

СЛАБОСВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ТРЕХ РЕЗОНАНСНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В. И. ЕФИМОВ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

(Поступила в редакцию 16 февраля 1970 г.)

Показано, что при достаточной резонансности парных сил у трех тождественных частиц возникает семейство связанных состояний малой энергии. Квантовые числа всех состояний одинаковы: для бесспиновых бозонов 0^+ , для нуклонов $1/2^+$, $T = 1/2$. Размер состояний больше радиуса парных сил. Наиболее благоприятные условия появления семейства уровней имеют место для трех бесспиновых нейтральных бозонов; менее благоприятные — для заряженных частиц и частиц со спином и изоспином. Обсуждается возможность существования таких уровней в системе трех α -частиц (в ядре C^{12}) и трех нуклонов (H^3).

1. Введение

Работа посвящена исследованию физического эффекта в системе трех частиц, который состоит в следующем. Оказывается, что, если парные силы достаточно резонансны, у трех частиц обязательно возникает целое семейство связанных уровней. Возможен даже случай, когда число уровней бесконечно, т. е. в спектре есть сгущение. Причем эффект является универсальным в том смысле, что он имеет место вне зависимости от конкретной формы парных сил, нужно только, чтобы они были резонансны.

Уточним, какие резонансные силы имеются в виду. Предполагаем, что резонанс вызван существованием связанного или виртуального уровня малой энергии (как в двухнуклонной системе). Резонансы, связанные с квазистационарными уровнями, не рассматриваются. Для выбранного взаимодействия радиус сил r_0 много меньше длины рассеяния $-a$; величина сил V порядка $1/r_0^2$. В настоящей работе ограничиваемся одинаковыми частицами.

Чтобы понять физику явления, рассмотрим наиболее простой случай — три бесспиновые нейтральные частицы малой энергии ($E r_0^2 \ll 1$). Они эффективно взаимодействуют в объеме, максимальные размеры которого порядка a . Если несколько менять величину парных сил, то a резко меняется, обращаясь в бесконечность, когда энергия связи двух частиц равна нулю.

Представление о характере взаимодействия в пределах объема можно получить из следующих соображений. Разделим парные силы на две части: резонансную (с характерным размером a) и нерезонансную (радиуса r_0). Последняя существенна, когда три частицы сближаются в объеме порядка r_0^3 . Если же некоторые взаимные расстояния r_{ik} много больше r_0 , то нерезонансной частью можно пренебречь. Если наряду с этим все взаимные расстояния много меньше a , то в резонансной части можно положить $a = \infty$. Значит, в указанной области взаимодействие трех частиц не зависит ни от r_0 , ни от a , т. е. оно не характеризуется никаким размерным параметром. Мы показываем, что оно имеет вид $1/R^2$ (для одинаковых ча-

стиц ($3R^2/2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2$). Величина и знак зависят только от симметрии состояния относительно перестановок частиц, полного момента и четности.

Со стороны меньших R взаимодействие $1/R^2$ обрезается при $R \sim r_0$ нерезонансными силами, а со стороны больших R — величиной a . Наибольшая связь между тремя частицами происходит в симметричном состоянии с моментом $L = 0$. Здесь взаимодействие $1/R^2$ оказывается притягивательным. При $a \rightarrow \infty$ оно приводит к сгущению уровней трехчастичной системы совершенно так же, как в случае двух частиц, взаимодействующих по закону $1/r^2$. Это явление не зависит от нерезонансных сил. Для состояний с другими квантовыми числами центробежные силы и асимметричность волновой функции разрушают эффект — взаимодействие $1/R^2$ здесь отталкивательное. Имеются и состояния, в которых резонансные силы вообще не эффективны.

Из этих рассуждений сразу вытекает условие существования явления. Число уровней, продуцируемое резонансными силами — порядка $\ln(|a|/r_0)$ (столько уровней в потенциале $1/R^2$, обрезанном указанным образом). Поэтому эффект ярко выражен при $\ln(|a|/r_0) \gg 1$.

Взаимодействие бесспиновых (нейтральных и заряженных) частиц рассмотрено в разделах 2—4. В разделе 5 исследуется нуклонное взаимодействие. В разделе 6 выясняется вопрос о возможности описания явления силами нулевого радиуса.

2. Основные уравнения

Перейдем к доказательству утверждений, сделанных во Введении для бесспиновых нейтральных частиц. Покажем, что для появления семейства уровней существует только резонансная часть сил, и получим уравнения, определяющие волновые функции и энергии уровней. В следующем разделе найдем спектр.

Прежде всего разделим парные силы на резонансную и нерезонансную части. Для этого выразим взаимодействие трех частиц через парную амплитуду. Полюсной член в амплитуде, соответствующий связанному или виртуальному состоянию двух частиц, назовем резонансной частью; остальное — нерезонансной. Важно, что a входит только в резонансную часть.

Существование каждой части удобно проанализировать, разделив конфигурационное пространство трех частиц на внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней области $R < R_0$ (определение R см. во Введении), где $R_0 \sim r_0$ и не зависит от a и E ; $R_0/a \ll 1$, $R_0|E|^{1/2} \ll 1$. Мы положим $R_0 = Cr_0$, где C — большое число (смысл такого выбора выяснится ниже). Во внешней области $R > R_0$.

