Wieviel Fachkompetenz brauchen Mathematiklehrer*innen ?

Gesellschaftspolitische und persönlichkeitsbildene Aspekte des Mathematikunterrichts.

Franz Pauer

Universität Innsbruck

15. November 2023

Lehrpläne

- Lehrpläne in Österreich bzw. Rahmenrichtlinien für die Lehrpläne in Südtirol sind für alle Lehrpersonen verbindlich.
  Nicht verbindlich: Schulbücher, Kompetenzkatalog Matura, etc.

- Lehrpläne für alle Schulen in Österreich

  Web-Seite des BMBWF
  www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html

- Rahmenrichtlinien des Landes für die Lehrpläne aller deutschsprachigen Schulen in Südtirol

  Web-Seite der Südtiroler Landesverwaltung
  www.provinz.bz.it/bildung-sprache/deutschsprachige-schule/bildungsverwaltung/rahmenrichtlinien-land-bestimmungen.asp

Allgemeine und übergreifende Bildungsziele

Gelten auch für das Unterrichtsfach Mathematik!

- Lehrplan AHS, allg. Bildungsziel, Bildungsbereiche der Oberstufe:

  „Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.“

- Lehrpläne Mittelschule und AHS, übergreifende Themen, politische Bildung:

  Die Lernenden sollen auch dazu befähigt werden **„im Dienste der Menschenrechte, der Demokratie und der Rechtsstaatlichkeit in der Gesellschaft aktiv werden zu wollen“**

- Wie werden Sie in Ihrem Mathematikunterricht einen Beitrag zu diesen wichtigen Bildungszielen leisten?

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrpläne Mathematik AHS Unterstufe und Mittelschule, Bildungs- und Lehraufgabe:

- **„Mathematik bzw. der Mathematikunterricht sollen Vorbild sein, für Behauptungen Argumente zu geben und auch von anderen einzufordern. Mängel in Argumentationen sollen erkannt und aufgezeigt werden.“**
- **„Dadurch werden kritisches Denken, Offenheit gegenüber verschiedenen Standpunkten und Sichtweisen sowie die mündige Teilnahme an gesellschaftlichen Diskussions- und Entscheidungsprozessen gefördert.“**

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS Oberstufe:

- **Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.**
- **Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen.**

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems.
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Menschen erzogen werden.
- Der Mathematikunterricht heute muss sich also wesentlich von dem im 18. und 19. Jhd. unterscheiden!

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x+3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.
- Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x+3)^2 - 9 - 1 = 0$, also $(x+3)^2 = 10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x + 3 = \pm\sqrt{10}$.
- Daraus folgt, dass die gesuchten Zahlen $-3 + \sqrt{10}$ und $-3 - \sqrt{10}$ sind.

Mündige Menschen oder Untertanen?

ODER (?)

- Die quadratische Gleichung $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist wie folgt zu lösen:
- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ auswendig!
- Setze in die Lösungsformel ein: 6 für p und -1 für q !
- Dann sind $-\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$ die zwei Lösungen.

Mündige Menschen oder Untertanen?

- Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
- Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

  1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.
  2. Die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie und warum man die Lösung einer Aufgabe findet.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Am nächsten Tag fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft tausend Kilogramm derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Masse und Preis von Äpfeln nicht bekannt ist.**
- Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.
- Jeder Händler weiß, dass Herr Meier sicher viel weniger als 2000 Euro zahlen wird.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2023): 3 248 Euro.
- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro (im Jahr 2023)?
- 12 720 Euro (für das doppelte Einkommen zahlt man viel mehr als doppelt so viel Steuer).
- Sachwissen nötig: Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist nicht linear, sondern stückweise linear und stetig.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Für das Jahr 2023 wird die Steuer so berechnet:

- für den Einkommensanteil bis 11 693 Euro keine Steuer ,
- für den von 11 693 bis 19 134 Euro 20 Prozent,
- für den von 19 134 bis 32 075 Euro 30 Prozent,
- für den von 32 075 bis 62 080 Euro 41 Prozent,
- für 62 080 bis 93 120 Euro 48 Prozent,
- für den von 93 120 bis 1 000 000 Euro 50 Prozent und
- für den über einer Million Euro 55 Prozent.

