WS 2006/07

Aufgabe 1)

Wenn $x_0 > 0$ gilt $x_n > 0$. Dann

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 4}{x_n + 5} \leq \frac{2(x_n + 2)}{2(x_n + 2)} = 1$$

also ist die Folge beschraenkt.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + 4}{x_n + 5} - x_n = \frac{-(x_n^2 + 3x_n - 4)}{x_n + 5} \geq 0$$

da $x_n^2 + 3x_n - 4 < 0$ fuer $x_n \in [0, 1]$. Damit $x_{n+1} \geq x_n$ und x_n ist monoton. Monoton und beschraenkt impliziert konvergent. Aufgrund der ersten abschaetzung Versuchen wir $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{2x_{n-1} + 4}{x_{n-1} + 5} - 1\right| = \left|\frac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1} + 5}\right| \leq \frac{1}{5}|x_{n-1} - 1| \leq \cdots \leq \frac{1}{3^n}|x_0 - 1| = \frac{1}{3^n}\frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n+1}} \leq \epsilon$$

fuer n gross genug. Daraus folgt die Konvergenz von x_n gegen 1.

Aufgabe 3)

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{A}{2n + 1} + \frac{B}{2n - 1}$$

Also

$$\begin{aligned} & A(2n - 1) + B(2n + 1) = 1 \\ \iff \quad & 2n(A + B) + A - B = 1 \end{aligned}$$

Nach Koeffizientenverlgeivh $A = -B$ und $A - B = 1$. Damit

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2}$$

Dann Teleskopsumme!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2n + 1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n + 1}\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{2N + 1}\right] = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4)

Klarerweise $|a_n| \geq 0$. Dann

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2 - n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} < \infty$$

Also ist die Reihe absolut konvergent nach dem Majorantekriterium. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Aufgabe 5)

Mit den Formeln

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

und $a = \sqrt[3]{2x + 1}$, $b = x + 1$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x + 1} - x - 1}{\sqrt{x + 4} - 2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x(x^2+3x+1)}{(2x+1)^{2/3}+(2x+1)^{1/3}(x+1)+(x+1)^2}}{\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}}\lim_{x\to 0}\frac{-(x^2 + 3x + 1)(\sqrt{x + 4} + 2)}{(2x + 1)^{2/3} + (2x + 1)^{1/3}(x + 1) + (x + 1)^2} = \frac{-4}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y + \frac{\pi}{4}) - \cos(y + \frac{\pi}{4})}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cos\frac{\pi}{4} + \cos y\sin\frac{\pi}{4} - \cos y\cos\frac{\pi}{4} + \sin y\sin\frac{\pi}{4}}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\sin y}{y} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

WS 2007/08

Aufgabe 2)

Nachdem $1-x^2=0 \iff x=1,-1$. Durch Einsetzen erhalten wir $1-x^2 \geq 0$ fuer $x \in [-1,1]$ und $1-x^2<0$ fuer $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$. Dann ($1-x^2$ gerade)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |1-x^2|\,dx &= \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx + 2\int_{1}^{2} x^2-1\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} \\ &= 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+2\left[\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right] = 4\end{aligned}$$

Aufgabe 5)

$a_n = \binom{2n}{n}x^{2n}$. Mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{2n+1}{n+1}x^{2n+1}}{\binom{2n}{n}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!^2}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{n+1}\right||x| = 2|x|$$

Also muss gelten $2|x|<1 \iff |x|<\frac{1}{2}$. Also $x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (Laenge 1)

Aufgabe 7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+5} = 2$$

Betrachte folgende Teilfolgen (fuer $k=0,\dots,7\}$)

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi(k+8n)}{4} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & k=1,7 \\ 0 & k=2,6 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & k=3,5 \\ -1 & k=4 \end{cases}$$

Die HP sind also $3, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, 2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

$$3\cdot 2\cdot 1\cdot\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\cdot\left(4-\frac{1}{2}\right) = 21$$

Aufgabe 8)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{4^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\frac{(5^2)^n}{(4^3)^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{64}\right)^n = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-\frac{25}{64}}-1\right] = \frac{5}{39}$$