Ввиду того что радиус резонансных сил много больше размеров внутренней области, число уровней, образованных взаимодействием трех частиц в этой области, слабо зависит от a . Поэтому семейство уровней, о котором говорилось во Введении, если и появляется, то только от взаимодействия во внешней области. Но там нерезонансные силы неэффективны. Действительно, так как они имеют радиус r_0 , а характерное расстояние между частицами во внешней области порядка R_0 или больше, то вероятность парных столкновений мала (именно для этой цели выбрано $C \gg 1$). В этом можно убедиться и другим способом, рассматривая графики для трехчастичной амплитуды. Каждый следующий график отличается от предыдущего множителем $\beta \sim t/\bar{R}$, где t — характерное значение нерезонансной амплитуды, \bar{R} — характерное значение R . Так как $t \lesssim r_0$, $\bar{R} \gtrsim R_0$, то $\beta \lesssim r_0/R_0$.

Итак, достаточно рассмотреть резонансное взаимодействие во внешней области. (Мы исключаем случай, когда один из уровней, образованных взаимодействием во внутренней области, имеет малую энергию. Появление такого уровня носит, в известном смысле, случайный характер, так как небольшим изменением нерезонансного взаимодействия его можно вывести из области малых a^{-1} и E .) Разумеется, для определения спектра уровней

полученные волновые функции нужно сплести с волновыми функциями внутренней области.

В этом разделе рассмотрим симметричное состояние трех частиц. Волновую функцию запишем в виде ¹⁾

$$\Psi = \chi(\mathbf{r}_{12}, \rho_3) + \chi(\mathbf{r}_{23}, \rho_1) + \chi(\mathbf{r}_{31}, \rho_2) \equiv (1 + Q)\chi(\mathbf{r}_{12}, \rho_3), \quad (1)$$

где Q — оператор, переставляющий координаты. χ определяется уравнением

$$(T - E)\chi(\mathbf{r}, \rho) = -V(\mathbf{r})(1 + Q)\chi(\mathbf{r}, \rho), \quad T = -\Delta_r - \Delta_\rho. \quad (2)$$

При $r > r_0$ правая часть равна нулю. Поэтому вместо (2) будем решать во внешней области уравнение

$$(T - E)\chi = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями при $r = r_0$ и $R = R_0$, которые сейчас выведем.

Для вывода первого условия удобно исходить из уравнения для $V(\mathbf{r})\Psi$. Оно легко получается из (2). Имеем

$$V\Psi = VG_v QV\Psi, \quad G_v = -(T - E + V)^{-1}.$$

Вводим в него парную амплитуду $t = V + VG_0 t$:

$$V\Psi = tG_0 QV\Psi, \quad G_0 = -(T - E)^{-1}$$

и оставляем во внешней области только резонансную часть $\langle \mathbf{r}\rho | t_{\text{рез}} | \mathbf{r}'\rho' \rangle$, которая как функция \mathbf{r} и \mathbf{r}' имеет факторизованный вид

$$t_{\text{рез}} \sim V(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')\phi_0(\mathbf{r}'),$$

где ϕ_0 — волновая функция связанного (виртуального) состояния двух частиц. Отсюда следует, что в области взаимодействия $V(\mathbf{r})$ функция $\Psi(\mathbf{r}, \rho)$ также факторизуется [1, 2]:

$$\Psi(\mathbf{r}, \rho) = \phi_0(\mathbf{r})\Phi(\rho),$$

а значит, при $r = r_0$ удовлетворяет тому же граничному условию, что и ϕ_0 :

$$\frac{\partial r \Psi}{\partial r} = a^{-1} r \Psi.$$

Выражая Ψ через χ по формуле (1), имеем искомое граничное условие на χ при $r = r_0$

$$\frac{\partial r \chi}{\partial r} + Q\chi = a^{-1} r \chi, \quad (4)$$

которое для решения уравнения (3) с точностью до r_0/R_0 можно считать наложенным при $r = 0$. Поскольку рассматриваемые резонансные силы действуют только в s -состоянии пары, во внешней области χ не зависит от углов вектора \mathbf{r} . Для $L = 0$ функция χ не зависит и от углов вектора ρ . Вводя для этого случая $\chi_0(r, \rho) = r\rho\chi(r, \rho)$, окончательно получаем из (3) и (4)

$$(\Delta + E)\chi_0 = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \chi_0(r, \rho)}{\partial r} \right|_{r=0} + \frac{8}{\sqrt{3}\rho} \chi_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho, \frac{1}{2}\rho\right) = a^{-1} \chi_0(0, \rho), \quad (6)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial r^2 + \partial^2 / \partial \rho^2$. Кроме того, из определения χ_0 следует граничное условие при $\rho = 0$

$$\chi_0(r, 0) = 0. \quad (7)$$

¹⁾ \mathbf{r} и ρ определяются обычным образом: $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\rho_3 = (2/\sqrt{3})(\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2)$. В этих координатах $R^2 = r_{12}^2 + \rho_3^2$. Другие наборы координат отличаются перестановкой индексов. Отметим здесь же, что принято $\hbar = m = 1$, где m — масса частицы.