Vorurteilsfrei Denken

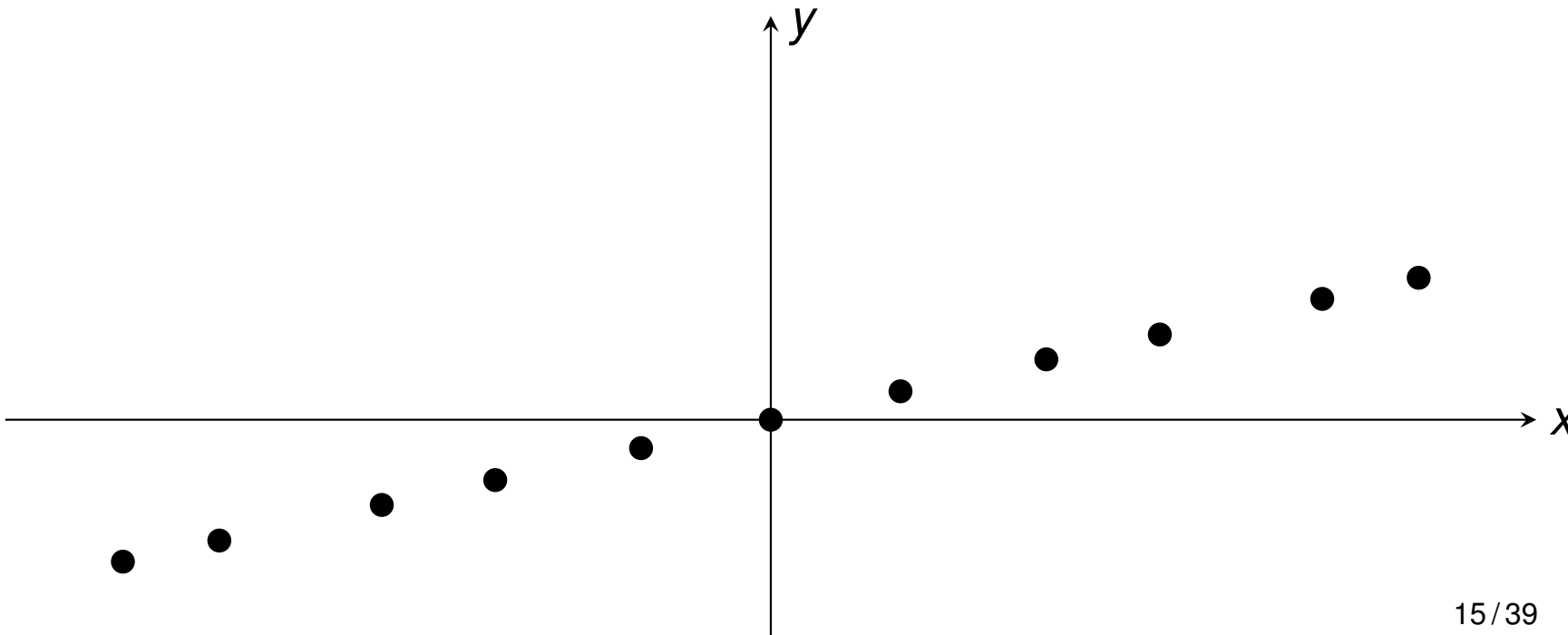
- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...
- Leider kommen Fragen dieses Typs in Aufnahmetests vor!

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - Zum Beispiel: „Für jede Zahl n wähle $(n-3).(n-2).(n-1)+n$ als n-tes Glied der gesuchten Folge“.
  - Damit erhält man
    $(-2).(-1).0+1=1,$
    $(-1).0.1+2=2,$
    $0.1.2+3=3,$
    $1.2.3+4=10, \ldots$.
- Kommen solche Fragen in Tests vor, werden nicht kognitive Fähigkeiten überprüft, sondern ob jemand so wie

