

Dehnung der Stabachse

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} + \varepsilon_0$$

Änderung des Querschnittsdrehwinkels

$$\varphi_{\zeta, x} = -\frac{M_\eta}{EI_\eta} - \kappa_{\zeta 0}$$

mittlere Gleitung

$$\gamma_{m\zeta} = \frac{Q_\zeta}{GA_{Q_\zeta}}$$

Die Integrale können mit Hilfe der Integraltafeln (Tab. 1) ausgewertet werden.

Prinzip der virtuellen Kräfte für räumliche Stabtragwerke

$$\begin{aligned}
 & - \sum_e \left[\int_{l_e} \delta N \frac{N}{EA} dx_e + \int_{l_e} \delta M_\eta \frac{M_\eta}{EI_\eta} dx_e + \int_{l_e} \delta M_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} dx_e + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{l_e} \delta Q_\zeta \frac{Q_\zeta}{GA_{Q_\zeta}} dx_e + \int_{l_e} \delta Q_\eta \frac{Q_\eta}{GA_{Q_\eta}} dx_e + \int_{l_e} \delta M_T \frac{M_T}{GI_T} dx_e \right] + \\
 & - \sum_e \left[\int_{l_e} \delta N \varepsilon_0 dx_e + \int_{l_e} \delta M_\eta \kappa_{\zeta 0} dx_e + \int_{l_e} \delta M_\zeta \kappa_{\eta 0} dx_e \right] + \\
 & + \sum_k \left(\delta P_x^{(k)} u^{(k)} + \delta P_\eta^{(k)} v^{(k)} + \delta P_\zeta^{(k)} w^{(k)} \right) + \\
 & + \sum_m \left(\delta M_\eta^{(m)} \varphi_\zeta^{(m)} + \delta M_\zeta^{(m)} \varphi_\eta^{(m)} + \delta M_T^{(m)} \varphi_x^{(m)} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Spannungsunabhängige Verkrümmung

$$\kappa_{\eta 0} = -\alpha_T \frac{\Delta T_\eta}{h_\eta}$$

mit

$$\Delta T_\eta = T_\eta^{(u)} - T_\eta^{(o)} .$$

Änderung des Querschnittsdrehwinkels

$$\varphi_{\eta,x} = \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} + \kappa_{\eta 0}$$

Verwindung

$$\vartheta = \frac{M_T}{GI_T}$$

mittlere Gleitung

$$\gamma_{m\eta} = \frac{Q_\eta}{GA_{Q_\eta}}$$

3.2 Bestimmung der Biegelinie eines ebenen Stabtragwerks

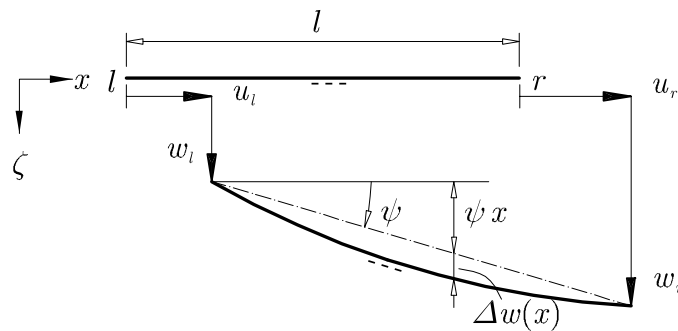


Abb. 2: Unverformter ebener gerader Stababschnitt und zugehöriger verformter Stababschnitt nach Vorzeichenkonvention Stabtheorie.

3 Berechnung statisch bestimmter Stabtragwerke

Stabdrehwinkel nach Vorzeichenkonvention Stabtheorie

$$\psi = \frac{w_r - w_\ell}{l}$$

Durchbiegung eines beliebigen Punktes eines Stabelements

$$w(x) = w_\ell + \psi x + \Delta w(x)$$

mit $\Delta w(x)$ gemäß den Omega-Tafeln in Tab. 2.

Durchbiegung eines Stabelements zufolge Querkraft bei konstanter Querbelastung:

$$\Delta w_Q(x) = \frac{q_\zeta}{GA_{Q_\zeta}} \frac{1}{2} x(l-x)$$

4 Berechnung statisch unbestimmter Stabtragwerke

4.1 Kraftgrößenverfahren

Gleichungssystem zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen

$$\begin{bmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & \cdots & f_{1n}^{(0)} \\ f_{21}^{(0)} & f_{22}^{(0)} & \cdots & f_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}^{(0)} & f_{n2}^{(0)} & \cdots & f_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{1P}^{(0)} \\ f_{2P}^{(0)} \\ \vdots \\ f_{nP}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Schnittgrößen am statisch unbestimmten System

$$\begin{aligned} N(x) &= N_P^{(0)}(x) + X_1 N_1^{(0)}(x) + X_2 N_2^{(0)}(x) + \dots + X_n N_n^{(0)}(x) , \\ Q(x) &= Q_P^{(0)}(x) + X_1 Q_1^{(0)}(x) + X_2 Q_2^{(0)}(x) + \dots + X_n Q_n^{(0)}(x) , \\ M(x) &= M_P^{(0)}(x) + X_1 M_1^{(0)}(x) + X_2 M_2^{(0)}(x) + \dots + X_n M_n^{(0)}(x) . \end{aligned}$$

4.2 Weggrößenverfahren für ebene Stabtragwerke

Vorzeichenkonvention Weggrößenverfahren

Für die Berechnung mittels Weggrößenverfahren und Drehwinkelverfahren wird die Vorzeichenkonvention gemäß Abb. 3 für die Stabendschnittgrößen und -weggrößen eingeführt.

