Größen, Proportionalitäten, Vektoren und Funktionen

Franz Pauer

Universität Innsbruck

5. April 2024

Inhalt

- Größen in den österreichischen Lehrplänen
- Beispiel: Länge
- Vektoren
- Größen
- Proportionalitäten
- Lineare Funktionen

Größen im Lehrplan der Volksschule

Das Wort „Größe“ hat im Lehrplan verschiedene Bedeutungen, hier befassen wir uns **nicht** mit den folgenden:

- „Erfahren der Beschaffenheit Größe (groß, klein), Farbe (hell, dunkel), ...“
- „Familiengröße“
- „die Größe der Bruchteile“
- „die Größe unserer Geschichte“

In anderen Sprachen (E, F, I) einfacher: *quantity, quantité, quantità* unterscheidet sich von *greatness, grandeur, grandezza* und von *size, taille, taglia*.

Größen im Lehrplan der Volksschule

Wir befassen uns mit Größen mit der folgenden Bedeutung:

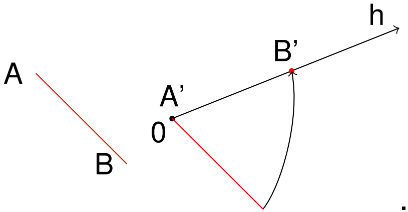
- *Sachverhalte der Umwelt sind mit Hilfe von Zahlen, Größen und Operationen zu durchdringen*
- *Größen:*
  - *Begriffsbildung über Vergleichen und Formulieren von Relationen;*
  - *Einsetzen willkürlich gewählter Maßeinheiten zum Messen von Repräsentanten;*
  - *Einführen genormter Maßeinheiten für die Größenbereiche Länge, Masse, Raum, Zeit, Geld*

Zu erklären: Größenbereich, Größe, Repräsentant einer Größe, Maßeinheit.

Länge einer Strecke

- *Länge* ist eine Eigenschaft von Strecken (in der Ebene oder im Raum), von der man das folgende verlangt:
  - Die Länge von zwei Strecken ist genau dann gleich, wenn diese durch Parallelverschieben und Drehen zur Deckung gebracht werden können
  - man kann Längen mit positiven Zahlen multiplizieren.
- Wähle (in der Ebene oder im Raum) eine Halbgerade h, ihren Anfangspunkt nenne 0.
- Verschiebe die Strecke mit Endpunkten A und B so, dass A nach 0 verschoben wird. Drehe dann um den Punkt 0 so, dass B auf die Halbgerade h gedreht wird.

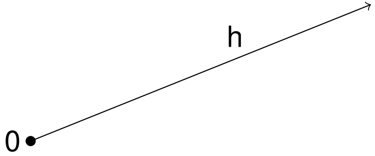
Länge einer Strecke



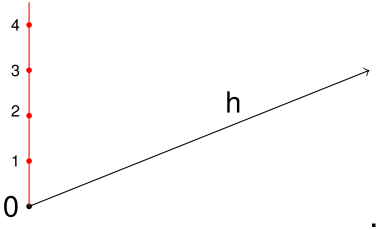
- Zwei verschiedene Strecken auf h mit 0 als Endpunkt können nicht zur Deckung gebracht werden. Es gibt also zu jedem Punkt $P \neq 0$ auf h genau eine Länge, die der Strecke $0P$.
- „Eigenschaft in der Mathematik“: Menge aller Elemente, die diese Eigenschaft haben.
  also: die Länge $\overline{AB}$ der Strecke AB ist die Menge aller Strecken, die mit AB zur Deckung gebracht werden können.
  In dieser Menge liegt genau eine Strecke $0P$ mit $P \in h$.
- Strecken mit der Länge $\overline{AB}$ sind *Repräsentanten* oder *Träger* dieser Länge.

Vielfache von Längen

- Wähle einen Punkt 0 in der Ebene und eine Halbgerade h mit Anfangspunkt 0.

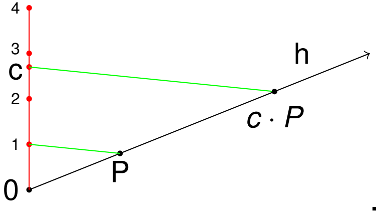


- Zeichne eine positive Zahlenhalbgerade mit Anfangspunkt 0 in die Ebene.



