Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 8 (Lösungen)

29. November 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1):**

ad (a) und (b):

Die *Zyklenzerlegungen* der angegebenen Permutationen aus S_8 lauten:

$$\begin{array}{rcl} \sigma &=& (1\ \ 2\ \ 5) \circ (3\ \ 6) \circ (4\ \ 7\ \ 9\ \ 8) \\ \tau &=& (1\ \ 3\ \ 4\ \ 7) \circ (2) \circ (5\ \ 6\ \ 9) \circ (8) \\ \sigma \circ \tau &=& (1\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 9) \circ (2\ \ 5\ \ 3\ \ 7) \\ \tau \circ \sigma &=& (1\ \ 2\ \ 6\ \ 4) \circ (3\ \ 9\ \ 8\ \ 7\ \ 5) \\ \sigma^{-1} &=& (1\ \ 5\ \ 2) \circ (3\ \ 6) \circ (4\ \ 8\ \ 9\ \ 7) \\ \tau^{-1} &=& (1\ \ 7\ \ 4\ \ 3) \circ (2) \circ (5\ \ 9\ \ 6) \circ (8) \\ (\sigma \circ \tau)^{-1} &=& (1\ \ 9\ \ 4\ \ 8\ \ 6) \circ (2\ \ 7\ \ 3\ \ 5) \\ (\tau \circ \sigma)^{-1} &=& (1\ \ 4\ \ 6\ \ 2) \circ (3\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 9\,. \end{array}$$

Bei der Darstellung einer Permutation als Hintereinanderausführung von Zykeln läßt man meistens das Symbol $\circ$ sowie Zykeln der Länge 1 (das heißt Fixpunkte) weg. Man schreibt also beispielsweise $\tau = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 7)\,(5\ \ 6\ \ 9)$. Allerdings wird dann nicht mehr deutlich, daß τ eine Permutation der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und *nicht* der Menge $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ sein soll!

ad (b):

Die *Vorzeichen* der genannten Permutationen sind entsprechend der Definition 159 des Skriptums:

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{sign}(\sigma) &=& (-1)^{9-3-0} &=& +1 \\ \operatorname{sign}(\tau) &=& (-1)^{9-2-2} &=& -1 \\ \operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) &=& (-1)^{9-2-0} &=& -1 \\ \operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) &=& (-1)^{9-2-0} &=& -1 \\ \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) &=& (-1)^{9-3-0} &=& +1 \\ \operatorname{sign}(\tau^{-1}) &=& (-1)^{9-2-2} &=& -1 \\ \operatorname{sign}((\sigma \circ \tau)^{-1}) &=& (-1)^{9-2-0} &=& -1 \\ \operatorname{sign}((\tau \circ \sigma)^{-1}) &=& (-1)^{9-2-0} &=& -1\,. \end{array}$$

(2) **Lösung von Aufgabe (2):**

Die Zyklenzerlegung der Permutation $\rho \in S_5$ lautet $\rho = (1\ \ 4\ \ 3)\,(2\ \ 5)$.

Es gilt $(1\ \ 4\ \ 3) = (1\ \ 4)\,(4\ \ 3) = (1\ \ 4)\,(3\ \ 4)$. Also ist $\rho = (1\ \ 4)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$.

Da für je drei paarweise verschiedene Elemente $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Beziehung $(i\ \ k) = (i\ \ j)\,(j\ \ k)\,(i\ \ j)$ gilt, ist aber auch

$\rho = (1\ \ 2)\,(2\ \ 4)\,(1\ \ 2)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 3)\,(3\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 5)\,(4\ \ 5)\,(1\ \ 5)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(1\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(2\ \ 5)$ und so weiter ...

(3) **Lösung von Aufgabe (34)**:

ad (a):
Nach Satz 115 der Vorlesung hat für $n \geq 1$ die Menge S_n aller Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ genau $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ Elemente.
Es ist

$$\begin{aligned}
1\,! &= 1\\
2\,! &= 2\\
3\,! &= 6\\
4\,! &= 24\\
5\,! &= 120\\
6\,! &= 720\\
7\,! &= 5040\\
8\,! &= 40320\\
9\,! &= 362880\\
10\,! &= 3628800\,.
\end{aligned}$$

ad (b):
Die $2\,! = 2$ Elemente von S_2 sind

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_1) = +1\\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_2) = -1\,.
\end{aligned}$$

Die $3\,! = 6$ Elemente von S_3 sind

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_1) = +1\\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_2) = +1\\
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_3) = +1\\
\sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ \ 3) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_4) = -1\\
\sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)(3) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_5) = -1\\
\sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2) \ \text{ mit } \ \operatorname{sign}(\sigma_6) = -1\,.
\end{aligned}$$