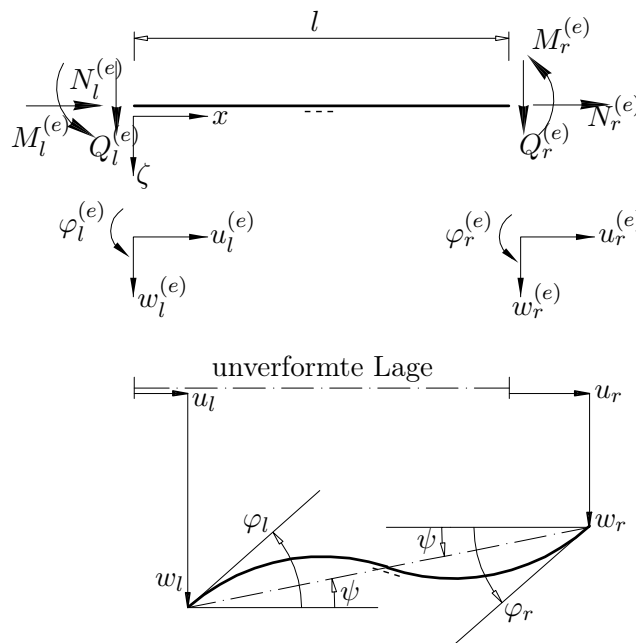


Abb. 3: Ebenes unbelastetes schlankes Stabelement – Vorzeichenkonvention Weggrößenverfahren

Vorgangsweise für die Berechnung

1. Aufstellen der Vektoren der Knotenweggrößen \mathbf{U} , des Knotenkraftvektors \mathbf{P} , der Stabendschnittgrößen $\mathbf{s}^{(e)}$ und der Stabendweggrößen $\mathbf{v}^{(e)}$

Stabendschnittgrößen $\mathbf{s}^{(e)}$ und Stabendweggrößen $\mathbf{v}^{(e)}$ für den Stab e :

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ Q_\ell^{(e)} \\ M_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \\ Q_r^{(e)} \\ M_r^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ w_\ell^{(e)} \\ \varphi_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \\ w_r^{(e)} \\ \varphi_r^{(e)} \end{Bmatrix}$$

2. Bestimmung des Zusammenhangs zwischen den Knotenweggrößen \mathbf{U} und den Stabendweggrößen $\mathbf{v}^{(e)}$ für den Stab e

$$\mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{U}$$

3. Ermittlung des Zusammenhangs zwischen den Stabendweggrößen und den Stabendschnittgrößen

Zusammenhang zwischen den Stabendschnittgrößen $\mathbf{s}^{(e)}$ und den Stabendweggrößen $\mathbf{v}^{(e)}$ des Stabes e :

$$\mathbf{s}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)} + \mathbf{s}_0^{(e)}$$

mit den Volleinspannkraftgrößen zufolge von Stabeinwirkungen $\mathbf{s}_0^{(e)}$ gemäß Tab. 3, 4 und 5.

4. Aufstellen und Lösung des Gleichungssystems zur Bestimmung der unbekanntenen Knotenweggrößen

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}$$

mit

$$\mathbf{K} = \sum_{(e)} (\mathbf{A}^{(e)})^T \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_K + \mathbf{P}_E,$$

$$\mathbf{P}_E = - \sum_{(e)} (\mathbf{A}^{(e)})^T \mathbf{s}_0^{(e)}.$$

5. Ermittlung der Stabendschnittgrößen aus den Knotenweggrößen

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)}\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{s}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\mathbf{v}^{(e)} + \mathbf{s}_0$$

Zusammenhang zwischen Stabendschnittgrößen und Stabendweggrößen für verschiedene Fälle