Что же касается граничного условия при $R = R_0$, то здесь величина χ_0/χ_0 должна быть сшита с логарифмической производной внутренней функции. Во внутренней области ввиду $R_0/a \ll 1$ и $R_0|E|^{1/2} \ll 1$ можно положить $a^{-1} = 0$ и $E = 0$. Поэтому логарифмическая производная с точностью до указанных малых величин не зависит от a и E .

3. Спектр уровней

Покажем теперь, что при $a = \infty$ есть сгущение уровней. В этом случае переменные разделяются в полярных координатах [3] $\rho = R \cos \alpha$, $r = R \sin \alpha$, так как граничное условие (6) формулируется только на χ_0 как функцию угла α :

$$\left. \frac{\partial \chi_0(R, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0 \left(R, \frac{\pi}{3} \right) = 0. \quad (8)$$

Из этого условия и условия (7) находим угловую функцию

$$\varphi_{s_i}(\alpha) = \sin s_i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

где s_i — корни уравнения

$$-s_i \cos s_i \frac{\pi}{2} + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin s_i \frac{\pi}{6} = 0. \quad (9)$$

Уравнение для радиальной функции

$$\left(-\frac{d^2}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} + \frac{s_i^2}{R^2} \right) F_{s_i}(R) = EF_{s_i}(R)$$

имеет вид радиального уравнения Шредингера двумерной задачи с потенциалом s_i^2/R^2 . Если $s^2 < 0$, то, как известно, в таком поле есть связанные состояния с как угодно малой энергией. Уравнение (9) было получено Даниловым [4] при исследовании задачи трех тел с нулевым радиусом сил (обсуждение перехода $r_0 \rightarrow 0$ см. в разделе 6) и имеет одно мнимое решение $s_0 \approx i$ и бесконечно много действительных, наименьшее из которых $s_0 = 1.00624$, $s_1 \approx 4$. Поэтому спектр трех частиц сгущается к $E = 0$.

Определим, по какому закону происходит сгущение. Радиальная функция есть убывающая функция Бесселя $K_{s_i}(|E|^{1/2}R)$, а полное решение записывается в виде

$$\chi_0 = \sum_{s_i} K_{s_i}(KR) f_{s_i} \sin s_i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad K = |E|^{1/2},$$

где f_{s_i} — коэффициенты, которые определяются из условий шивания с внутренней функцией χ_0^{in} при $R = R_0$. Заметим, что задача формально аналогична задаче о связанном состоянии частицы в нецентральной волне. Роль s -волны играет парциальная волна s_0 в том отношении, что только для нее нет центробежного барьера. Из-за центробежного барьера слагаемые с $s_i \neq s_0$ быстро убывают при увеличении R , поэтому будем считать, что R_0 выбрано так, что ими можно пренебречь. Действительно, при $KR \ll 1$ парциальная волна $s_i \neq s_0$ имеет вид

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{s_i} \sin s_i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \chi_{s_i}^{in}(R_0),$$

где $\chi_{s_i}^{in}(R_0)$ — парциальная компонента внутренней функции. Если считать, что при первоначально выбранном R_0 все $\chi_{s_i}^{in}(R_0)$ одного порядка, то, выбирая другой радиус шивания $R_0' \gg R_0$ (но все еще $R_0' \ll 1/K$), полу-

чаем

$$\chi_{s_i}^{in}(R_0) = (R_0/R_0')^{s_i} \chi_{s_i}^{in}(R_0) \ll \chi_{s_i}^{in}(R_0),$$

в то время как для парциальной волны s_0 будет $\chi_{s_0}^{in}(R_0) \sim \chi_{s_0}^{in}(R_0)$. Асимптотика бesselевой функции K_{s_0} есть $\sin(|s_0| \ln(KR) + \Delta)$; $\Delta = -|s_0| \ln 2 - \arg \Gamma(s_0 + 1)$. Условие сшивания имеет вид

$$\frac{(\chi_{s_0}^{in})'(R_0)}{\chi_{s_0}^{in}(R_0)} \equiv \Lambda = \frac{|s_0|}{R_0} \operatorname{ctg}(|s_0| \ln KR_0 + \Delta),$$

откуда находим спектр

$$E_N = -\frac{1}{R_0^2} e^{-2\pi N/|s_0|} \exp \frac{2}{|s_0|} \left[\operatorname{arccctg} \frac{\Lambda R_0}{|s_0|} - \Delta \right]. \quad (10)$$

Таким образом, уровни сгущаются к нулю экспоненциально с показателем $E_N/E_{N+1} = e^{2\pi/|s_0|} \approx 500$.

Перейдем теперь к $a \neq \infty$. Покажем, что сгущение исчезает. Для этого рассмотрим взаимодействие трех частиц в областях $R \ll a$ и $R \gg a$. При $R \ll a$ по-прежнему есть притяжение s^2/R^2 .