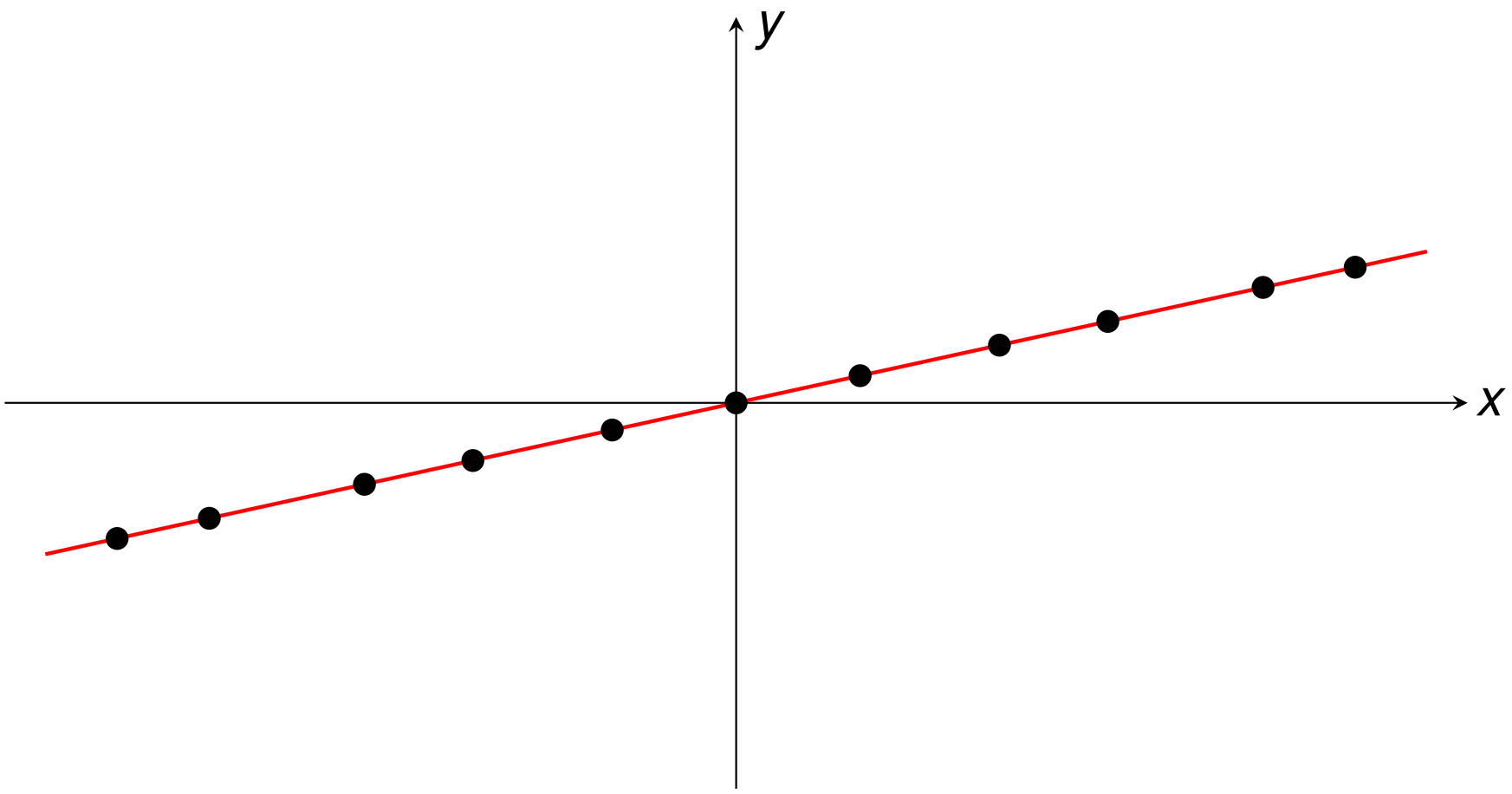
Vorurteilsfrei Denken

- Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen. Wenn diese Punkte wie im folgenden Bild alle auf einer Geraden liegen,