- beidseitig eingespannter Stab

$$\begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ Q_\ell^{(e)} \\ M_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \\ Q_r^{(e)} \\ M_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ w_\ell^{(e)} \\ \varphi_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \\ w_r^{(e)} \\ \varphi_r^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{\ell 0}^{(e)} \\ Q_{\ell 0}^{(e)} \\ M_{\ell 0}^{(e)} \\ N_{r 0}^{(e)} \\ Q_{r 0}^{(e)} \\ M_{r 0}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- links gelenkig gelagerter und rechts eingespannter Stab

$$\begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ Q_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \\ Q_r^{(e)} \\ M_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ w_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \\ w_r^{(e)} \\ \varphi_r^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{\ell 0}^{(e)} \\ Q_{\ell 0}^{(e)} \\ N_{r 0}^{(e)} \\ Q_{r 0}^{(e)} \\ M_{r 0}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- rechts gelenkig gelagerter und links eingespannter Stab

$$\begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ Q_\ell^{(e)} \\ M_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \\ Q_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ w_\ell^{(e)} \\ \varphi_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \\ w_r^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{\ell 0}^{(e)} \\ Q_{\ell 0}^{(e)} \\ M_{\ell 0}^{(e)} \\ N_{r 0}^{(e)} \\ Q_{r 0}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- Fachwerkstab

$$\begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{\ell 0}^{(e)} \\ N_{r 0}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- Wegfeder

$$\begin{Bmatrix} N_\ell^{(e)} \\ N_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_u & -c_u \\ -c_u & c_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- Drehfeder

$$\begin{Bmatrix} M_\ell^{(e)} \\ M_r^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & -c_\varphi \\ -c_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_\ell^{(e)} \\ \varphi_r^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Drehwinkelverfahren

Stabendmomente für den beidseitig elastisch eingespannten Stab

$$M_\ell^{(e)} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_\ell^{(e)} + \varphi_r^{(e)} - 3\psi^{(e)}) + M_{\ell 0}^{(e)}$$

$$M_r^{(e)} = \frac{2EI}{l}(\varphi_\ell^{(e)} + 2\varphi_r^{(e)} - 3\psi^{(e)}) + M_{r 0}^{(e)}$$

Stabendmomente für den am linken Ende elastisch eingespannten und am rechten Ende gelenkig gelagerten Stab

$$M_\ell^{(e)} = \frac{3EI}{l}(\varphi_\ell^{(e)} - \psi^{(e)}) + M_{\ell 0}^{(e)}$$

Stabendmomente für den am linken Ende gelenkig gelagerten und am rechten Ende elastisch eingespannten Stab

$$M_r^{(e)} = \frac{3EI}{l}(\varphi_r^{(e)} - \psi^{(e)}) + M_{r 0}^{(e)}$$

5 Einflusslinien

Einflusslinien für Weggrößen

Die Einflusslinie $\eta_w(\bar{x}, x)$ für die Durchbiegung w an der Stelle \bar{x} zufolge $P = 1$ an der ortsveränderlichen Stelle x entspricht der Biegelinie $\bar{w}(x)$ zufolge der Einzellast $\bar{P} = 1$ an der Stelle \bar{x} :

$$\eta_w(\bar{x}, x) = \bar{w}(x)$$

Die Einflusslinie $\eta_\varphi(\bar{x}, x)$ für den Querschnittsdrehwinkel an der Stelle \bar{x} zufolge $P = 1$ an der ortsveränderlichen Stelle x entspricht der Biegelinie $\bar{w}(x)$ zufolge des Biegemoments $\bar{M} = 1$ an der Stelle \bar{x} :

$$\eta_\varphi(\bar{x}, x) = \bar{w}(x)$$

Einflusslinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Stabtragwerke

Die Bestimmung von Einflusslinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Stabtragwerke erfolgt entweder mittels der Gleichgewichtsbedingungen oder mittels eines auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruhenden kinematischen Verfahrens

Einflusslinien für Kraftgrößen statisch unbestimmter Stabtragwerke

Die Bestimmung von Einflusslinien für Kraftgrößen statisch bestimmter Stabtragwerke erfolgt entweder mittels der Gleichgewichtsbedingungen oder mittels eines auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruhenden kinematischen Verfahrens

1. Schritt:

Für jenes Stabelement, das die Stelle \bar{x} der gesuchten Einflusslinie enthält, wird nicht nur die entsprechende Bindung an der Stelle \bar{x} gelöst, sondern durch Anordnung von Biegemomentengelenken an den beiden Enden des betreffenden Stabelements eine lokale zwangsläufige kinematische Kette erzeugt. Damit läßt sich für dieses Stabelement die entsprechende Einflusslinie wie für einen statisch bestimmten Stab ermitteln.

2. Schritt:

Zufolge der Anordnung von Biegemomentengelenken an den beiden Enden des Stabelements, das die Stelle \bar{x} enthält, treten an diesen Stellen Knicke in der virtuellen Biegelinie auf, die im nun folgenden zweiten Schritt zu eliminieren sind. Dazu werden im ursprünglichen statisch unbestimmten Stabtragwerk an den beiden Enden des Stabelements, das den Punkt \bar{x} enthält, die Knicke der zuvor betrachteten zwangsläufigen kinematischen Kette mit entgegengesetztem Vorzeichen angesetzt, die dadurch hervorgerufenen Schnittgrößen mittels des Weggrößenverfahrens ermittelt und die virtuelle Biegelinie zufolge letzterer ermittelt. Durch die Überlagerung dieser Biegelinie mit der Biegelinie der zwangsläufigen kinematischen Kette verschwinden die Knicke an den beiden Enden des Stabelements und

es verbleibt nur der Sprung bzw. der Knick oder die Klaffung an der Stelle \bar{x} . Zur Berechnung der Schnittgrößen, die durch die in den Endpunkten des Stabelements mit der Stelle \bar{x} angebrachten Knicke verursacht werden, können die Volleinspannkraftgrößen den entsprechenden Tabellen (siehe Kapitel 4) entnommen werden.

