Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 9 (Lösungen)
6. Dezember 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1)**:

ad (a):

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ verwandelt werden.

ad (b):

Entsprechend dem SCHMIDT-Algorithmus setzen wir zunächst

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a_2 - \frac{\langle u_1, a_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{17}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ +5 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_2 = \begin{pmatrix} +3 \\ +6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aus der Wahl von u_1 und u_2 folgt

$$a_3 - \frac{\langle u_1, a_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, a_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{19}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{70} \begin{pmatrix} +3 \\ +6 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten insgesamt

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +3 \\ +6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

ad (c):

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} +3 \\ +6 \\ -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ad (d):

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \langle x, v_3 \rangle v_3 = \frac{6}{\sqrt{14}} v_1 + \frac{4}{\sqrt{70}} v_2 - \frac{1}{\sqrt{5}} v_3 .$$

(2) **Lösung von Aufgabe (2)**:

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (Av)_i w_i \\ &= \sum_{i,j} A_{ij} v_j w_i \\ &= \sum_j v_j \left(\sum_i A_{ij} w_i \right) \\ &= \sum_j v_j \left(\sum_i B_{ji} w_i \right) \\ &= \sum_j v_j (Bw)_j \\ &= \langle v, Bw \rangle \end{aligned}$$

(3) **Lösung von Aufgabe (3)**:

Wir bezeichnen mit g_1, g_2, g_3 die Funktionen $g(x) = 1$, $g(x) = x$ und $g(x) = x^2$. Daher

$$f_1(x) := 1.$$

Es folgt

$$f_2(x) := x - \frac{\langle f_1, g_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1(x) = x,$$

da $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0$. Daher

$$f_3(x) := x^2 - \frac{\langle f_1, g_3 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1(x) - \frac{\langle f_2, g_3 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$