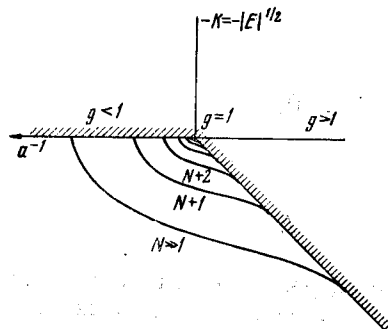


Рис. 1. Спектр уровней трех бесспиновых нейтральных частиц. Штриховкой показана граница непрерывного спектра трех частиц. Соседние траектории уровней отличаются только преобразованием масштаба приблизительно в 22 раза. В целях наглядности это соотношение на рисунке не выдержано

Однако при $R \gg a$ взаимодействие мало. Таким образом, притяжение обрезается на расстоянии $R \sim a$ и, следовательно, число уровней конечно. К такому же выводу можно прийти, рассматривая граничное условие (6). Перепишем его в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_0(R, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0 \left(R, \frac{\pi}{3} \right) = \\ = \frac{R}{a} \chi_0(R, 0). \end{aligned}$$

При $R \ll a$ пренебрегаем правой частью и получаем то же взаимодействие трех частиц, что и при $a = \infty$. При $R \gg a$, наоборот, пренебрегаем $\chi_0(R, \pi/3)$. Это эквивалентно пренебрежению взаимодействием между парой и третьей частицей²⁾, т. е. слабости взаимодействия трех частиц.

Итак, при любом малом, но конечном a^{-1} число уровней конечно. Это значит, что при увеличении парного взаимодействия (выделим в нем множитель g : $V(\mathbf{r}) \rightarrow gV(\mathbf{r})$; $g=1$ соответствует появлению связанного состояния) имеет место такая картина: когда g увеличивается, стремясь к единице, число уровней трех частиц возрастает, так что при $g=1$ оно бесконечно; при дальнейшем увеличении g число уровней уменьшается. Это не противоречит тому, что энергия связи каждого уровня увеличивается при увеличении g , поскольку граница непрерывного спектра при $g > 1$ определяется порогом развала на связанную пару и третью частицу и понижается при увеличении g как a^{-2} (рис. 1).

Определим качественный ход траекторий уровней в зависимости от g . Оказывается, достаточно знать только траекторию одного уровня, остальные получают масштабным преобразованием. Это следует из размерных соображений.

²⁾ См. вывод граничного условия в разделе 2. Указанное пренебрежение эквивалентно $Q \rightarrow 0$ в (2).

Чтобы это показать, заметим, что при $a^{-1} \neq 0$ решение при $R > R_0$ до сшивания содержит две размерные величины: a^{-1} и K . Переменные не разделяются. Однако при $R \ll a$, когда член $a^{-1}\chi_0(R, 0)$ в граничном условии несуществен, можно опять разделить переменные. Парциальные волны с $s_i \neq s_0$ быстро затухают при уменьшении R (как $(KR)^{s_i}$) из-за центробежных барьеров. Поэтому при $R \sim R_0$ остается только парциальная волна s_0 . Она имеет вид $\sin(|s_0| \ln(KR) + \Delta(a^{-1}, K))$. Фаза Δ , будучи безразмерной величиной, зависит только от отношения a^{-1}/K . Поэтому спектр при фиксированном отношении a^{-1}/K определяется формулой того же вида, что и (10):

$$E_N = -\frac{1}{R_0^2} \exp\left(-\frac{2\pi N}{|s_0|}\right) \exp\frac{2}{|s_0|} \left[\operatorname{arccctg} \frac{\Delta R_0}{|s_0|} - \Delta\left(\frac{a^{-1}}{K}\right) \right]. \quad (11)$$

Так как зависимость от a^{-1}/K и N факторизована, то на плоскости (a^{-1}, K) формула (11) описывает набор подобных траекторий: их зависимость от «угла» $\xi = \operatorname{arctg}(a^{-1}/K)$ одинакова. Две соседние траектории отличаются только преобразованием «радиуса» $H = (K^2 + a^{-2})^{1/2}$ в $e^{\pi/|s_0|} \approx 22$ раза (рис. 1). В частности, значения парных амплитуд, при которых появляется N -й и $N+1$ -й уровень, когда g , увеличиваясь, приближается к единице, различаются во столько же раз, а при заданном $a > 0$ число уровней есть (с логарифмической точностью)

$$N(a) = \frac{|s_0|}{\pi} \ln \frac{a}{r_0}. \quad (12)$$

Когда g , увеличиваясь, удаляется от единицы, то так же относятся парные амплитуды, при которых уровни выходят в непрерывный спектр, а число еще оставшихся уровней определяется формулой (12).

Качественное представление о ходе отдельной траектории вытекает из следующих двух свойств, отображенных на рис. 1.

1. При выходе траектории в непрерывный спектр энергия связи третьей частицы $\varepsilon = a^{-2} - E$ мала по сравнению с энергией связи пары a^{-2} . Поэтому третья частица находится на расстоянии $1/|\varepsilon|$, много большем размера пары a . Мы имеем дело, по существу, с двухчастичным состоянием пара + частица с нулевым относительным моментом и малой энергией связи. В такой ситуации, как известно [5], $\varepsilon \sim (g - g_0)^2$, где g_0 — значение g , при котором связь разрушается.