Auswertung von Einflusslinien

z. B. für das Biegemoment $M(\bar{x})$ an der Stelle \bar{x}

für eine Einzellast $P(x)$: $M(\bar{x}) = \eta_M(\bar{x}, x) P(x)$

für mehrere Einzellasten $P^{(i)}(x^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$: $M(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \eta_M(\bar{x}, x^{(i)}) P^{(i)}(x^{(i)})$

für eine Linienlast $q(x)$: $M(\bar{x}) = \int_l \eta_M(\bar{x}, x) q(x) dx$

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

6.1 Definition der Schnittgrößen

- N und Q : tangential bzw. normal zur verformten Stabachse
- S und R : tangential bzw. normal zur unverformten Stabachse

Zusammenhang zwischen den Stabendschnittgrößen bezogen auf die verformte bzw. unverformte Stabachse nach Vorzeichenkonvention Weggrößenverfahren

$$\begin{aligned} N_r^{(e)} &= S_r^{(e)} - R_r^{(e)} \varphi_r^{(e)} \approx S_r^{(e)}, & Q_r^{(e)} &= R_r^{(e)} + S_r^{(e)} \varphi_r^{(e)} \\ N_l^{(e)} &= S_l^{(e)} - R_l^{(e)} \varphi_l^{(e)} \approx S_l^{(e)}, & Q_l^{(e)} &= R_l^{(e)} + S_l^{(e)} \varphi_l^{(e)} \end{aligned}$$

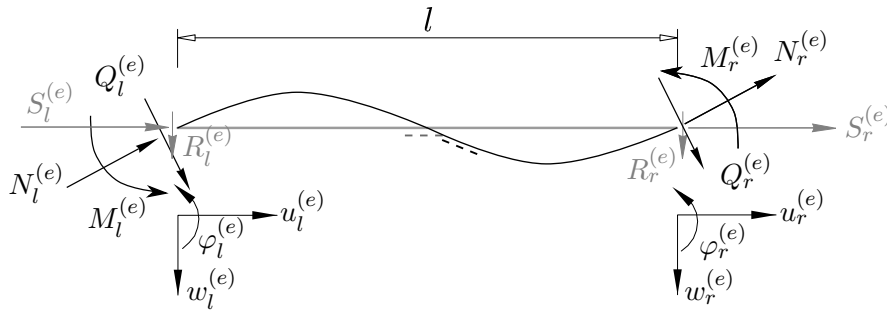


Abb. 4: Definition der Schnittgrößen am verformten Stab nach Vorzeichenkonvention Weggrößenverfahren für die Berechnung nach Theorie II. Ordnung.

6.2 Weggrößenverfahren nach Theorie II. Ordnung

Die prinzipielle Vorgangsweise ist analog zu jener nach Theorie I. Ordnung. Es sind jedoch Unterschiede bei den Zusammenhängen zwischen den Stabendweggrößen und den Stabendschnittgrößen sowie bei den Volleinspannkraftgrößen (siehe Tab. 3, 4 und 5) zu beachten:

$$\begin{pmatrix} S_\ell^{(e)} \\ R_\ell^{(e)} \\ M_\ell^{(e)} \\ S_r^{(e)} \\ R_r^{(e)} \\ M_r^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & -k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & -k_{23} & 0 & -k_{22} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_{33} & 0 & k_{23} & k_{36} \\ -k_{11} & 0 & 0 & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{22} & k_{23} & 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_{36} & 0 & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\ell^{(e)} \\ w_\ell^{(e)} \\ \varphi_\ell^{(e)} \\ u_r^{(e)} \\ w_r^{(e)} \\ \varphi_r^{(e)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{\ell 0}^{(e)} \\ R_{\ell 0}^{(e)} \\ M_{\ell 0}^{(e)} \\ S_{r 0}^{(e)} \\ R_{r 0}^{(e)} \\ M_{r 0}^{(e)} \end{pmatrix}$$

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

Die Komponenten der Stabsteifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{EA}{l} \\
 k_{22} &= \frac{2EI}{l^3} \frac{\epsilon^2 (\cos(\epsilon) - 1)}{c_1} + \frac{S_r^{(e)}}{l} \quad (*) \\
 k_{23} &= \frac{EI}{l^2} \frac{\epsilon^2 (\cos(\epsilon) - 1)}{c_1} \\
 k_{33} &= \frac{EI}{l} \frac{\epsilon (\epsilon \cos(\epsilon) - \sin(\epsilon))}{c_1} \\
 k_{36} &= \frac{EI}{l} \frac{\epsilon (\sin(\epsilon) - \epsilon)}{c_1}
 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Stabkennzahl

