Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 12 (Lösungen)
17. Jänner 2012

(1) **Lösung von Aufgabe (1)** :
Das *charakteristische Polynom* der Matrix N ist das Polynom

$$\chi_N(z) = \det(zI_3 - N) = \det \begin{pmatrix} z-2 & 0 & -4 \\ +3 & z+3 & 0 \\ -6 & 0 & z-4 \end{pmatrix},$$

also das Polynom $((z-2)(z-4) - (-4)(-6))(z+3) = (z^2 - 6z - 16)(z+3) \in \mathbb{R}[z]$.
Dieses Polynom hat die Nullstellen

- $c_1 = 3 + \sqrt{9+16} = 3 + 5 = +8 \in \mathbb{R}$
- $c_2 = 3 - \sqrt{9+16} = 3 - 5 = -2 \in \mathbb{R}$
- $c_3 = -3 \in \mathbb{R}$.

Also sind $c_1 = +8$, $c_2 = -2$, $c_3 = -3$ die *Eigenwerte* der Matrix N.
Ist $i = 1$ oder 2 oder 3, so ist der *Eigenraum* von N zum Eigenwert c_i der Untervektorraum

$$E(N, c_i) = \{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid Nx = c_i\, x\} = L(c_i\, I_3 - N,\, 0) \;\leq\; \mathbb{R}^{3\times 1},$$

also der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $(c_i\, I_3 - N)\, x = 0$.
Es ist

$$(c_1\, I_3 - N) = (8\, I_2 - M) = \begin{pmatrix} 8-2 & 0 & -4 \\ +3 & 8+3 & 0 \\ -6 & 0 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 & 0 & -4 \\ +3 & 11 & 0 \\ -6 & 0 & +4 \end{pmatrix},$$

woraus durch Anwendung des Gauss-Algorithmus folgt

$$E(N, c_1) = E(N, 8) = L(8\, I_3 - N,\, 0) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 22 \\ -6 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist

$$(c_2\, I_3 - N) = (-2\, I_3 - N) = \begin{pmatrix} -2-2 & 0 & -4 \\ +3 & -2+3 & 0 \\ -6 & 0 & -2-4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +4 & 0 & +4 \\ -3 & -1 & 0 \\ +6 & 0 & +6 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$E(N, c_2) = E(N, -2) = L(-2\, I_3 - N, 0) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} +1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich gilt

$$(c_3\, I_3 - N) = (-\,3\, I_3 - N) = \begin{pmatrix} -\,3-2 & 0 & -\,4 \\ +\,3 & -\,3+3 & 0 \\ -\,6 & 0 & -\,3-4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} +\,5 & 0 & +\,4 \\ -\,3 & 0 & 0 \\ +\,6 & 0 & +\,7 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$E(N, c_3) = E(N, -\,3) = L(-\,3\, I_3 - N, 0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist
- $x_1 = (22, -\,6, 33)^{\mathrm{T}} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ein *Eigenvektor* von N zum Eigenwert $c_1 = +\,8$
- $x_2 = (+\,1, -\,3, -\,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ein *Eigenvektor* von N zum Eigenwert $c_2 = -\,2$
- $x_3 = (0, +\,1, 0)^{\mathrm{T}} \qquad \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ein *Eigenvektor* von N zum Eigenwert $c_3 = -\,3$.

Tatsächlich gilt
- $Nx_1 = +\,8\, x_1 = c_1\, x_1$
- $Nx_2 = -\,2\, x_2 = c_2\, x_2$
- $Nx_3 = -\,3\, x_3 = c_3\, x_3$.

Da die Vektoren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ *linear unabhängig über* $\mathbb{R}$ sind (Beweis!), bilden sie eine $\mathbb{R}$-*Basis* des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(2) **Lösung von Aufgabe (2)**:

- Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $(1-\lambda)(-1-\lambda)+4 = \lambda^2+3$ und daher $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$.

  Eigenraum zu λ_1:

  $$\begin{bmatrix} 1-i\sqrt{3} & -2 \\ 2 & -1-i\sqrt{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-i\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left((1-i\sqrt{3})x_1 - 2x_2 = 0\right)$$

  Daher gilt also

  $$E(A, i\sqrt{3}) = \mathbb{C}\begin{bmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

  Eigenraum zu λ_1: Ein ähnliches Argument ergibt

  $$E(A, -i\sqrt{3}) = \mathbb{C}\begin{bmatrix} 2 \\ 1+i\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

- Wir haben

  $$A^n = (TDT^{-1})^n = TDT^{-1}TDT^{-1}\ldots TDT^{-1} = TD^nT^{-1}$$

  und daher

  $$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(\left(3-i\sqrt{3}\right)a + \left(3+i\sqrt{3}\right)b\right) & \frac{i(a-b)}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i(a-b)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6}\left(\left(3+i\sqrt{3}\right)a + \left(3-i\sqrt{3}\right)b\right) \end{bmatrix}$$

  für $a = (i\sqrt{3})^n$ und $b = (-i\sqrt{3})^n$.

- Der Grenzwert existiert nicht, da alle Komponenten divergieren (beachte $\sqrt{3} > 1$).

(3) **Lösung von Aufgabe (3)** :
Wir setzen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$T \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = AT \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir von links mit T^{-1} und erhalten

$$\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = T^{-1}AT \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Identifizieren wir nun T mit der Matrix der Eigenwerte aus Aufgabe (2) erhalten wir

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$