Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 11 (Lösungen)

10. Jänner 2012

(1) **Lösung von Aufgabe (1)**:

ad (a):

Man gewinnt aus der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 4 & 21 \\ 5 & 11 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 28 & 81 & 8 & 54 \end{pmatrix}$$

durch eine *ungerade* Anzahl von Zeilenvertauschungen die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 8 \\ 12 & 30 & 4 & 21 \\ 28 & 81 & 8 & 54 \end{pmatrix}$$

und aus dieser durch eine *ungerade* Anzahl von Spaltenvertauschungen die Matrix

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 12 & 21 & 30 \\ 8 & 28 & 54 & 81 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 203 der Vorlesung ist folglich

$$\det(A) = -\det(A') = -(-\det(A'')) = \det(A'').$$

Die Matrix A'' verwandelt man durch Zeilenumformungen vom Typ 1 (Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile) in die obere Dreiecksmatrix

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach den Sätzen 203 und 199 der Vorlesung ist also

$$\det(A'') = \det(A''') = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

und damit

$$\det(A) = 1\,.$$

In analoger Weise gewinnt man aus der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 & 18 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 27 & 32 & 60 & 52 \\ 3 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch eine *ungerade* Anzahl von Zeilenvertauschungen die Matrix

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 & 6 \\ 9 & 16 & 24 & 18 \\ 27 & 32 & 60 & 52 \end{pmatrix}$$

und aus dieser durch eine *ungerade* Anzahl von Spaltenvertauschungen die Matrix

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 9 & 18 & 24 & 16 \\ 27 & 52 & 60 & 32 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 203 der Vorlesung ist folglich

$$\det(B) = -\det(B') = -(-\det(B'')) = \det(B'').$$

Die Matrix B'' verwandelt man durch Zeilenumformungen vom Typ 1 in die Matrix

$$B''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -20 \\ 0 & -2 & -21 & -76 \end{pmatrix}$$

und diese durch eine *ungerade* Anzahl von Zeilenvertauschungen in die Matrix

$$B'''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -21 & -76 \\ 0 & 0 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nach den Sätzen 203 und 199 der Vorlesung ist also

$$\det(B'') = \det(B''') = -\det(B'''') = -(1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)) = -(-24) = 24$$

und damit

$$\det(B) = 24\,.$$

ad (b):
Wegen $\det(A) = 1 \neq 0$ und $\det(B) = 24 \neq 0$ sind nach Satz 202 der Vorlesung die Matrizen A und B *invertierbar* und es gilt

- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$
- $\det(B^{-1}) = 1/\det(B) = 1/24\,.$

A^{-1} und B^{-1} braucht man dafür *nicht* zu berechnen (!)

ad(c) :
Die gefragten *Determinanten* kann man alle aus den bereits bekannten Beziehungen $\det(A) = 1$ und $\det(B) = 24$ mithilfe von Sätzen der Vorlesung ermit-teln. Die jeweiligen *Matrizen* müssen dafür *nicht* berechnet werden (!)

Da A und B *vierreihige* quadratische Matrizen sind, gilt nach Satz 203
- $\det(2A) = 2^4 \cdot \det(A) = 2^4 \cdot 1 = 16$
- $\det(3B) = 3^4 \cdot \det(B) = 3^4 \cdot 24 = 81 \cdot 24 = 1944$.

Nach Satz 195 gilt andererseits
- $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A) = 1$
- $\det(B^{\mathrm{T}}) = \det(B) = 24$.

Nach dem *Multiplikationssatz für Determinanten* (Satz 202) gilt schließlich
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 24 = 24$
- $\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) = 24 \cdot 1 = 24$
- $\det((AB)^{\mathrm{T}}BA^{\mathrm{T}}) = \det(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}BA^{\mathrm{T}}) = \det(B^{\mathrm{T}}) \cdot \det(A^{\mathrm{T}}) \cdot \det(B) \cdot \det(A^{\mathrm{T}}) =$
  $= \det(B) \cdot \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(A) = 24 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 1 = 576$.

(2) **Lösung von Aufgabe (2)** :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 60 - 20 + 12 = 70$$

(3) **Lösung von Aufgabe (3)** :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -3 \left(3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right) - 2 \left(- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -9 \cdot (4 + 3 + 1 - 6) + 3 \cdot (-4 + 3 - 2 - 6) + 2 \cdot (1 + 15) \\
&= -13
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt entwickeln wir nach der 2-te Zeile. Im zweiten Schritt entwickeln wir nach 1-Spalte und nach der 4-te Zeile. Danach wenden wir die Regel von Sarrus an.

(4) **Lösung von Aufgabe (4)** : Das Verfahren aus Aufgabe (3) benötigt (für allgemeine Matrizen) ungefähr $n!$ Rechenoperationen. Das Verfahren aus Aufgabe (1) ungefähr n^3. Für allgemeine Matrizen ist also der Laplacesche Entwicklungssatz nur für kleine Matrizen sinvoll. Allerdings bietet er auch für große Matrizen, welche dünn besetzt sind (also viele Einträge 0 sind) Vorteile. Außerdem kann er ohne Probleme auf Matrizen angewendet werden, welche Parameter als Einträge aufweisen deren Wert nicht bekannt ist.