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{\|N\|}{EI}}$$

und der Konstante

$$c_1 = 2 \cos \epsilon + \epsilon \sin \epsilon - 2 .$$

Drehwinkelverfahren nach Theorie II. Ordnung

Stabendmomente für den beidseitig elastisch eingespannten Stab

$$\begin{aligned}
 M_\ell^{(e)} &= k_{33} \varphi_\ell^{(e)} + k_{36} \varphi_r^{(e)} - k_{23} l \psi^{(e)} + M_{\ell 0}^{(e)} \\
 M_r^{(e)} &= k_{36} \varphi_\ell^{(e)} + k_{33} \varphi_r^{(e)} - k_{23} l \psi^{(e)} + M_{r 0}^{(e)}
 \end{aligned}$$

Stabendmomente für den am linken Ende elastisch eingespannten und am rechten Ende gelenkig gelagerten Stab

$$M_\ell^{(e)} = k_g \left(\varphi_\ell^{(e)} - \psi^{(e)} \right) + M_{\ell 0}^{(e)}$$

Stabendmomente für den am linken Ende gelenkig gelagerten und am rechten Ende elastisch eingespannten Stab

$$M_r^{(e)} = k_g \left(\varphi_r^{(e)} - \psi^{(e)} \right) + M_{r 0}^{(e)}$$






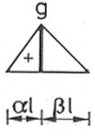





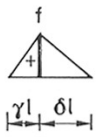

mit

$$k_g = \frac{EI}{l} \frac{\epsilon^2 \sin(\epsilon)}{\sin(\epsilon) - \epsilon \cos(\epsilon)}$$





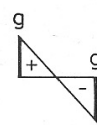
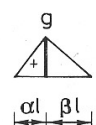
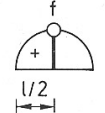
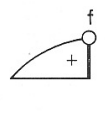
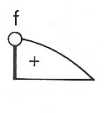
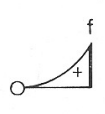
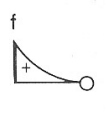
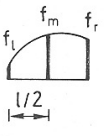
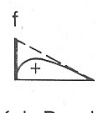
(*) $S_r^{(e)}$ ist als Druckkraft negativ einzusetzen. Bei Stäben mit veränderlicher Normalkraft muss statt $S_r^{(e)}$ der Minimalwert der Normalkraft (=maximale Druckkraft) eingesetzt werden.

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

Tab. 1: Auswertung von $\int_l f(x)g(x)dx$ für häufig vorkommende Fälle

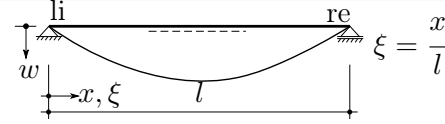
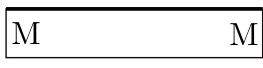
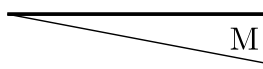
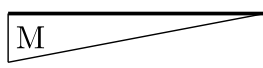
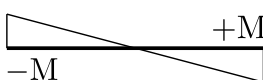


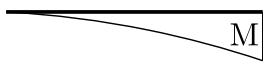

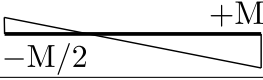
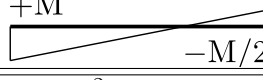
						$\int f^2 dx$
	lfg	$\frac{1}{2}lfg$	$\frac{1}{2}l(g_l + g_r)$	0	$\frac{1}{2}lfg$	lf^2
	$\frac{1}{2}lfg$	$\frac{1}{3}lfg$	$\frac{1}{6}l(g_l + 2g_r)$	$-\frac{1}{6}lfg$	$\frac{1}{6}lfg$ $(1 + \alpha)$	$\frac{1}{3}lf^2$
	$\frac{1}{2}lfg$	$\frac{1}{6}lfg$	$\frac{1}{6}l(2g_l + g_r)$	$\frac{1}{6}lfg$	$\frac{1}{6}lfg$ $(1 + \beta)$	$\frac{1}{3}lf^2$
	$\frac{1}{2}l(f_l + f_r)g$	$\frac{1}{6}l(f_l + 2f_r)g$	$\frac{1}{6}l(2f_l g_l + f_l g_r + f_r g_l + 2f_r g_r)$	$\frac{1}{6}lg(f_l - f_r)$	$\frac{1}{6}l[f_l(1 + \beta) + f_r(1 + \alpha)]g$	$\frac{1}{3}l(f_l^2 + f_l f_r + f_r^2)$
	0	$-\frac{1}{6}lfg$	$\frac{1}{6}l(g_l - g_r)$	$\frac{1}{3}lfg$	$\frac{1}{6}lfg(1 - 2\alpha)$	$\frac{1}{3}lf^2$
	$\frac{1}{2}lfg$	$\frac{1}{6}lfg$ $(1 + \gamma)$	$\frac{1}{6}l[f(g_l(1 + \delta) + g_r(1 + \gamma))]$	$\frac{1}{6}lfg(1 - 2\gamma)$	$\frac{lfg}{6\beta\gamma}$ $(2\gamma - \gamma^2 - \alpha^2)$ $\gamma \geq \alpha$	$\frac{1}{3}lf^2$
	$\frac{1}{2}lfg$	$\frac{1}{4}lfg$	$\frac{1}{4}l(f(g_l + g_r))$	0	$\frac{lfg}{12\beta}(3 - 4\alpha^2)$	$\frac{1}{3}lf^2$

