# Praktikum
# Lineare Algebra 1
# WS 2011/2012

## Blatt 9

### 6. Dezember 2011

(1) Die Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ seien gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $(a_1, a_2, a_3)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des Schmidt-Algorithmus (möglichst einfache) Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit den Eigenschaften

- $\mathbb{R}\, a_1 = \mathbb{R}\, u_1$
- $\mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2$
- $\mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 + \mathbb{R}\, a_3 = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \mathbb{R}\, u_3$
- $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0\,.$

Dabei sei $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(c) Verwandeln Sie die *orthogonale* Basis $(u_1, u_2, u_3)$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ in eine *orthonormale* Basis $(v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $x = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ bezüglich der orthonormalen Basis $(v_1, v_2, v_3)$.

(2) Zeige, dass für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Bw\rangle,$$

wobei $B$ definiert ist durch die Relation $\forall i, j\colon B_{ij} = A_{ji}$.

Anmerkung: Oft schreibt man $B = A^T$ und bezeichnet $B$ als die transponierte Matrix von $A$.

(3) Betrachte folgenden $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \colon f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\} = \langle 1, x, x^2\rangle.$$

Verwende den Schmidt-Algorithmus um ausgehend von der Basis $\{1, x, x^2\}$ eine Orthogonalbasis von $V$ zu konstruieren. Wir verwenden das folgende Skalarprodukt:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Anmerkung: Solche orthogonalen Polynome werden z.B.: bei der Interpolation von Funktionen verwendet. Dieses Beispiel zeigt, dass bei der Untersuchung von Vektorräumen es keinenfalls notwendig ist sich auf den $\mathbb{R}^n$ zu beschränken.