2. При возникновении связанного состояния энергия связи E равномерно распределяется между тремя частицами. Можно показать, что при $E \rightarrow 0$ радиус связанного состояния $\sim a$, энергия связи $E \sim (g - g_0)$; соответственно $K \sim (g - g_0)^{1/2}$.

Наиболее неприятное свойство уровней с точки зрения возможности их существования в природе — жесткое требование на резонансность сил. Предполагая, что результаты этого раздела качественно справедливы и при $N \sim 1$, получаем, что первый уровень появляется при $a_1 \sim 20 r_0$ (хотя это число может быть уменьшено нерезонансными силами), второй — при $a_2 \sim 20 a_1$ и т. д. Возбужденный уровень малой энергии, полученный рядом авторов [6] при численном решении уравнения Шредингера с модельными парными взаимодействиями, является, по-видимому, первым из этой серии уровней. Его свойства еще не вполне тождественны указанным выше, — появляясь при $a \gg r_0$, он, согласно расчетам, остается в области дискретного спектра при увеличении g .

Как влияют на спектр кулоновские силы? Они вводят новую длину — боровский радиус a_c . Если размер связанного состояния меньше a_c , то влияние кулоновских сил мало, если больше — кулоновские силы разрушают связь. Поэтому для заряженных частиц сгущения нет; максимальное число уровней $\sim \ln(a_c/r_0)$. Соотношение $a_c > r_0$ выполняется для взаимодействий только легчайших ядер.

Возможным кандидатом в уровни описанной природы является уровень в ядре C^{12} с энергией возбуждения $7,65 \text{ Мэв}$. Как считается, он играет кардинальную роль при образовании элементов в звездах. В пользу предположения о его структуре (подобное предположение высказывается также в работе [7]) приведем следующие аргументы: во-первых, он расположен вблизи порога развала C^{12} на три α -частицы ($0,38 \text{ Мэв}$ над порогом [8]), во-вторых, он обладает нужными квантовыми числами 0^+ , в-третьих, парное взаимодействие α -частиц в s -состоянии резонансно (резонанс — основное состояние Be^8). С другой стороны, с точки зрения оболочечной модели C^{12} интерпретация этого уровня затруднительна: уровень с такими квантовыми числами и простой конфигурацией должен иметь значительно более высокую энергию возбуждения [9]. Возможность количественного описания свойств этого уровня с излагаемой точки зрения может быть выяснена только в результате расчета, поскольку для α -частиц r_0 , a и a_c различаются не сильно [10].

4. Другие симметрии. Ненулевые моменты

Покажем, что в других состояниях трех частиц нет семейства уровней малой энергии. Начнем с антисимметричных состояний (с любым L). Здесь существенны парные силы только в нечетных состояниях. Поэтому резонансное взаимодействие вообще не проявляется [2].

Перейдем к симметричным состояниям с $L \neq 0$. Сразу видно, что при четных L резонансные силы эффективны только в четных состояниях трех частиц (2^+ , 4^+ , ...), а при нечетных L — в нечетных состояниях (1^- , 3^- , ...). Действительно, пара резонансно взаимодействует в s -состоянии. При этом третья частица должна иметь относительный момент, равный L . Четность такого состояния трех частиц есть $(-1)^L$.

Так как разрушительное влияние центробежных сил на спектр увеличивается с увеличением L , достаточно проверить отсутствие семейства уровней для наименьшего L при каждой четности, т. е. для 1^- - и 2^+ -состояний. Идя тем же путем, что и в разделе 3, получаем для s только вещественные корни с $s_{min} \approx 3$ в обоих случаях.

Наконец, рассмотрим состояния трех частиц смешанной симметрии. Аналогично симметричному случаю пару функций $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, образующих смешанное представление, можно выразить через функцию ξ :

$$\Psi^{(1)} = \xi(r_{12}, \rho_3) - \frac{1}{2} \xi(r_{23}, \rho_1) - \frac{1}{2} \xi(r_{31}, \rho_2) \equiv \left(1 - \frac{1}{2} Q\right) \xi(r_{12}, \rho_3),$$

$$\Psi^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi(r_{23}, \rho_1) - \xi(r_{31}, \rho_2)),$$

являющуюся решением уравнения

$$(T - E) \xi = -V \left(1 - \frac{1}{2} Q\right) \xi. \quad (13)$$

Сравнивая формулы (13) и (2), видим, что смешанный случай отличается от симметричного только заменой $Q \rightarrow -1/2 Q$. Производя в (4) и далее эту замену, находим, что для 0^+ -состояний все корни вещественны, $s_{min} \approx 2$. То же самое получим для 1^- -состояний.