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

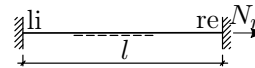
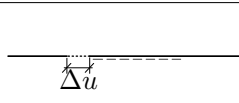

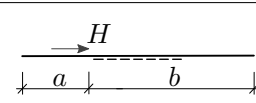
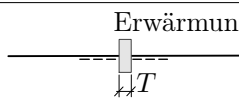
$f(x)$ Quadr. Parabel 						$\int f^2 dx$
	$\frac{2}{3} lfg$	$\frac{1}{3} lfg$	$\frac{1}{3} lf (g_l + g_r)$	0	$\frac{1}{3} lfg$ $(1 + \alpha\beta)$	$\frac{8}{15} lf^2$
	$\frac{2}{3} lfg$	$\frac{5}{12} lfg$	$\frac{1}{12} lf (3g_l + 5g_r)$	$-\frac{1}{6} lfg$	$\frac{1}{12} lfg$ $(5 - \beta - \beta^2)$	$\frac{8}{15} lf^2$
	$\frac{2}{3} lfg$	$\frac{1}{4} lfg$	$\frac{1}{12} lf (5g_l + 3g_r)$	$\frac{1}{6} lfg$	$\frac{1}{12} lfg$ $(5 - \alpha - \alpha^2)$	$\frac{8}{15} lf^2$
	$\frac{1}{3} lfg$	$\frac{1}{4} lfg$	$\frac{1}{12} lf (g_l + 3g_r)$	$-\frac{1}{6} lfg$	$\frac{1}{12} lfg$ $(1 + \alpha + \alpha^2)$	$\frac{1}{5} lf^2$
	$\frac{1}{3} lfg$	$\frac{1}{12} lfg$	$\frac{1}{12} lf (3g_l + g_r)$	$\frac{1}{6} lfg$	$\frac{1}{12} lfg$ $(1 + \beta + \beta^2)$	$\frac{1}{5} lf^2$
	$\frac{1}{6} lg$ $(f_l + 4f_m + f_r)$	$\frac{1}{6} lg (2f_m + f_r)$	$\frac{1}{6} l [f_l g_l + 2f_m$ $(g_l + g_r)$ $+ f_r g_r]$	$\frac{1}{6} lg (f_l - f_r)$	$\frac{1}{6} lg [f_l \beta + 2f_m$ $+ f_r \alpha - \alpha\beta \cdot$ $(f_l - 2f_m + f_r)]$	$\frac{1}{15} l [2(f_l^2 + 4f_m^2$ $+ f_r^2) + 2f_l f_m$ $+ 2f_m f_r - f_l f_r]$
 Kub. Parabel	$\frac{1}{4} lfg$	$\frac{7}{60} lfg$	$\frac{1}{60} lf$ $(8g_l + 7g_r)$	$\frac{1}{60} lfg$	$\frac{1}{20} lfg (1 + \beta)$ $\left(\frac{7}{3} - \beta^2\right)$	$\frac{8}{105} lf^2$

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

Tab. 2: ω - Funktionen für Stäbe mit konstanter Biegesteifigkeit EI (In dieser Tabelle ist w durch Δw zu ersetzen, wenn die Tabellenwerte für einen geraden Stababschnitt eines Stabtragwerkes angewendet werden)

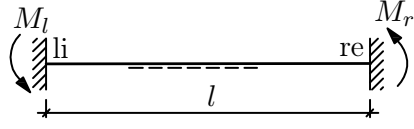

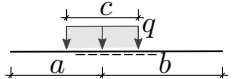
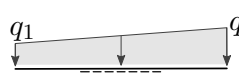
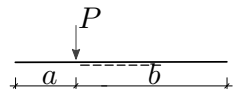
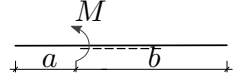
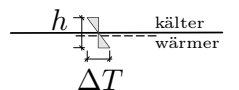
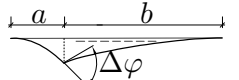
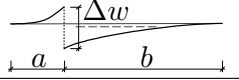
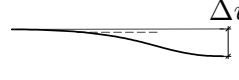
				