Vielfache von Längen

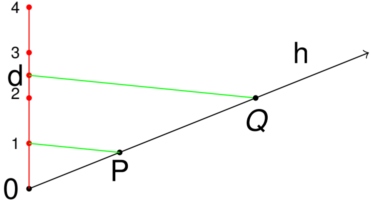
- Sei c eine positive Zahl und P ein Punkt $\neq 0$ auf h.



- Die Länge der Strecke $0(c \cdot P)$ heißt das *c-fache der Länge* der Strecke $0P$.
- Ist $\overline{0P}$ die Länge der Strecke zwíschen 0 und P, schreiben wir $c \cdot \overline{0P}$ für das c-fache von $\overline{0P}$.

Vielfache von Längen

- P, Q Punkte $\neq 0$ auf h.



.

- $\overline{0Q} = d \cdot \overline{0P}$, jede Länge ist ein positives Vielfaches einer ausgewählten Länge („Längeneinheit").

Größen im Lehrplan der AHS

- 1. Klasse AHS
  Mathematik:
  Größen ein- und mehrnamig anschreiben, Vergleichen und Messen von Größen (insbesondere Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen, Zeitspannen, Geldbeträge)“
  „Beachten des Unterschieds zwischen einem geometrischen Objekt und seiner Größe (Strecke – Streckenlänge, Fläche – Flächeninhalt, Winkel – Winkelmaß)

  Physik:
  Grundgrößen der Elektrizität (Spannung, Stromstärke und Widerstand)

- Was haben die Begriffe Länge, Flächeninhalt, Masse, Geldbetrag, Spannung, . . . gemeinsam?

  Sie sind „Größen“, aber was bedeutet das?

Für Unterrichtsplanung sind Rückblick *und* Vorschau nötig

- In der Volksschule: Begriff *Größe* weglassen.
- Grundsätzlich: Mathematische Begriffe und Inhalte so einführen, dass später gut darauf aufgebaut werden kann.
- Grundvorstellungen vermitteln, die spätere Grundvorstellungen nicht behindern.
- Welche Begriffe bauen in späteren Schuljahren auf die Begriffe Größe und Proportionalität auf?
- Die Begriffe Vektor und lineare Funktion.
- „Vorschau“ verbessert Verständnis der aktuellen Inhalte.
- Daher hier: zuerst Antwort auf Frage „*Was ist ein Vektor?*“, dann auf die Frage „*Was ist eine Größe?*“

Vektoren im Lehrplan der AHS

- 5. Klasse
  Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$: Vektoren addieren, subtrahieren, mit reellen Zahlen multiplizieren und diese Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen können
- 6. Klasse
  Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und deren Rechenoperationen kennen, in Anwendungskontexten interpretieren und verständig einsetzen können

$\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen.
- Ein *Vektor* ist im Lehrplan AHS also ein n-Tupel von reellen Zahlen.
- 2-Tupel heißen Paare, 3-Tupel heißen Tripel.
- Schreibweisen: Zeilen oder Spalten. Beispiel für 4-Tupel:

$$(3.9, -2, -0.13, 7.25) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3.9 \\ -2 \\ -0.13 \\ 7.25 \end{pmatrix}$$

Mit Vektoren kann man rechnen

- Rechenoperationen *Addition* und *Multiplikation mit Zahlen*: „komponentenweise"
- Hier für $\mathbb{R}^2$, in $\mathbb{R}^n$ analog.
- $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d)$$

$$t \cdot (a, b) := (t \cdot a, t \cdot b)$$

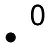
- daraus abgeleitet Subtraktion

$$(a, b) - (c, d) := (a, b) + (-1) \cdot (c, d) = (a - b, c - d)$$

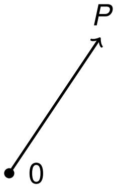
Ortsvektor

Es gibt auch andere Vektoren, zum Beispiel „Ortsvektoren“.