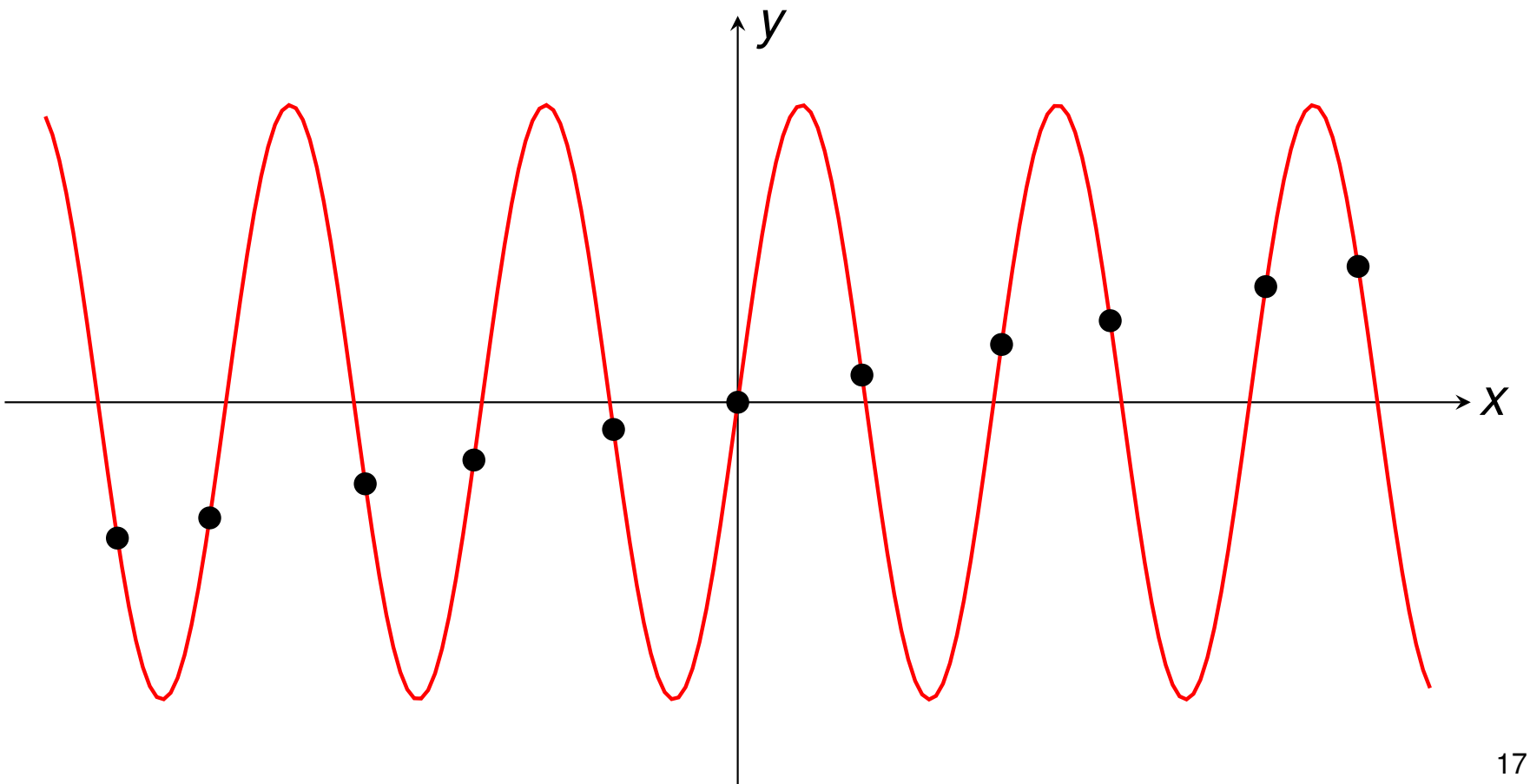
Vorurteilsfrei Denken

ist die Versuchung groß, den betracheten Vorgang durch eine lineare Funktion zu beschreiben:



