Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 10 (Lösungen)
13. Dezember 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1)**:

Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, notieren wir im folgenden ein Polynom $a_m\,x^m + a_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + a_1\,x^1 + a_0\,x^0$ in der Form $(a_m\ \ a_{m-1}\ \ldots\ a_1\ \ a_0)$.

Damit ist

- $f = (a_5\ \ a_4\ \ a_3\ \ a_2\ \ a_1\ \ a_0) = (+10\ \ \ -14\ \ \ +62\ \ \ -37\ \ \ +85\ \ \ +50).$

Setzen wir für eine beliebige Zahl $c \in \mathbb{Q}$ sukzessive

- $f_0(c) := a_5$
- $f_1(c) := f_0(c)\,c + a_4$
- $f_2(c) := f_1(c)\,c + a_3$
- $f_3(c) := f_2(c)\,c + a_2$
- $f_4(c) := f_3(c)\,c + a_1$
- $f_5(c) := f_4(c)\,c + a_0\,,$

dann ist nach Satz 165 der Vorlesung

- $f_5(c) = f(c)\,.$

Das folgt aus

- $f(c) = a_5\,c^5 + a_4\,c^4 + a_3\,c^3 + a_2\,c^2 + a_1\,c + a_0 =$
  $= ((((a_5\,c\ +\ a_4)\,c\ +\ a_3)\,c\ +\ a_2)\,c\ +\ a_1)\,c\ +\ a_0\,.$

Für $c = 1/2$ erhalten wir

- $f_0(1/2) = \quad 10$
- $f_1(1/2) = \quad 10/2\ \ -\ 14 = -18/2$
- $f_2(1/2) = -18/4\ \ +\ 62 = \ 230/4$
- $f_3(1/2) = \ 230/8\ \ -\ 37 = -66/8$
- $f_4(1/2) = -66/16\ +\ 85 = 1294/16$
- $f_5(1/2) = 1294/32\ +\ 50 = 2894/32\,.$

Also ist $f(1/2) = f_5(1/2) = 2894/32 = 1447/16 = 91 - 9/16$.

In analoger Weise ist

- $g_0(1/2) = \quad 5$
- $g_1(1/2) = \quad 5/2 - \quad 7 = -9/2$
- $g_2(1/2) = -9/4 + 11 = \quad 35/4$
- $g_3(1/2) = \quad 35/8 + \quad 6 = \quad 83/8$.

Also ist $g(1/2) = g_3(1/2) = 83/8 = 10 + 3/8$.

(2) **Lösung von Aufgabe (2)**:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} a_j(b_j - b_{j-1}) &= a_m b_m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j b_j - \sum_{j=2}^{m} a_j b_{j-1} - a_1 b_0 \\ &= a_m b_m - a_1 b_0 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j b_j - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+1} b_j \\ &= a_m b_m - a_1 b_0 - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{j+1} - a_j) b_j\end{aligned}$$

Die Verbindung zur Integration kann hergestellt werden, indem der Differentialquotient als Näherung an die Ableitung verwendet wird.

(3) **Lösung von Aufgabe (3)**:

ad (a):

Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist

$$\begin{aligned}(fg)(x) = f(x)\,g(x) &= (2 + 3\,x)(7 - 5\,x + 6\,x^2) = \\ &= (2{\cdot}7) + (-\,2{\cdot}5 + 3{\cdot}7)\,x + (2{\cdot}6 - 3{\cdot}5)\,x^2 + (3{\cdot}6)\,x^3 = \\ &= 14 + 11\,x - 3\,x^2 + 18\,x^3\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}(gf)(x) = g(x)\,f(x) &= (7 - 5\,x + 6\,x^2)(2 + 3\,x) = \\ &= (7{\cdot}2) + (-\,5{\cdot}2 + 7{\cdot}3)\,x + (6{\cdot}2 - 5{\cdot}3)\,x^2 + (6{\cdot}3)\,x^3 = \\ &= 14 + 11\,x - 3\,x^2 + 18\,x^3\,.\end{aligned}$$

Also ist sowohl $fg : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ als auch $gf : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die Polynomfunktion

$$x \mapsto 14 + 11\,x - 3\,x^2 + 18\,x^3.$$

Bemerkung 1:

Daß für das *Produkt* der beiden Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die *Kommutativität* $fg = gf$ gilt, folgt aus der Definition von fg und gf und aus der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Q}$, denn für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist $(fg)(x) = f(x)\,g(x) = g(x)\,f(x) = (gf)(x)$.

Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist andererseits

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= 2 + 3 \cdot g(x) = \\ &= 2 + 3 \cdot (7 - 5\,x + 6\,x^2) = \\ &= (2 + 3{\cdot}7) - (3{\cdot}5)\,x + (3{\cdot}6)\,x^2 = \\ &= 23 - 15\,x + 18\,x^2\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = 7-5\cdot f(x)+6\cdot f(x)^2 = \\ &= 7-5\cdot(2+3\,x)+6\cdot(2+3\,x)^2 = \\ &= 7-5\cdot(2+3\,x)+6\cdot(4+12\,x+9\,x^2) = \\ &= (7-5\cdot 2+6\cdot 4)+(-5\cdot 3+6\cdot 12)\,x+(6\cdot 9)\,x^2 = \\ &= 21+57\,x+54\,x^2.\end{aligned}$$

Also ist $f\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ die Polynomfunktiom

$$x\mapsto 23-15\,x+18\,x^2$$

und $g\circ f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ die Polynomfunktion

$$x\mapsto 21+57\,x+54\,x^2.$$

Da die beiden *Polynome* $23-15\,x+18\,x^2$ und $21+57\,x+54\,x^2$ aus $\mathbb{Q}[x]$ *verschieden* sind, gilt nach Satz 231 (4) der Vorlesung, daß auch die beiden *Polynomfunktionen* $f\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ und $g\circ f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *verschieden* sind.
Im Gegensatz zur Multiplikation ist die *Hintereinanderausführung* zweier Funktionen also *im allgemeinen nicht kommutativ*.

Bemerkung 2:
Für die Hintereinanderausführung zweier beliebiger Funktionen f und g schreibt man statt $g\circ f$ (gelesen g *nach* f) häufig gf. Falls man die Funktionen f und g nicht nur hintereinander ausführen, sondern auch in sinnvoller Weise *multiplizieren* kann, sollte man die Notation gf nur für das *Produkt* von g und f benützen, denn im allgemeinen ist dann $g\circ f\neq gf$.

ad (b):
$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ und $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ seien die Polynomfunktionen

- $x\mapsto a_0+a_1\,x+\cdots+a_m\,x^m$
- $x\mapsto b_0+b_1\,x+\cdots+b_n\,x^n$

mit $m\geq 0$, $n\geq 0$, $a_0,a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{Q}$, $b_0,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{Q}$, $a_m\neq 0$ und $b_n\neq 0$.
Dann ist für jedes $x\in\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)\,g(x) = \\ &= (a_0+a_1\,x+\cdots+a_m\,x^m)(b_0+b_1\,x+\cdots+b_n\,x^n) = \\ &= a_0\,b_0+(a_0\,b_1+a_1\,b_0)\,x+(a_0\,b_2+a_1\,b_1+a_2\,b_0)\,x^2+\cdots \\ &\quad\cdots+(a_{m-1}\,b_n+a_m\,b_{n-1})\,x^{m+n-1}+a_m\,b_n\,x^{m+n} = \\ &= c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+\cdots+c_{m+n-1}\,x^{m+n-1}+c_{m+n}\,x^{m+n},\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $c_0,\ldots,c_{m+n}$ durch $c_k=\sum_{i+j=k}a_i\,b_j$ bestimmt sind.
In diesen Formeln ist für $i>m$ resp. $j>n$ jeweils $a_i=0$ resp. $b_j=0$ zu setzen.
Wir erhalten:
$(*)$ *Das Produkt* $fg:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *zweier Polynomfunktionen* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *und* $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *ist eine Polynomfunktion*.
Mit Hilfe dieser Aussage können wir zeigen, daß mit f und g auch $f\circ g$ eine Polynomfunktion ist:
Für jedes $x\in\mathbb{Q}$ ist

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a_0+a_1\,g(x)+a_2\,g(x)^2+\cdots+a_m\,g(x)^m.$$

Ohne Argumente angeschrieben bedeutet das

$$f\circ g=a_0\,g^0+a_1\,g^1+a_2\,g^2+\cdots+a_m\,g^m,$$

wobei g^0 die konstante Funktion mit dem Wert 1 und $g^1 = g$ ist.

Aus $(*)$ ergibt sich durch Induktion, daß die Funktionen $g^0,\ g^1,\ g^2, \ldots, g^m$ und damit die Funktionen $a_0\, g^0,\ a_1\, g^1,\ a_2\, g^2, \ldots, a_m\, g^m$ Polynomfunktionen sind. Da die Summe endlich vieler Polynomfunktionen eine Polynomfunktion ist, erhalten wir:

Die Hintereinanderausführung $f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *zweier Polynomfunktionen* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *und* $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *ist eine Polynomfunktion*.