Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 5 (Lösungen)
8. November 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1) :**

ad (a) :

Durch elementare Zeilenumformungen kann man die Matrizen A, B, C in die folgenden Matrizen in Stufenform A', B', C' verwandeln :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

Die elementaren Zeilenumformungen, mit deren Hilfe man von A zu A' resp. von B zu B' resp. von C zu C' gelangt, sind durch A, B, C *nicht eindeutig bestimmt*. Hingegen kann man zeigen, daß die Matrizen A', B', C' durch A, B, C *eindeutig bestimmt* sind.

ad (b) :

Sind A', B', C' die in (a) berechneten Matrizen in Stufenform, dann haben nach Satz 86 und Satz 90 der Vorlesung die homogenen linearen Gleichungssysteme

- $Ax = 0$ und $A'x = 0$
- $Bx = 0$ und $B'x = 0$
- $Cx = 0$ und $C'x = 0$

jeweils denselben Lösungsraum.

Andererseits ist nach Satz 84(2) der Vorlesung

- (u) eine (einelementige) $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(A', 0)$ von $A'x = 0$
- (v) eine (einelementige) $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(B', 0)$ von $B'x = 0$
- (w_1, w_2, w_3) eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(C', 0)$ von $C'x = 0$,

sofern u, v, w_1, w_2, w_3 , die folgenden Spalten mit Elementen aus $\mathbb{Q}$ sind :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1} \qquad v = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 1} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 1} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 1}.$$

Also gilt für die Lösungsräume der homogenen Systeme $Ax = 0$, $Bx = 0$, $Cx = 0$:

- $L(A,0) = L(A',0) = \{r\,u \mid r \in \mathbb{Q}\} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ -2\,r \\ r \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q} \right\}$

- $L(B,0) = L(B',0) = \{r\,v \mid r \in \mathbb{Q}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -r/4 \\ r \\ -3\,r/2 \\ r \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q} \right\}$,

- $L(C,0) = L(C',0) = \{r_1\,w_1 + r_2\,w_2 + r_3\,w_3 \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -4\,r_1 - 8\,r_2 - 3\,r_3 \\ r_1 + 3\,r_2 + r_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(2) **Lösung von Aufgabe (2):**
Sind A, b, c, d die angegebenen Matrizen und sind A', b', c', d' die Matrizen

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d' = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann gibt es eine *nicht eindeutig bestimmte* endliche Folge von elementaren Zeilenumformungen, welche A in A' und gleichzeitig b in b' resp. c in c' resp. d in d' überführt.
Nach Satz 90 der Vorlesung haben die inhomogenen linearen Gleichungssysteme
- $Ax = b$ und $A'x = b'$
- $Ax = c$ und $B'x = c'$
- $Ax = d$ und $C'x = d'$

jeweils denselben Lösungsraum.
Da A' eine Matrix in Stufenform ist, ergibt sich aus Satz 84(1) und Satz 65 der Vorlesung
- $L(A', b') = \emptyset$
- $L(A', c') = L(A', 0) + y$
- $L(A', d') = L(A', 0) + z$,

wobei $L(A', 0)$ der Lösungsraum des homogenen Systems $A'x = 0$ ist und y resp. z die folgende partikuläre Lösung von $A\,x = c'$ resp. $A'x = d'$ sei:

$$y = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabe 21 ist andererseits das 1-tupel (u) mit

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine (einelementige) $\mathbb{Q}$-Basis von $L(A', 0)$.

Damit erhalten wir die Lösungsräume $L(A, b)$, $L(A, c)$, $L(A, d)$ der inhomogenen Systeme $Ax = b$, $Ax = c$, $Ax = d$:

- $L(A, b) = L(A', b') = \emptyset$
- $L(A, c) = L(A', c') = L(A', 0) + y = \{r\, u + y \mid r \in \mathbb{Q}\}$
- $L(A, d) = L(A', d') = L(A', 0) + z = \{r\, u + z \mid r \in \mathbb{Q}\}$

Während also $L(A, b)$ *leer* ist, gilt für $L(A, c)$ und $L(A, d)$:

- $L(A, c) = \left\{ \begin{pmatrix} r - 5/3 \\ -2\, r + 4/3 \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{Q} \right\}$
- $L(A, d) = \left\{ \begin{pmatrix} r - 4/3 \\ -2\, r + 5/3 \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{Q} \right\}$.