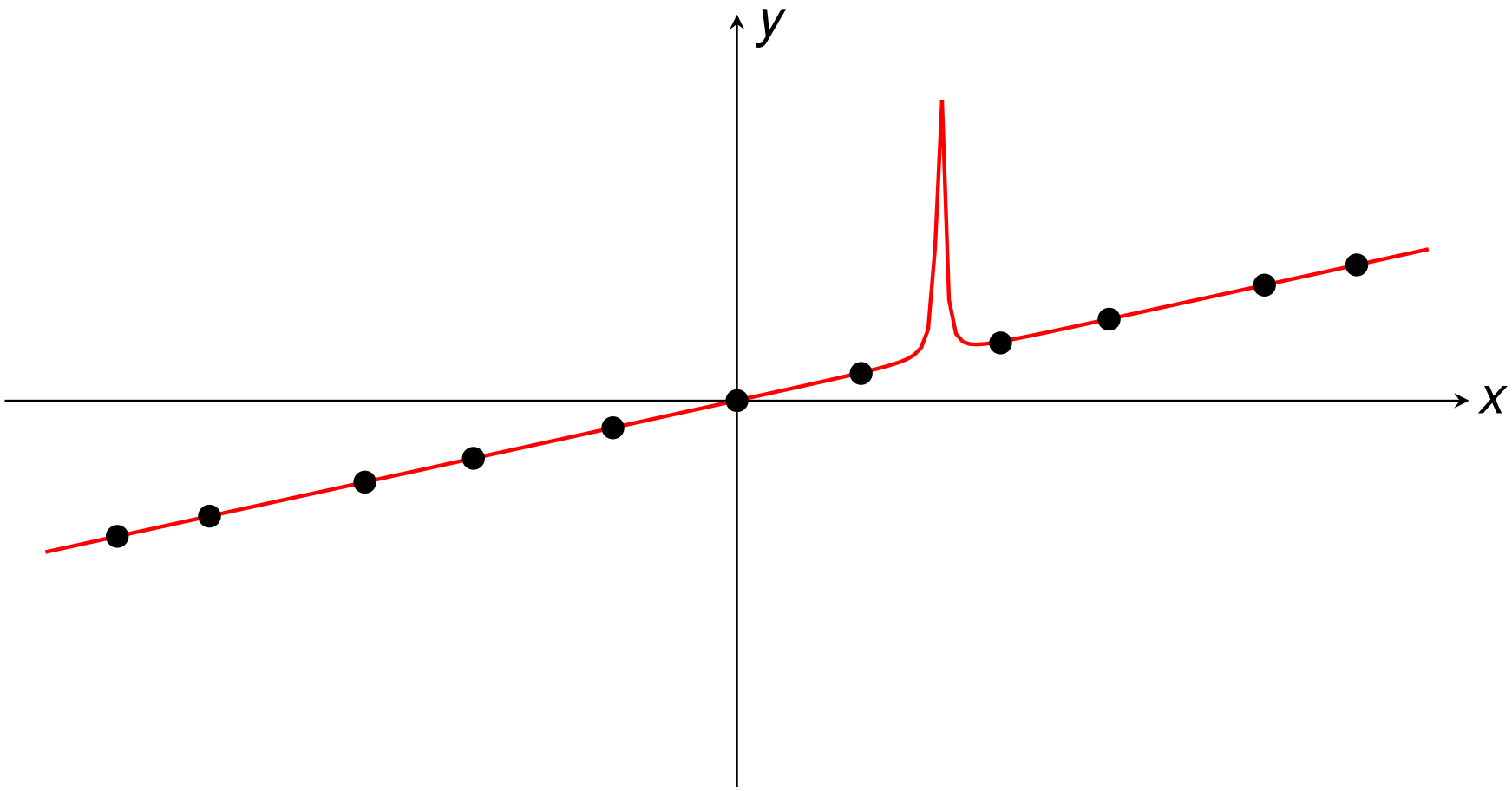
Vorurteilsfrei Denken

Wenn man allerdings außer den gemessenen Zahlenpaaren nichts über den Vorgang weiß, ist das voreilig.
Wenn der Vorgang periodisch ist, wäre ihm eine Beschreibung durch eine Sinusfunktion wie im folgenden Bild besser angepasst.



Vorurteilsfrei Denken

Wenn ein Impuls beschrieben wird:



Einige Ziele des Lehramtsstudiums

Absolvent*innen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.

  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).

- alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.

