Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 11

10. Jänner 2012

(1) $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 4 & 21 \\ 5 & 11 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 28 & 81 & 8 & 54 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 & 18 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 27 & 32 & 60 & 52 \\ 3 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$, indem Sie jede der beiden Matrizen durch elementare Zeilenumformungen und elementare Spaltenumformungen vom Typ 1 resp. Typ 2 in eine obere Dreiecksmatrix verwandeln!

(b) Sind A und B invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls $\det(A^{-1})$ und $\det(B^{-1})$.

(c) Berechnen Sie die Determinanten $\det(2A)$, $\det(3B)$, $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det(A^{\mathrm{T}})$, $\det(B^{\mathrm{T}})$, $\det((AB)^{\mathrm{T}}BA^{\mathrm{T}})$.
Müssen für die Berechnung dieser Determinanten zuerst die entsprechenden Matrizen berechnet werden?

(2) Berechne die Determinante der folgenden Matrizen mit der Regel von Sarrus (Beispiel 172).

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Der Laplacesche Entwicklungssatz (siehe Proseminar) besagt, dass zur Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diese nach der j-ten Spalte wie folgt entwickelt wird

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A^{(ij)},$$

wobei die Matrix $A^{(ij)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ durch Streichung der j-ten Spalte und der i-ten Zeile gegeben ist. Da $\det A = \det A^T$ kann die Matrix auch nach der j-ten Zeile entwickelt werden. Berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

(4) Überlege für welche Matrizen das Verfahren aus Aufgabe (1) bzw. aus Aufgabe (3) zu bevorzugen ist.