Praktikum
Analysis 1
WS 2011/2012

Blatt 13 (Lösungen)
26. Jänner 2012

(1) **Lösung von Aufgabe (1) :** Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k} &= \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^k \\
&= \mathrm{Re} \frac{1}{1 - e^{ix}/2} \\
&= \mathrm{Re} \frac{1 - e^{ix}/2}{(1 - e^{ix}/2)(1 - e^{-ix}/2)} \\
&= \mathrm{Re} \frac{1 - e^{ix}/2}{1 - \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x} \\
&= \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}.
\end{aligned}$$

(2) **Lösung von Aufgabe (2) :** Mithilfe einer Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+3)} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Daher haben wir eine Teleskopsumme (Wichtig: Wir müssen die endliche Summe betrachten und dürfen erst dann den Grenzwert nehmen)

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} &= -\sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+3} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \\
&\quad + \frac{1}{2(N+2)} + \frac{1}{2(N+3)}.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}.$$

(3) **Lösung von Aufgabe (3) :** Konstante Faktoren können wir zum Zweck der Optimierung ignorieren. Der Rest ergibt abgeleitet folgende Funktion

$$f'(v) = \frac{ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\left(2kT - mv^2\right)}{kT}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich 0 erhalten wir

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Wir haben $\overline{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}v \approx 1.13v$ und folgern daher, dass der Mittelwert etwas grösser ist als die Geschwindigkeit in der sich die meisten Teilchen befinden. Anschaulich liegt dies daran, dass die Skala nach unten geschlossen aber nach oben offen ist.