- ihren Mathematikunterricht so gestalten, dass die Entwicklung der Kinder und Jugendlichen zu mündigen Menschen in einer demokratischen Gesellschaft (und nicht zu unkritischen Untertanen in einer autoritären Gesellschaft) gefördert wird.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

Absolvent*innen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen.
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln.
- **Und dazu braucht es auch viel an mathematischer Fachkompetenz und mathematischem Fachwissen der Lehrperson!**

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

- Einfachste Lösung:

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

- Oder: $2,436626815$ $(= \frac{2436626815}{10^9})$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Das legt nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:
- Man multipliziert auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$ und erhält:
- $$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b) \qquad \text{und daraus}$$
- $$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Das gesuchte Zahlenpaar (a, b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} 3b - 2a &= 2 && (1) \\ -2b + 15a &= 7\,, && (2) \end{aligned}$$

- also ist $a = \frac{25}{41}$ und $b = \frac{44}{41}$.
- Daher:

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = \frac{25}{41}\sqrt{5} + \frac{44}{41}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Sie wissen wahrscheinlich aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f+g)' = f' + g' \text{ und } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

- Aber wer weiß, was $f + g$ und $f \cdot g$ bedeuten?

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, Parallelverschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)
- mathematische Modellierung („Schlussrechnung“)
- Algorithmisches Denken

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- Andererseits ist es auch wichtig, nach vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit die Schülerinnen und Schüler einen „roten Faden“ erkennen können?
- Das ist einer der Gründe, warum es sehr wichtig ist, dass Lehrpersonen der Sekundarstufe 1 für den Unterricht in der gesamten Sekundarstufe ausgebildet werden.

Die richtige Fährte legen: „Binomische Formeln“

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a+b)$, $(a-b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a+b)\cdot(a-b)\neq a^2-b^2$
- Was ist falsch?
- Kann man mit Matrizen keinen „Rechenausdruck“ oder keinen „sinnvollen mathematischen Ausdruck“ bilden?

Die richtige Fährte legen: „Binomische Formeln“

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese „binomische Formel“ in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.
- Im Schulunterricht treten im wesentlichen zwei Beispiele von kommutativen Ringen auf: Zahlbereiche und der Ring aller reellwertigen Funktionen.
- In der Sekundarstufe 1 bedeutet „Termrechnung“ „Einüben der Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen“.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- Wer kann im Kopf $401^2 - 399^2$ berechnen?
- $401^2 - 399^2 = (401 + 399) \cdot (401 - 399) = 800 \cdot 2 = 1600$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)
- 11. Schulstufe: Finde alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a_{n+1} - 2.a_n = 6$!
  (lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)
- 12. Schulstufe: Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit $f' - 2f = 7$!
  (lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung. Deren Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen einer einzigen Lösung, die man leicht findet.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$
- Finde alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a_{n+1} - 2.a_n = 0$!

  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge “ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit $f' - 2f = 0$!

  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „Exponentialfunktion“ g mit $g(t) = e^{2t}$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung!
(Alle drei Aufgaben sind lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge).

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)
- $\{(-6)_{n\in\mathbb{N}} + c.(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $a_{n+1} - 2.a_n = 6$
  (11. Schulstufe)
- $\{\frac{-7}{2} + c.g \mid c \in \mathbb{R}\}$, dabei ist g die Funktion mit $g(t) = e^{2t}$.
  Lm. von $f' - 2f = 7$
  (12. Schulstufe)

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.
- Kein Unterricht ist „wertfrei“, auch der Mathematikunterricht nicht.
- Zwar sind die Ergebnisse der Mathematik, die unterrichtet werden, nicht von den Wertvorstellungen der jeweiligen Gesellschaft abhängig, aber sehr wohl die Art, wie diese vermittelt werden.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Die heutigen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind.
- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.
- Wer erfahren hat, dass man mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion lösen kann, überträgt das vielleicht auch auf den persönlichen Bereich und kann dann Konflikte intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

Mehr dazu in

Pauer, F. (2021): Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) 53, 107-116.

http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2021

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.
- Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet und begründet werden.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.
- **Ein solche Unterricht erfordert Lehrpersonen mit hoher fachlicher und didaktischer Qualität.**

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?
- Hoffentlich die Besten!

Alles Gute für Ihr Studium! Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at