Man wählt dazu einen „Nullpunkt“ 0 in der Ebene:

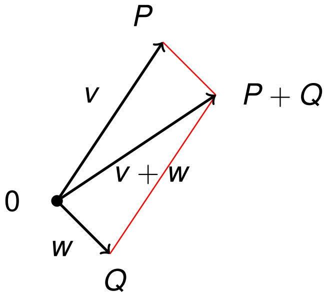


Ein Punktepaar $(0, P)$ („Ortsvektor“) wird durch einen Pfeil mit Schaft 0 und Spitze P beschrieben.

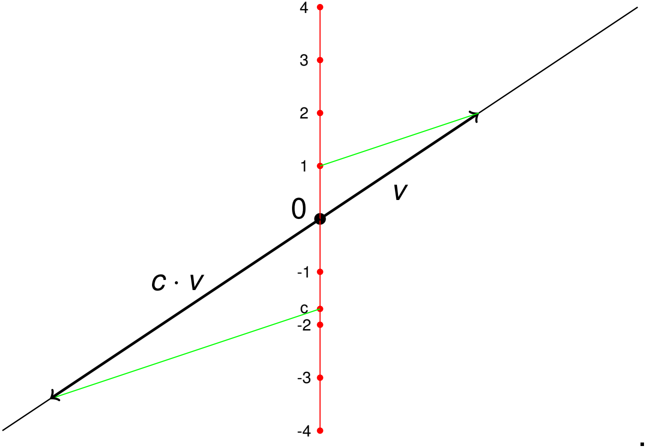


Rechnen mit Ortsvektoren

Addition der Ortsvektoren $v = (0, P)$ und $w = (0, Q)$ (oder Addition der Punkte P und Q):

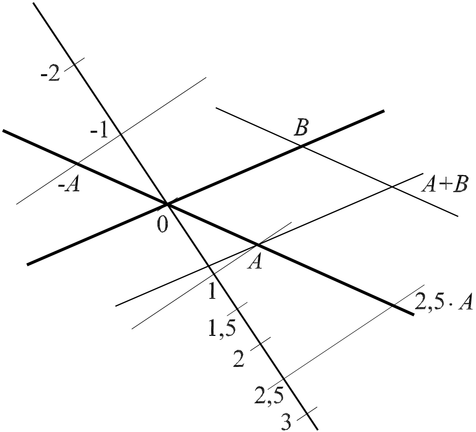


Rechnen mit Ortsvektoren



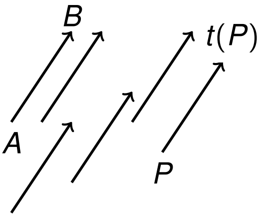
Punkte sind Vektoren

Rechnen mit Punkten



Verschiebungen bzw. Translationen sind Vektoren

- A, B Punkte der Ebene E
- T Verschiebung, die A nach B verschiebt ($T : E \longrightarrow E$)
- Graph von $T : \{(P, T(P)) \mid P \in E\}$



- Addition von Verschiebungen S, T durch Hintereinanderausführung: $S + T := S \circ T$
- Wichtig: Hintereinanderausführung von Verschiebungen ist kommutativ: $T \circ S = S \circ T$

Vektoren

- Nicht alle Pfeile sind Vektoren:
  - Pfeile in Pfeilklassen (Graphen von Verschiebungen) sind keine Vektoren.
  - Pfeile, die eine Drehung beschreiben, sind keine Vektoren (diese Pfeile geben Drehachse, Drehwinkel und Drehrichtung an).

- Grundvorstellung: „Vektoren kann man addieren und mit reellen (oder rationalen) Zahlen multiplizieren“
- oder: „mit Vektoren kann man Linearkombinationen bilden“

Vektorräume

Die genaue Definition:

- Ein *Vektorraum* ist eine Menge, auf der eine *Addition* und eine *Multiplikation mit Zahlen* gegeben sind.
- *Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.*

- Für die zwei Rechenoperationen müssen folgende Rechenregeln gelten:
  c, d Zahlen, v, w Vektoren

  Für die Addition allein: Rechenregeln wie für die Addition von ganzen Zahlen

  Für die Multiplikation mit Zahlen: $1 \cdot v = v$, $(c.d) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$

  Für das Zusammenspiel der zwei Rechenoperationen: $c \cdot (v + w) = (c \cdot v) + (c \cdot w), \quad (c + d) \cdot v = (c \cdot v) + (d \cdot v)$

Vektoren und Wiener

- Wie erklärt man, was ein Wiener ist?