	Biegemoment	$EI w$	$\max(EI w)$	bei $\xi =$
1.		$\frac{M l^2}{2} \omega_R$	$0.1250 M l^2$	0.5000
2.		$\frac{M l^2}{6} \omega_D$	$0.0642 M l^2$	0.5775
3.		$\frac{M l^2}{6} \omega'_D$	$0.0642 M l^2$	0.4225
4.		$\frac{M l^2}{6} \omega''_D$	$\pm 0.0160 M l^2$	0.2113 bzw. 0.7887
5.		$\frac{M l^2}{12} \omega_\Delta$	$0.0833 M l^2$	0.5000
6.		$\frac{M l^2}{3} \omega''_P$	$0.1042 M l^2$	0.5000
7.		$\frac{M l^2}{12} \omega_P$	$0.0394 M l^2$	0.6300
8.		$\frac{M l^2}{12} \omega'_P$	$0.0394 M l^2$	0.3700
9.		$\frac{M l^2}{4} \omega_\tau$	$0.0370 M l^2$	0.6667
10.		$\frac{M l^2}{4} \omega'_\tau$	$0.0370 M l^2$	0.3333
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 30%;"> <p>mit:</p> $\omega_R = \xi - \xi^2$ $\omega_D = \xi - \xi^3$ $\omega'_D = 2\xi - 3\xi^2 + \xi^3$ $\omega'_\tau = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$ </div> <div style="width: 30%;"> $\omega''_D = -\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3$ $\omega_\Delta = 3\xi - 4\xi^3$ $\omega_P = \xi - \xi^4$ </div> <div style="width: 30%;"> $\omega'_P = 3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4$ $\omega''_P = \xi - 2\xi^3 + \xi^4$ $\omega_\tau = \xi^2 - \xi^3$ </div> </div>				

Tab. 3: Normalkräfte zufolge Belastungen in Stablängsrichtung nach Theorie I. Ordnung.
Annahmen: Biegesteifigkeit $EI = \text{const}$ und Schubsteifigkeit $GA = \text{const}$.

			
			
$N_r = -\frac{EA}{l} \Delta u$	$N_r = -n l / 2$	$N_r = -H \alpha$	$N_r = -EA \alpha_T T$

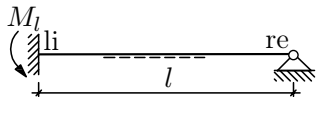
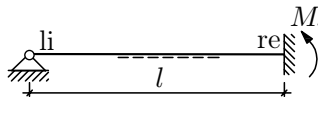

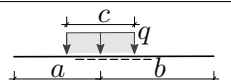
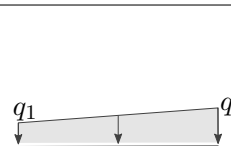
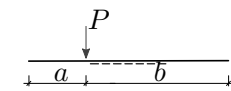
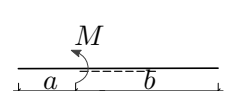
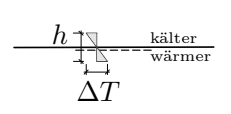
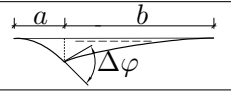
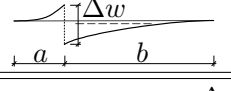

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

Tab. 4: Stabendmomente für unterschiedliche Lastfälle am beidseitig starr eingespannten Stab und nach Theorie I. und II. Ordnung. Annahmen: Biegesteifigkeit $EI = \text{const}$, Schubsteifigkeit $GA = \text{const}$ und Längskraft $N = \text{const}$.

