Praktikum
Analysis 1
WS 2011/2012

Blatt 12 (Lösungen)
19. Jänner 2012

(1) **Lösung von Aufgabe (1) :**

- $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ und daher $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.
- $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$ und daher $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
- $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ und daher $f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \mathcal{O}(x^3)$

(2) **Lösung von Aufgabe (2) :**

- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$
- $f(x) = -x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4)$
- $f(x) = 1-(z-1)-(z-1)^2-(z-1)^3+(x^4)$. Das sind gerade die ersten 4 Terme der geometrischen Reihe. Die geometrische Reihe ist gerade $\lim_{n\to\infty} p_n(z)$. Dieser Grenzwert konvergiert gegen $\frac{1}{1-z}$. Achtung: Das ist nicht für beliebige Funktionen wahr. Selbst wenn Funktionen unendlich oft differenzierbar sind, muss der Grenzwert der Taylorpolynome nicht notwendigerweise mit der Funktion übereinstimmen.

(3) **Lösung von Aufgabe (3) :** Aus elementargeometrischen Überlegungen folgt, dass

$$\sin\alpha = \frac{d}{60}.$$

Daher

$$d = 60\sin\alpha = 60\alpha + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right),$$

was für $\alpha \approx 0.0175$ rad ergibt $d \approx 1.04719$ km. Dies stimmt bis auf die letzte hier angegebenen Stelle mit dem exakten Wert überein.

(4) **Lösung von Aufgabe (4) :** Wir haben

$$x = cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right).$$

Das Lösen der quadratischen Gleichung ergibt $\sqrt{3} - 1 \approx 0.732$ und $-\sqrt{3} - 1 \approx -2.732$. Die zweite Lösung ist ein reines Artefakt der Approximation und exisitert nicht (Zeichnung!). Die erste Lösung stimmt mit der exakten Lösung bis auf drei Stellen überein.

Um die exakte Lösung anzugeben, müsste man entweder unendlich viele Nachkommastellen angeben oder die Lösung als Funktion bereits bekannter irrationaler Zahlen (wie π und e) ausdrücken. Ersteres ist offensichtlich nicht in endlicher Zeit möglich während zweiteres zumindest sehr schwierig ist. Daher benügen wir uns mit einer Approximation.