  Jemand, der gerne Walzer tanzt, Schnitzel isst und viel über den Tod nachdenkt?
- Einfachste Erklärung: ein Wiener ist ein Einwohner von Wien.

  Erfordert aber, zuerst zu erklären, was Wien ist.
- Analog bei Vektoren

Beschränkung auf einen Spezialfall

- Oder: Man beschränkt sich auf einen Spezialfall des Begriffs. Dieser sollte einerseits einfach und andererseits möglichst allgemein sein: ein Vektor ist ein n-Tupel.
- Warum ist dieser Spezialfall „sehr allgemein"?

  Jeder (endlich-dimensionale) Vektor kann nach Wahl einer Basis des Vektorraums durch das n-Tupel seiner Koordinaten eindeutig beschrieben werden.

  Wird mit Vektoren am Computer gerechnet, gibt man sie als n-Tupel ein.

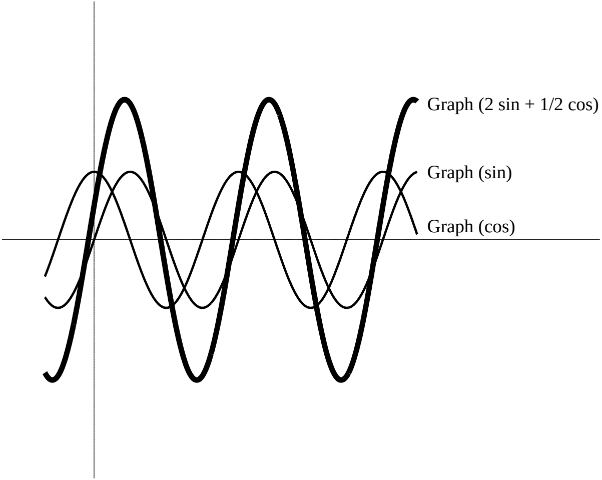
Reellwertige Funktionen sind Vektoren

Es gibt aber Vektoren, die nicht durch ein n-Tupel beschrieben werden können:

- f, g Funktionen von einer Menge M nach $\mathbb{R}$, c reelle Zahl
- $f + g$ Funktion von M nach $\mathbb{R}$ mit $(f + g)(t) := f(t) + g(t)$ „punktweise addieren"
- $c \cdot f$ Funktion von M nach $\mathbb{R}$ mit $(c \cdot f)(t) := c \cdot f(t)$ „punktweise mit Zahlen multiplizieren"
- Der Vektorraum aller Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$ ist nicht endlich-dimensional.

Reellwertige Funktionen sind Vektoren

Linearkombinationen von Funktionen



Was sind Größen?

- Lehrplan Volksschule: „Größenbereiche Länge, Masse, Raum, Zeit, Geld“
- Lehrplan AHS Unterstufe Mathematik: „Vergleichen und Messen von Größen (insbesondere Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen, Zeitspannen, Geldbeträge)“
- Was haben diese Begriffe gemeinsam?

  Grundvorstellung: „Größen können mit positiven Zahlen multipliziert werden“

Was sind Größen?

G Menge,

$$\mathbb{R}_{>0} \times G \longrightarrow G, \quad (c, g) \longmapsto c \cdot g$$

ist eine *Operation der Gruppe* $\mathbb{R}_{>0}$ *auf* G, wenn gilt:
für alle $g \in G$ und alle positiven Zahlen c, d ist
$c \cdot (d \cdot g) = (c.d) \cdot g$ und
$1 \cdot g = g$

- Ein *Größenbereich* ist eine Menge zusammen mit einer Operation der Gruppe der positiven reellen Zahlen auf dieser Menge.

  Eine *Größe* ist ein Element eines Größenbereichs.

- g Größe, c positive reelle Zahl:
  $c \cdot g$ „c-Faches“ der Größe g

Beispiele für Größenbereiche

- Jeder Vektorraum ist ein Größenbereich, jeder Vektor ist eine Größe.
- Der *Größenbereich Länge* ist die Menge aller Längen zusammen mit einer Operation der Gruppe der positiven reellen Zahlen ($\mathbb{R}_{>0}$).