Итак, во всех состояниях, кроме симметричного 0^+ , резонансные силы либо неэффективны, либо дают отталкивание $1/R^2$ при $r_0 \ll R \ll a$. В последнем случае взаимодействие во внутренней области несущественно, так как волновая функция там мала (ср. с аналогичной задачей низкоэнергетического рассеяния частицы на поле, окруженном центробежным барьером). В первом приближении по KR_0 граничное условие при $R = R_0$ вырождается в $\chi_0 = 0$ или $\xi_0 = 0$ при $R = 0$.

5. Резонансное взаимодействие нуклонов

Для частиц со спином резонансные силы характеризуются несколькими параметрами. В частности, нуклон-нуклонные силы, которые рассмотрены в этом разделе, определяются синглетной a_s и триплетной a_t длинами. Синглетная длина довольно велика. Однако мы покажем, что радиус притягивательного $1/R^2$ -взаимодействия определяется наименьшей из двух длин (т. е. размером дейтрона). Отсюда, в частности, следует, что если силы в каком-либо состоянии (синглетном или триплетном) нерезонансны, то притягивательное взаимодействие вообще отсутствует. Это представляет резкий контраст с бесспиновым случаем.

Запишем нуклон-нуклонное взаимодействие в виде

$$V = A_1 + A_2 \tau_1 \tau_2,$$

где каждое из A_i есть сумма членов

$$A = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r}) \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 + V_s(\mathbf{r}) \mathbf{s} + V_{xmn}(\mathbf{r}) s_m s_n, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2.$$

Влияние тензорных и спин-орбитальных сил на резонансную амплитуду во внешней области сводится только к изменению a_i . Действительно, в синглетном канале эти взаимодействия вообще не эффективны. В триплетном канале тензорные силы, помимо изменения a_t , примешивают к s -состоянию d -состояние. Эта примесь порядка $(kr_0)^2$ в амплитуде, что приводит во внешней области к малым поправкам порядка $(r_0/R_0)^2$. Такого же порядка поправка от спин-орбитальных сил. Таким образом, структуру резонансной амплитуды во внешней области можно считать такой же, как при $V_{ts} = V_t = 0$. Так как в последнем случае L и S сохраняются, то во внешней области L и S — хорошие квантовые числа.

Исходя из симметрии спин-изоспиновой функции, находим тип симметрии координатной функции и, пользуясь результатами разделов 3, 4, сразу определяем характер трехнуклонного взаимодействия $1/R^2$ в состояниях с различными (T, S) ³⁾ (см. таблицу). Только в состоянии $(1/2, 1/2)$ с $L=0$, опущенном в таблице, возможно притяжение. Этот случай рассмотрим подробно.

Здесь зависящие от спина силы смешивают симметричную и смешанную функции. Методом, развитым в разделе 2, получаем следующие уравнения:

$$(\Delta + E)\chi_0 = 0, \quad (\Delta + E)\xi_0 = 0;$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial \alpha} + \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0 \left(\frac{\pi}{3} \right) = R (a_+^{-1} \chi_0 + a_-^{-1} \xi_0) \quad \text{при } \alpha = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \alpha} - \frac{4}{\sqrt{3}} \xi_0 \left(\frac{\pi}{3} \right) = R (a_-^{-1} \chi_0 + a_+^{-1} \xi_0) \quad \text{при } \alpha = 0,$$

где

$$a_{\pm}^{-1} = \frac{1}{2} (a_t^{-1} \pm a_s^{-1}).$$

³⁾ К He^3 и Li^3 результаты разделов 3, 4 непосредственно неприменимы из-за кулоновских сил.

Исследуем характер трехнуклонного взаимодействия при различных соотношениях между a_s и a_t . Если $a_s \sim a_t$, то качественно ситуация та же, что и для не зависящих от спина сил: при $r_0 \ll R \ll a$ имеем притяжение для χ_0 и отталкивание для ξ_0 (здесь правой частью (14) можно пренебречь); при $R \gg a$ взаимодействие мало.

Пусть $a_t \gg a_s$ ⁴⁾. Область $a_s \ll R \ll a_t$ является внешней по отношению к синглетным резонансным силам. Согласно аргументации раздела 2, их здесь можно не учитывать. Тем самым резонансные силы в этой области значительно слабее, чем при $R \ll a_s$, и возникает вопрос, достаточно ли их, чтобы привести к притяжению трех частиц. Чтобы выяснить это, обратимся к условиям (14). Положим в них $a_t^{-1} = 0$, $R \gg a_s$:

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial a} + \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{R}{2a_s} (\chi_0 - \xi_0),$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial a} - \frac{4}{\sqrt{3}} \xi_0 \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{R}{2a_s} (\chi_0 - \xi_0).$$

Из этих уравнений легко заключить, что разность $\chi_0 - \xi_0$ много меньше, чем каждое слагаемое в отдельности:

$$\chi_0 - \xi_0 \sim \frac{a_s}{R} \chi_0 \sim \frac{a_s}{R} \xi_0,$$

после чего получим, что с точностью до a_s/R выполняется $\chi_0 = \xi_0$ и

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial a} + \frac{1}{4} \frac{8}{\sqrt{3}} \chi_0 \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Это условие отличается от граничного условия (8) для симметричной функции в бесспиновом случае только множителем $1/4$ перед вторым слагаемым. Трансцендентное уравнение (9) после такой замены не имеет мнимого корня, что соответствует отталкиванию. Таким образом, взаимодействие трех нуклонов имеет следующий вид: при $r_0 \ll R \ll a_s$ притяжение, при $a_s \ll R \ll a_t$ отталкивание.

