Name:	Gruppe:

Klausur 24.01.2012

Praktikum Lineare Algebra 1 WS 2011/2012

Alle Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein, die Ergebnisse sind soweit wie möglich zu vereinfachen. Als Hilfsmittel ist ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Der Notenschlüssel lautet wie folgt (ohne Mitarbeit): Nicht genügend (0–8 Punkte), Genügend (9–10 Punkte), Befriedigend (11–12 Punkte), Gut (13–14 Punkte), Sehr gut (15-17 Punkte).

(1) **[4 Punkte]** Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 1 \\ 5y &= 4x + z \\ 2y &= 5z + 1 \end{aligned}$$

- Schreibe die Gleichungen in die form Ax=b.
- Bestimme $L(A, b)$.
- Welche Dimension hat der Lösungsraum? Handelt es sich beim Lösungsraum um einen Vektorraum bzw. um einen affinen Raum? Wieviele Lösungen gibt es?

(2) **[4 Punkte]** Gegeben sei folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Bestimme alle Eigenwerte und den Eigenraum aller dieser Eigenwerte.
- Berechne A^n.
- Berechne $\det A$ und $\det(A^n)$.

Hinweis: Für $ad - bc \neq 0$ gilt folgende Relation

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(3) **[2 Punkte]** Berechne die Determinante der folgenden Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(4) **[2 Punkte]** Zeige, dass für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Bw \rangle,$$

wobei die Relation $B_{ij} = A_{ji}$ für alle $i, j \in 1, 2, \ldots, n$ erfüllt ist.

(5) **[3 Punkte]** Berechne folgende Summen

- $\sum_{i=2}^{n} x^{3i+7}$
- $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right)$

(6) **[2 Punkte]** Bildet die Menge $L_1 = \{P \colon 0 \leq P < \infty\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Vektorraum? Wie verhält es sich wenn alle Werte logarithmiert werden, i.e. $L_2 = \{\log P \colon 0 < P < \infty\}$.