Eindimensionale Größenbereiche

- Größenbereich eindimensional, wenn es zu je zwei Größen g, h eine positive Zahl mit

  $$h = c \cdot g$$

  gibt.
  Also: jede Größe in diesem Bereich ist ein Vielfaches jeder anderen.

  c heißt auch „Verhältnis von h zu g“.

  Beispiel: Verhältnis von $4cm$ zu $3cm$ ist $4/3$.
- Dann: Wähle irgendeine Größe in diesem Größenbereich, dann sind alle anderen Größen Vielfache davon.
- Beispiele: Größenbereiche Länge, Flächeninhalt, Rauminhalt, Masse, Geldbeträge, positive reelle Zahlen, Widerstand, ...
- Gegenbeispiele: Vektorräume, Größenbereiche Kraft im Raum, Geschwindigkeit im Raum, ...

Maßeinheit und Maßzahl

- G eindimensionaler Größenbereich mit zusätzlicher Annahme:

$$g \in G, c \in \mathbb{R}_{>0} : \; c \cdot g = g \Rightarrow c = 1$$

- *Maßeinheit* von G: irgendein Element von G
- g Maßeinheit, $h \in G$: die eindeutig bestimmte positive Zahl c mit $c \cdot g = h$ heißt *Maßzahl* von g bezüglich h (oder: Verhältnis von h zu g).
- Jede Größe in G ist durch Maßeinheit und Maßzahl eindeutig bestimmt.
- Man erhält Addition auf G durch: $c \cdot g + d \cdot g := (c + d) \cdot g$.

Was sind „direkt proportionale Größen“?

- Kann die Größe $3kg$ (eine Masse) direkt proportional zur Größe $7,5$ Euro (ein Geldbetrag) sein?
- Sind die Größenbereiche der Massen und der Geldbeträge direkt proportional ?
- Sie *können* direkt proportional sein, müssen aber nicht.

- Beispiel: Preisgestaltung. Jeder Masse (z.B. von Erdäpfeln) wird ein Geldbetrag (der Preis) zugeordnet.

  Wenn man für die doppelte, halbe, tausendfache, ... Masse doppelt, halb, tausendmal ... so viel bezahlt, dann ist die Preisgestaltung direkt proportional.

Was heißt „direkt proportional“?

- G, H Größenbereiche, Funktion $f : G \longrightarrow H$ beschreibt eine Zuordnung von G nach H
- f ist *proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

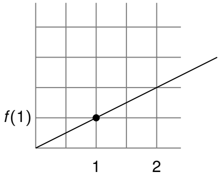
$$f(c \cdot g) = c \cdot f(g)$$

- „Das Bild des c-fachen ist das c-fache des Bildes.“
- Wichtig: nicht Größen oder Größenbereiche sind direkt proportional, sondern eine Zuordnung (Funktion) zwischen diesen.

Beispiel: Gleichförmige Geschwindigkeit

- Beispiel: G Größenbereich der Zeitspannen, H Größenbereich der Längen, $f(t) :=$ Länge des Weges, den ein Wanderer in der Zeit t zurücklegt.
- Wenn die Funktion f direkt proportional ist, dann geht der Wanderer mit *gleichförmiger Geschwindigkeit*.
- Dann: $f(t) = f(t \cdot 1) = t \cdot f(1)$.
  Der Graph $\{(t, f(t)) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ ist daher die Halbgerade

$$\{t \cdot (1, f(1)) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq (\mathbb{R}_{>0})^2$$



Schlussrechnungen

- Wenn bei einem Gemüsehändler 2 kg Erdäpfel 4 Euro kosten, wieviel kosten dann 1000 kg?
- Aufgabe ohne weitere Information nicht lösbar.
- Wenn die Preisgestaltung dieses Händlers direkt proportional ist, dann kosten 1000 kg Erdäpfel 500-mal soviel wie 2 kg, also 2000 Euro.
  Tatsächlich zahlt man viel weniger.
- Wichtig: bei Schlussrechnungen immer zuerst überprüfen, ob der beschriebene Zusammenhang direkt proportional ist.

