Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt2 (Lösungen)
11. Oktober 2010

(1) Lösung von Aufgabe (1) :

$6317 = (1100010101101)_2$, denn es ist
$1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 4096 + 2048 + 128 + 32 + 8 + 4 + 1 = 6317$

$6317 = (6317)_{10}$ (klar)

$6317 = (18\text{AD})_{16}$, denn es ist
$1 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 1 \cdot 4096 + 8 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 13 \cdot 1 =$
$= 4096 + 2048 + 160 + 13 = 6317.$

Dabei sei wie üblich A = 10 und D = 13.

Zwischen den Zifferndarstellungen von 6317 zur Basis 2 und zur Basis 16 besteht ein Zusammenhang:

Einerseits ist $6317 = (1100010101101)_2 = (0001\,1000\,1010\,1101)_2 = (18\text{AD})_{16}$
und andererseits ist
$(0001)_2 = 1 = (1)_{16}$
$(1000)_2 = 8 = (8)_{16}$
$(1010)_2 = 10 = (\text{A})_{16}$
$(1101)_2 = 13 = (\text{D})_{16}$.

(2) Lösung von Aufgabe (2) :

Sind a, b, c, d ganze Zahlen mit $b > 0$ und $d > 0$, dann gilt für die rationalen Zahlen a/b und c/d:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{5}{11} < \frac{6}{13} < \frac{8}{17} < \frac{11}{23} < \frac{7}{13} < \frac{6}{11}\,,$$

denn es ist
$5 \cdot 13 = 65 < 66 = 11 \cdot 6\,,$
$6 \cdot 17 = 102 < 104 = 13 \cdot 8\,,$
$8 \cdot 23 = 184 < 187 = 17 \cdot 11\,,$
$11 \cdot 13 = 143 < 161 = 23 \cdot 7\,,$
$7 \cdot 11 = 77 < 78 = 13 \cdot 6\,.$

(3) Lösung von Aufgabe (3) :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

(4) Lösung von Aufgabe (4) :

Die Aussage

$$(*) \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

wird für beliebiges $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ durch Induktion über n für alle $n \geq 0$ gezeigt.

Induktionsanfang:

Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k \;=\; q^0 \;=\; 1 \;=\; \frac{q-1}{q-1} \;=\; \frac{q^1-1}{q-1} \;=\; \frac{q^{0+1}-1}{q-1}\,.$$

Induktionsschluß:

Es sei n eine beliebige Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt, das heißt es sei

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

Dann ist auch $n+1$ eine Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt.

Aus der Annahme über die Zahl n folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k \;&=\; \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&=\; \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\
&=\; \frac{(q^{n+1}-1) + q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&=\; \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&=\; \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

- Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$.
- Ist $n \geq 0$ und gilt die Aussage $(*)$ für n, so gilt sie auch für $n+1$.

Also gilt die Aussage $(*)$ für *alle* natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Für $q = 2$ lautet die Aussage $(*)$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \text{für alle } n \geq 0\,.$$

(5) Lösung von Aufgabe (5):

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7}$$