Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 6 (Lösungen)
15. November 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1) :**

Die drei angegebenen Gleichungssysteme sind $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die um die Spalten 0, b, c erweiterte Koeffizientenmatrix A, also die Matrix

$$(A \,|\, 0 \,|\, b \,|\, c) = \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(A' \,|\, 0 \,|\, b' \,|\, c') = \left(\begin{array}{rrrrr|r|r|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

wobei die Matrix in Stufenform A' und die Spalte c' – unabhängig von den verwendeten Zeilenumformungen – *eindeutig bestimmt* sind, während das für die Spalte b' *nicht* gilt.

Damit ist

$$L(A, 0) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$
$$L(A, b) = \emptyset$$
$$L(A, c) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 + z \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\},$$

wobei w_1, w_2 und z die folgenden Spaltenvektoren sind :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) **Lösung von Aufgabe (2):**

ad (a):

Die um die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ erweiterte Matrix A, also die Matrix

$$(A \,|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(I \,|\, A') = \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -10/6 & -1/6 & 4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/6 & 2/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & -1/6 & 0/6 \end{array}\right).$$

Also ist A *invertierbar* und es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad (b) und (c):

Sind $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ Matrizen mit $XA = B$ und $AY = B$, dann gilt

- $X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = BA^{-1}$
- $Y = IY = (A^{-1}A)Y = A^{-1}(AY) = A^{-1}B.$

Umgekehrt gilt

- $(BA^{-1})A = B(AA^{-1}) = BI = B$
- $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B.$

Dabei sei I die Einheitsmatrix aus $\mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Also gibt es *genau eine* Matrix $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und *genau eine* Matrix $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft $XA = B$ und $AY = B$, nämlich

- $X = BA^{-1}$
- $Y = A^{-1}B.$

Es gilt

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -2 & 12 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich insbesondere, daß $X \neq Y$ ist.

Bemerkung:

Aus der Eindeutigkeit der Matrizen X und Y und aus $X \neq Y$ folgt insbesondere, daß es – *obwohl* A invertierbar ist – *keine* Matrix $Z \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $ZA = B = AZ$ gibt!