Indirekte Proportionalität

- G, H Größenbereiche, Funktion $f : G \longrightarrow H$ beschreibt eine Zuordnung von G nach H
- f ist *indirekt proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = c^{-1} \cdot f(g)$$

- „Das Bild des c-fachen ist das $\frac{1}{c}$-fache des Bildes.“
- Analog: f ist *quadratisch proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = c^2 \cdot f(g)$$

- Allgemein: $\chi : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ Gruppenhomomorphismus, dh. für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist $\chi(s.t) = \chi(s).\chi(t)$ und $\chi(1) = 1$. f ist χ*-proportional* , wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = \chi(c) \cdot f(g)$$

Was sind „lineare Funktionen"?

- Lineare Funktionen sind Spezialfälle von Proportionalitäten.
- Sind V, W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine Funktion, dann heißt f *linear*, wenn:

  das Bild jedes Vielfachen das Vielfache des Bildes ist, also

  $$f(c \cdot v) = c \cdot f(v) \ ,$$

  und

  das Bild jeder Summe die Summe der Bilder ist, also

  $$f(u + v) = f(u) + f(v) \ .$$

- Vorsicht: in Schulbüchern ist der Begriff linear etwas allgemeiner, dieser hier entspricht dort dem Begriff „homogen-linear".

Beispiele für lineare Funktionen

- Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (f mit $f(t) = c \cdot t$ mit $c \in \mathbb{R}$) sind Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)$.
- Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ (f mit $f(s, t) = c \cdot s + d \cdot t$ mit $c, d \in \mathbb{R}$) sind Ebenen in $\mathbb{R}^3$ durch $(0, 0, 0)$.
- Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ (f mit $f(t) = t \cdot (c, d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$) sind Geraden in $\mathbb{R}^3$ durch $(0, 0, 0)$.

Beispiele für lineare Funktionen

- V Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen, W Vektorraum aller Funktionen

  Die Funktion „Differenzieren“

  $$D : V \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad D(v) = v'$$

  ist linear,
  dh. die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen und die Ableitung eines Vielfachen ist das entsprechende Vielfache der Ableitung

  cf. Summenregel und Faktorregel der Differenzialrechnung

Beispiele für lineare Funktionen

- V Vektorraum aller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω, $W = \mathbb{R}$ Vektorraum der reellen Zahlen.

  Die Funktion
  $$E : V \longrightarrow W$$
  mit $E(X) =$ Erwartungswert der Zufallsvariablen X
  ist linear, dh. der Erwartungswert der Summe von Zufallsvariablen ist die Summe ihrer Erwartungswerte und der Erwartungswert des Vielfachen einer Zufallsvariablen ist das entsprechende Vielfache des Erwartungswertes.

Schlussbemerkungen

- Größen sind Elemente eines Größenbereichs, Größen können mit positiven reellen Zahlen multipliziert werden
- Eindimensionale Größen können durch eine ausgewählte Größe (Maßeinheit) und eine positive Zahl (Maßzahl) beschrieben werden.
- Vektoren sind Elemente eines Vektorraums, Vektoren können addiert und mit beliebigen reellen Zahlen multipliziert werden.
- Eine Funktion zwischen zwei Größenbereichen ist proportional, wenn das Bild eines positiven Vielfachen das gleiche Vielfache des Bildes ist.
- Eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen ist linear, wenn das Bild eines Vielfachen das gleiche Vielfache des Bildes ist und das Bild einer Summe die Summe der Bilder ist.

Literatur

BMBWF: Lehrplan der Volksschule.
https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

BMBWF: Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule.
https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ahs.html

Grisel, H.: Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe.
Journal für Mathematik- Didaktik, 18 (1997), 259–284.

Grisel, H.: Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung.
Journal für Mathematik-Didaktik 37 (2016), 5-30

Pauer, F.: Was sind Vektoren? Wozu braucht man sie? Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 38 (2005), 87-98

Pauer, F.: Schlussrechnung, Modellbildung und Interpolation.
Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 91 (2005), 91-98

Pauer, F.: Algebra und Geometrie im Schulunterricht. 3. Auflage.
Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at