$\alpha = a/l, \beta = b/l, \gamma = c/l$ $c_1 = 2 \cos \epsilon + \epsilon \sin \epsilon - 2$ $c_2 = \frac{\epsilon/2}{\tan(\epsilon/2)}$			
Lastfall	Th.	M_l	M_r
	I.	$q l^2/12$	$-q l^2/12$
	II.	$(1 - c_2) q l^2/\epsilon^2$	$-(1 - c_2) q l^2/\epsilon^2$
	I.	$qc [a\beta^2 + \gamma^2 (l - 3b)/12]$	$-qc [b\alpha^2 + \gamma^2 (l - 3a)/12]$
	I.	$l^2 (3q_1 + 2q_2) /60$	$-l^2 (2q_1 + 3q_2) /60$
	II.	$\frac{l^2}{2\epsilon^2} \left[\left(2 - c_2 - \frac{\epsilon^2/12}{1 - c_2} \right) q_1 + \left(-c_2 + \frac{\epsilon^2/12}{1 - c_2} \right) q_2 \right]$	$-\frac{l^2}{2\epsilon^2} \left[\left(-c_2 + \frac{\epsilon^2/12}{1 - c_2} \right) q_1 + \left(2 - c_2 - \frac{\epsilon^2/12}{1 - c_2} \right) q_2 \right]$
	I.	$P a \beta^2$	$-P b \alpha^2$
	II.	$-\left[\frac{\sin(\epsilon\alpha) + \sin(\epsilon\beta) - \sin(\epsilon)}{\epsilon c_1} + \frac{\alpha + \beta \cos(\epsilon) - \cos(\epsilon\beta)}{c_1} \right] P l$	$\left[\frac{\sin(\epsilon\alpha) + \sin(\epsilon\beta) - \sin(\epsilon)}{\epsilon c_1} + \frac{\beta + \alpha \cos(\epsilon) - \cos(\epsilon\alpha)}{c_1} \right] P l$
	I.	$M \beta (3\alpha - 1)$	$M \alpha (3\beta - 1)$
	II.	$-\left(\epsilon \sin(\epsilon\beta) - 1 + \cos(\epsilon) - \cos(\epsilon\alpha) + \cos(\epsilon\beta) \right) M/c_1$	$-\left(\epsilon \sin(\epsilon\alpha) - 1 + \cos(\epsilon) - \cos(\epsilon\beta) + \cos(\epsilon\alpha) \right) M/c_1$
	I.	$EI\alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$-EI\alpha_T \frac{\Delta T}{h}$
	II.	$EI\alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$-EI\alpha_T \frac{\Delta T}{h}$
	I.	$\frac{2EI}{l}(3\beta - 1) \Delta\varphi$	$-\frac{2EI}{l}(3\alpha - 1) \Delta\varphi$
	I.	$-\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$-\frac{6EI}{l^2} \Delta w$
	I.	$\frac{6EI}{l^2} \Delta w$	$\frac{6EI}{l^2} \Delta w$

6 Elastizitätstheorie II. Ordnung

Tab. 5: Stabendmomente für unterschiedliche Lastfälle am Stab mit einseitiger gelenkiger Lagerung nach Theorie I. und II. Ordnung. Annahmen: Biegesteifigkeit $EI = \text{const}$, Schubsteifigkeit $GA = \text{const}$ und Längskraft $N = \text{const}$.

$\alpha = a/l, \beta = b/l, \gamma = c/l$ $c_3 = \frac{\epsilon}{\tan(\epsilon)}$			
Lastfall	Th.	M_l	M_r
	I.	$q l^2 / 8$	$-q l^2 / 8$
	II.	$\frac{\tan(\epsilon/2)/\epsilon - 1/2}{1 - c_3} q l^2$	$-\frac{\tan(\epsilon/2)/\epsilon - 1/2}{1 - c_3} q l^2$
	I.	$\frac{q b c}{2} [\alpha(1 + \beta) - \gamma^2/4]$	$-\frac{q a c}{2} [\beta(1 + \alpha) - \gamma^2/4]$
	I.	$l^2 (8q_1 + 7q_2) / 120$	$-l^2 (7q_1 + 8q_2) / 120$
	II.	$\left[\frac{(1 - c_3)/\epsilon^2 - 1/3}{1 - c_3} q_1 + \frac{(\epsilon/\sin(\epsilon) - 1)/\epsilon^2 - 1/6}{1 - c_3} q_2 \right] l^2$	$-\left[\frac{(1 - c_3)/\epsilon^2 - 1/3}{1 - c_3} q_2 + \frac{(\epsilon/\sin(\epsilon) - 1)/\epsilon^2 - 1/6}{1 - c_3} q_1 \right] l^2$
	I.	$P a \beta (1 + \beta) / 2$	$-P b \alpha (1 + \alpha) / 2$
	II.	$\left(\frac{\sin(\epsilon\beta)}{\sin(\epsilon)} - \beta \right) \frac{P l}{1 - c_3}$	$-\left(\frac{\sin(\epsilon\alpha)}{\sin(\epsilon)} - \alpha \right) \frac{P l}{1 - c_3}$
	I.	$\frac{M}{2} (1 - 3\beta^2)$	$\frac{M}{2} (1 - 3\alpha^2)$
	II.	$-\left(1 - \frac{\epsilon \cos(\epsilon\beta)}{\sin(\epsilon)} \right) \frac{M}{1 - c_3}$	$-\left(1 - \frac{\epsilon \cos(\epsilon\alpha)}{\sin(\epsilon)} \right) \frac{M}{1 - c_3}$
	I.	$\frac{3}{2} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$-\frac{3}{2} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$
	II.	$\frac{\epsilon \tan(\epsilon/2)}{1 - c_3} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$-\frac{\epsilon \tan(\epsilon/2)}{1 - c_3} EI \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$
	I.	$\frac{3EI}{l} \beta \Delta \varphi$	$-\frac{3EI}{l} \alpha \Delta \varphi$
	I.	$-\frac{3EI}{l^2} \Delta w$	$-\frac{3EI}{l^2} \Delta w$
	I.	$\frac{3EI}{l^2} \Delta w$	$\frac{3EI}{l^2} \Delta w$