Наконец, рассмотрим последний случай: $a_s \gg a_t$. Здесь в области $a_t \ll R \ll a_s$ неэффективны триплетные силы; можно также пренебречь и синглетными, так как создаваемое ими поле $1/R^2$ мало по сравнению с E (напомним, что нас интересует область дискретного спектра трех нуклонов, в которой $E \leq -a_t^2$). Значит, радиус притяжения в этом случае равен a_t .

Объединяя все случаи, делаем вывод, что радиус притягивательного $1/R^2$ -взаимодействия по порядку величины определяется наименьшей длиной рассеяния.

Теперь мы в состоянии представить качественную картину поведения уровней в зависимости от g . Когда g , увеличиваясь, попадает в резонансную область, у трех нуклонов появляется притяжение $1/R^2$, радиус которого порядка наименьшей из длин рассеяния $a_t(g)$ и $a_s(g)$. Максимальный радиус притяжения определяется максимальным значением этой наименьшей длины $a_{min max}$. Соответственно, максимальное число уровней

$$N_{max} \approx \frac{|s_0|}{\pi} \ln \frac{|a_{min max}|}{r_0}.$$

⁴⁾ Мы предполагаем в соответствии с экспериментом, что триплетное взаимодействие сильнее синглетного, так что по мере увеличения константы g ядерных сил сначала обращается в бесконечность a_t , а затем a_s .

$s_{0+} = 0.59$
 $s_{1-} = 2.13$
 $s_{2+} = 2.95$

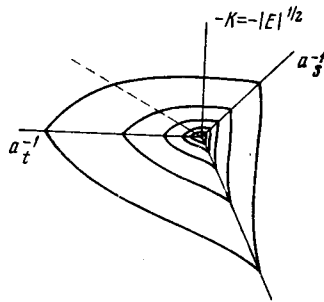


Рис. 2. Энергетические поверхности трех нуклонов

N_{max} бесконечно в том невероятном случае, когда триплетное и синглетное связанные состояния появляются вместе. Когда g , увеличиваясь, выходит из резонансной области, обе длины рассеяния уменьшаются и уровни выходят в непрерывный спектр.

Представление об энергетических поверхностях $K(a_t^{-1}, a_s^{-1})$ дает рисунок 2, являющийся аналогом рис. 1 для сил, зависящих от спина. Как и прежде, можно показать, что все энергетические поверхности отличаются друг от друга преобразованием масштаба по радиусу $H = (K^2 + a_t^{-2} + a_s^{-2})^{1/2}$ в $e^{\pi/|s_0|}$ раз. Описанная выше картина поведения уровней получается пересечением поверхностей плоскостью $a_t^{-1} = \gamma a_s^{-1} + \delta$, где γ и δ — постоянные. В частности, при $a_t^{-1} = a_s^{-1}$ (силы не зависят от спина) приходим к траекториям рис. 1.

Применим полученные результаты для оценки существенности резонансных сил в тритоне. Радиус притяжения определяется здесь триплетной длиной $5,4 \phi$ — размером дейтрона. Можно оценить максимальный радиус притяжения $a_{min\ max}$ для ядерных сил. Он оказывается равным примерно 8ϕ . Определенные заключения на основании этой цифры сделать трудно. Следует лишь отметить тенденцию к образованию состояния с теми же квантовыми числами, что и основное состояние тритона. Эта тенденция может реализоваться в появлении у тритона возбужденного связанного уровня, что, однако, сомнительно ввиду небольшого различия между $a_{min\ max}$ и r_0 (следовало бы ожидать такого уровня при энергии связи дейтрона ≈ 100 кэв). Нерезонансные силы вряд ли заметно способствуют появлению связанного уровня, так как основной уровень тритона сам имеет небольшую (по сравнению с $1/r_0^2$) энергию связи. Экспериментально связанных уровней тритона пока не обнаружено [11, 12]. Более вероятно, что указанное состояние виртуально. Тогда оно могло бы проявляться в низкоэнергетическом дублетном рассеянии нейтрона на дейтроне. Возможно, что с этим связаны известные аномалии в этом процессе [11, 13].

6. Силы нулевого радиуса

Как известно, взаимодействие двух частиц в условиях, принятых в настоящей работе, может быть описано теорией нулевого радиуса сил (теория Бете — Пайерлса). В этом разделе мы выясним, в какой мере применим этот подход в нашем случае. Силы нулевого радиуса имеют, конечно, формальный характер. Их достоинство — в сильном математическом упрощении задачи. Однако физически их введение имеет смысл, если при разложении по параметрам Kr_0 и r_0/a первое приближение не содержит r_0 . Очевидно, что тогда его можно получить, полагая с самого начала $r_0 = 0$. Именно так обстоит дело для двух частиц.

