Name:	Gruppe:

Klausur 03.02.2012

Praktikum Analysis 1 WS 2011/2012

Alle Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein, die Ergebnisse sind soweit wie möglich zu vereinfachen. Als Hilfsmittel ist ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Der Notenschlüssel lautet wie folgt (ohne Mitarbeit): Nicht genügend (0–8 Punkte), Genügend (9–10 Punkte), Befriedigend (11–12 Punkte), Gut (13–14 Punkte), Sehr gut (15-17 Punkte).

(1) **[2 Punkte]** Gib Definitions und Wertebereich folgender Funktionen an und bestimme ob diese injektiv, surjektiv, oder bijektiv sind

- $f\colon \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log \frac{1}{x}$
- $g\colon \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^3+1}$

Für welche dieser Funktionen exisitert eine Umkehrfunktion?

(2) **[3 Punkte]** Berechne den Grenzwert der folgenden Folgen

- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{9^k}$. Begründe außerdem, warum die Folge konvergiert.
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{\frac{n}{3}+2}$

Hinweis: Verwende $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

(3) **[3 Punkte]**

- Gib Definitions– und Lösungsmenge der Ungleichung $-x^2 + 4x - 1 > 0$ an.
- Zeige die Abschätzung $|(x+y)^3| \leq 8 \max(|x|, |y|)$ für $x, y \in [0,1]$.

(4) **[2 Punkte]** Folgende drei Schwingungen werden überlagert

$$f(t) = \sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad g(t) = 2\cos(2t), \qquad h(t) = 4\cos(2t - \pi).$$

Berechne die Amplitude und Phase der resultierenden Schwingung.

(5) **[2 Punkte]** Berechne den Wert der folgenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

(6) **[2 Punkte]** Zeige (durch Nachrechnen) folgende Relation für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$$

Hinweis: Eulers Formel: $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

(7) **[3 Punkte]** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{z}{\sin(z^2)+1} + \cos z.$$

- Berechne das Taylorpolynom der Funktion f vom Grad 2 um $z = 0$.
- Berechne mithilfe des Taylorpolynoms eine Näherung an die Lösungsmenge der Gleichung $f(z) = 0$ im Bereich $[-2, 2]$. Verwende dazu Abbildung 1.

Hinweis:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

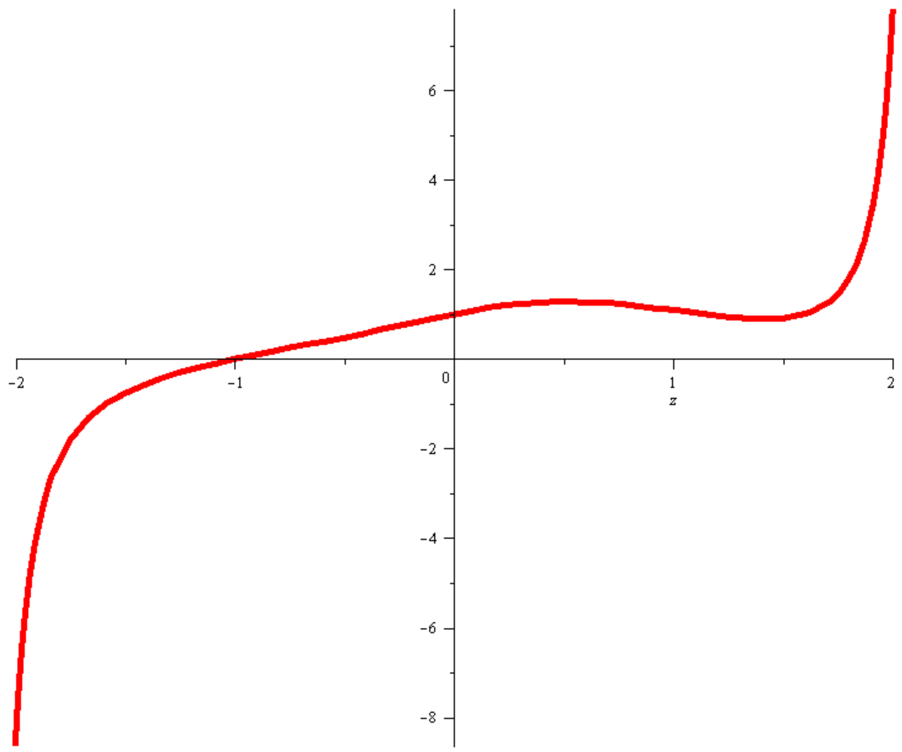

Abbildung 1: Graph der Funktion f aus Aufgabe (7).