В нашем случае при $r_0 \rightarrow 0$ и $a = \text{const}$ связь трех частиц в состоянии с любым конечным номером N становится бесконечной. Это согласуется с известной теоремой Томаса [1] и представляет собой коллапс трех частиц в поле притяжения $1/R^2$. Поэтому силы нулевого радиуса не годятся для описания семейства уровней. Проследим характер перехода к $r_0 = 0$. Уменьшение r_0 при фиксированном a представляет собой просто масштабное преобразование рис. 1 и 2. Каждая траектория, не изменяя формы, отодвигается дальше от начала координат⁵⁾. При $a^{-1} = 0$ уровни по-прежнему сгущаются к нулю.

⁵⁾ В формуле (11) от r_0 могла бы зависеть величина ΛR_0 . Λ имеет размерность обратной длины и определяется волновой функцией во внутренней области, где всеми размерными величинами, кроме r_0 , пренебрежено. Поэтому Λ пропорционально $1/r_0$ и, значит, ΛR_0 от r_0 не зависит.

Три частицы с силами нулевого радиуса рассматривались в ряде работ [2, 4, 14]. В частности, Минлосом и Фаддеевым было получено, что для 0^+ -состояний спектр уровней уходит на $-\infty$. Как видно, корректный переход к пределу $r_0 \rightarrow 0$, будучи в данном случае чисто формальным, приводит к тем же результатам, а спектр, полученный в [14], является отражением того физического факта, что в реальном случае (при конечном r_0) частицы обладают совокупностью слабосвязанных 0^+ -состояний.

Для других состояний трех частиц ситуация совершенно иная. Здесь r_0 вообще выпадает (раздел 4). Поэтому случай $Kr_0 \ll 1$, $r_0/a \ll 1$ описывается силами нулевого радиуса.

Вообще для 0^+ -состояний, как видно из разделов 2, 3, радиус сил входит только через граничное условие при $R = R_0$. Взаимодействие частиц и волновая функция во внешней области определяются уравнениями, не содержащими r_0 , и поэтому могут быть найдены в теории с нулевым радиусом сил⁶⁾. Этим объясняется тот факт, что уравнение (9) было получено Даниловым в теории с нулевым радиусом. Им же было указано, что для других состояний s не может быть мнимым. Это, как установлено, эквивалентно отсутствию семейства уровней в этих состояниях.

Автор благодарен М. Я. Амусья, В. Н. Грибову, Л. А. Сливу, Я. А. Смородинскому и Л. Д. Фаддееву за обсуждение.

Литература

- [1] L. N. Thomas. Phys. Rev., 47, 903, 1935.
- [2] Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартirosян. ЖЭТФ, 31, 775, 1956.
- [3] В. Ефимов. ЯФ, 10, 107, 1969. H. Noues. Phys. Rev. Lett., 23, 1201, 1969.
- [4] Г. С. Данилов. ЖЭТФ, 40, 498, 1961.
- [5] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», 1966, § 3.
- [6] J. W. Humberston, R. L. Hall, T. A. Osborn. Phys. Lett., 27B, 195, 1968. В. Ф. Харченко, Н. М. Петров. Препринт ИТФ-69-8, Киев, 1969. Y. E. Kim. Phys. Lett., 29B, 411, 1969, J. E. Beam. Phys. Lett., 30B, 67, 1969.
- [7] C. C. H. Leung, S. C. Park. Phys. Rev., 187, 1239, 1969.
- [8] E. Aizenberg-Selove, T. Lauritsen. Nucl. Phys., 78, 1, 1966; A110, 1, 1968.
- [9] D. Kurath. Phys. Rev., 101, 216, 1956.
- [10] S. A. Afzal, A. A. Z. Ahmad, S. Ali. Rev. Mod. Phys., 41, 247, 1969.
- [11] L. M. Delves, A. C. Phillips. Rev. Mod. Phys., 41, 497, 1969.
- [12] G. G. Ohlsen, R. H. Stokes, P. G. Young. Phys. Rev., 176, 1163, 1968. R. C. Minehart, L. Coulson, W. F. Grubb, K. Ziocck. Phys. Rev., 177, 1464, 1969.
- [13] Y. Avishai, W. Ebenhöh, A. S. Rinat-Reiner. Ann. Phys., 55, 341, 1969.
- [14] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев. ЖЭТФ, 41, 1850, 1961; ДАН СССР, 141, 1335, 1961.

⁶⁾ Уравнение (5) с граничными условиями (6) и (7) приводится к уравнению Скорнякова — Тер-Мартirosяна [2], если записать решение (5) в виде $\chi_0(r, \rho) = \int \chi_0(x) \sin x\rho \exp(-\sqrt{x^2 - E}) dx$ и найти уравнение для $\chi_0(x)$ из условия (6).

1090 Класс χ_0 с функцией $a(x)$ СТМ

$$\chi_0(x) = \frac{2N}{\pi} \frac{x\chi_0 - a(x)}{x^2 - a_0^2}, \text{ где } N - \text{нормировка в ф. Лагранжа};$$

$$N = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \chi_0(x) dx, \text{ где } \chi_0^2 = E + a^2$$